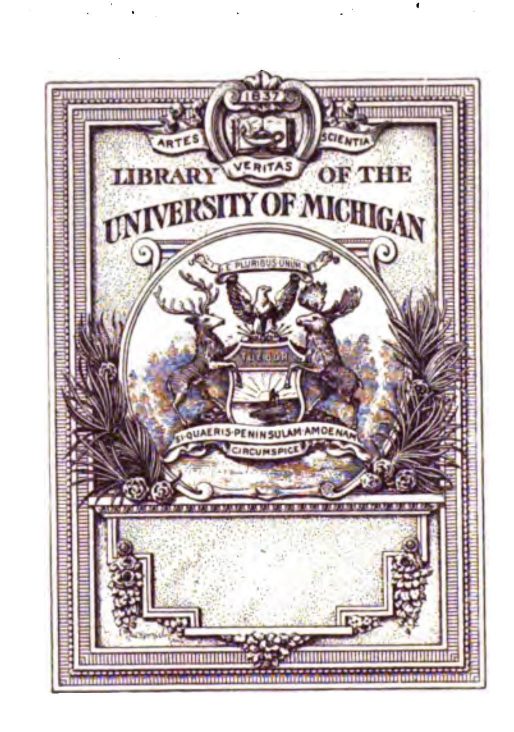

B 1,237,217


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1907.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1907.

Göttingen
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei
W. Fr. Kaestner

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1907.

Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers.

Zweite Mitteilung.

Von

Ph. Furtwängler.

Vorgelegt in der Sitzung vom 12. Januar 1907 von Herrn D. Hilbert.

Die Eigenschaft des Klassenkörpers, daß er der *umfassendste unverzweigte relativ Abel'sche* Körper inbezug auf seinen Grundkörper ist, ist in der ersten Mitteilung[1]) für diejenigen Teile des Klassenkörpers, deren Relativgrade Potenzen *ungerader* Primzahlen sind, allgemein als bestehend nachgewiesen; von den geraden Relativgraden sind nur zwei einfache Fälle betrachtet. Es bleibt daher noch die Aufgabe, allgemein nachzuweisen, daß die genannte Eigenschaft auch für den Teil des Klassenkörpers, dessen Relativgrad eine Potenz von 2 ist, gilt. Diese Aufgabe soll in der vorliegenden Mitteilung erledigt werden.

Wie ich bereits an anderer Stelle[2]) hervorgehoben habe, hat Herr D. Hilbert die allgemeinen Eigenschaften des Klassenkörpers, zu denen auch die hier behandelte gehört, in seinem Hauptsatz[3]) über den Klassenkörper angegeben. Für die speziell in dieser Mitteilung betrachteten Körper hat Herr Hilbert die fragliche Eigenschaft noch besonders in den Sätzen 6 und 13a an der genannten Stelle formuliert[4]). Von ihm rührt, wie ebenfalls früher schon erwähnt ist, der schärfere Aequivalenzbegriff her, der für die ganzen Untersuchungen dieser Mitteilung fundamental ist.

1) Vgl. diese Nachrichten 1906, S. 417.

2) Vergl. die Einleitung zu meinem allgemeinen Existenzbeweise für den Klassenkörper in Math. Ann. 63 (1906), S. 2.

3) Diese Nachrichten 1898, S. 378, Satz 10.

4) Die Aussage des Satzes 6 ist aber weitergehend als hier bewiesen wird.

Im übrigen sei noch erwähnt, daß bereits der Satz 94 des Hilbert'schen Berichtes über die Theorie der algebraischen Zahlkörper den einfachsten Fall der hier bewiesenen Eigenschaft behandelt, insofern dort gezeigt wird, daß in bezug auf einen Körper, dessen Klassenzahl nicht durch die ungerade Primzahl l teilbar ist, auch kein unverzweigter Körper vom Relativgrad l existiert.

§ 1.

Wir erinnern zunächst kurz an die Bezeichnungen. Der Grundkörper sei k vom Grade m; unter seinen konjugierten mögen sich reelle befinden, nämlich die Körper $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(s)}$. Der Körper k kann selbst unter diesen Körpern enthalten sein. Die Anzahl der Grundeinheiten von k ist $m'-1$, wenn man $m' = \frac{m+s}{2}$ setzt. Bezeichnet man als Einheitenverband ein System von Einheiten, das durch Multiplikation einer festen Einheit mit den Quadraten aller Einheiten aus k entsteht, so existieren in k im ganzen $2^{m'}$ Einheitenverbände, unter ihnen m' unabhängige, die man mit Hülfe der $m'-1$ Grundeinheiten erhalten kann, indem man zu ihnen noch eine Einheitswurzel, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, hinzufügt.

Die Klassenzahl von k bei gewöhnlicher Aequivalenz sei $2^{h'}$, wobei wir wieder alle Klassen mit ungeradem Exponenten als Einheitselement der Klassengruppe ansehen. Zur Bildung des vollständigen Klassenkörpers ist, wie wir früher gesehen haben, die Einführung des schärferen Aequivalenzbegriffes notwendig, nach dem zwei Ideale dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient als total positive Körperzahl dargestellt werden kann. Die Klassenzahl von k bei schärferer Aequivalenz sei 2^{h}.

Um die Beziehung zwischen den beiden Klassenzahlen 2^{h} und $2^{h'}$ deutlich hervortreten zu lassen, führe ich den Begriff der „Vorzeichenreihe" ein. Ist α eine beliebige Zahl aus k und bezeichne ich die zu α konjugierte Zahl in $k^{(i)}$ mit $\alpha^{(i)}$, so soll die Reihe der Vorzeichen

$$1) \qquad \operatorname{sgn} \alpha^{(1)}, \ldots, \operatorname{sgn} \alpha^{(s)}$$

die zu α gehörige Vorzeichenreihe genannt und kurz mit R_α bezeichnet werden. Lasse ich in R_α die Zahl α alle Körperzahlen durchlaufen, so erhalte ich alle überhaupt möglichen Vorzeichenreihen von s Vorzeichen, also im ganzen 2^{s}. Diese Vorzeichenreihen bilden eine Gruppe, wenn man die Zusammensetzung zweier Reihen nach denselben Gesetzen vornimmt, die für die Vorzeichen

bei der Multiplikation relativer Zahlen gelten. Wir nennen sie die Vorzeichengruppe der Körperzahlen; ihr Grad $V(k)$ ist gleich 2^s.

Läßt man in R_α die Zahl α nur alle Einheiten des Körpers k durchlaufen, so wird man im allgemeinen nicht sämtliche möglichen Vorzeichenreihen erhalten. Wohl aber bilden alle diese Vorzeichenreihen wieder eine Gruppe, weil das Produkt zweier Einheiten wieder eine Einheit ist. Wir nennen diese Gruppe die Vorzeichengruppe der Einheiten von k; ihr Grad $V_\varepsilon(k)$ sei gleich 2^p, wo $p \leqq s$ ist.

Beachtet man nun, daß alle Zahlen α, deren Vorzeichenreihe in der Vorzeichengruppe der Einheiten vorkommt, durch Multiplikation mit einer Einheit in total positive Zahlen verwandelt werden können und darum in der Hauptklasse im engeren Sinne liegen, so folgt, daß

$$2^h = 2^{h'}.2^{(s-p)}, \text{ also } h = h' + (s-p)$$

ist. Setzt man $s-p = p'$, so giebt es demnach bei schärferer Aequivalenz $2^{p'}$ Klassen in k, die bei gewöhnlicher Aequivalenz in der Hauptklasse liegen würden.

Mit Rücksicht auf die vorstehenden Ausführungen kann man unter den Körpern $k^{(1)}, \dots k^{(s)}p$ in folgender Weise auswählen. Die genannte Vorzeichengruppe der Einheiten ist eine Abel'sche Gruppe vom Grad 2^p; jedes ihrer Elemente hat den Grad 2, weil das Quadrat jedes Elementes das Einheitselement ergiebt. Damit ist die Darstellung der Gruppe gegeben: man muß p Einheiten $\bar{\varepsilon}_1, \dots \bar{\varepsilon}_p$ so wählen können, daß

$$2) \qquad (R_{\bar{\varepsilon}_1})^{x_1} \dots (R_{\bar{\varepsilon}_p})^{x_p} \qquad (x_i = 0, 1)$$

die gesamte Vorzeichengruppe darstellt. Die Einheit $\bar{\varepsilon}_1$ nun ist sicher in einem der reellen Körper, etwa in $k^{(1)}$, negativ. Von den beiden Einheiten $\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_2$ ist die eine sicher in $k^{(1)}$ positiv und daher in einem der übrigen reellen Körper, etwa $k^{(2)}$, negativ; ich nenne diese Einheit ε_2 und setze außerdem $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$. Von den Einheiten $\varepsilon_1^{x_1}\varepsilon_2^{x_2}\bar{\varepsilon}_3\,(x = 0, 1)$ ist sicher eine in $k^{(1)}$ und $k^{(2)}$ positiv und daher in einem der übrigen reellen Körper, etwa in $k^{(3)}$, negativ; ich nenne diese Einheit ε_3. Ich kann in dieser Weise fortfahren und erhalte dadurch p Körper $k^{(1)}, \dots k^{(p)}$, wie ich sie auswählen wollte. Gleichzeitig erhalte ich ein System von p Einheiten $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_p$, wo ε_i durch die Bedingungen $\varepsilon_i^{(1)} > 0, \dots \varepsilon_i^{(i-1)} > 0$, $\varepsilon_i^{(i)} < 0$ charakterisiert ist. Die Wahl der Körper kann man über $k^{(p)}$ hinaus nicht fortsetzen, weil sonst der Grad der Vorzeichengruppe der Einheiten

größer als 2^p sein würde. Es folgt daraus, daß jede Einheit, deren konjugierte in $k^{(1)}, \dots k^{(p)}$ positiv sind, total positiv ist.

Das Einheitensystem $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_p$ wollen wir der bequemeren Darstellungsweise wegen noch etwas umformen. Indem wir statt ε_1 eine geeignete Einheit $\varepsilon_1 \varepsilon_2^{x'_2} \dots \varepsilon_p^{x'_p}$, statt ε_2 eine Einheit $\varepsilon_2 \varepsilon_3^{x''_3} \dots \varepsilon_p^{x''_p}$ u. s. w. wählen und die neuen Einheiten wieder der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p$ bezeichnen, können wir es erreichen, daß von den konjugierten von ε_i in den Körpern $k^{(1)}, \dots k^{(p)}$ nur $\varepsilon_i^{(i)}$ negativ wird, alle übrigen konjugierten aber positiv. Das Einheitensystem $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_p$ ist dann durch die folgenden Bedingungen charakterisiert:

3) $$\varepsilon_i^{(i)} < 0, \ \varepsilon_i^{(j)} > 0. \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \dots p \\ i \neq j \end{pmatrix}$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, daß man jede Einheit ε durch Multiplikation mit einer geeigneten Einheit des Systems $\varepsilon_1^{x_1} \dots \varepsilon_p^{x_p}$ in eine total positive Einheit verwandeln kann. Man muß demnach $m'-p$ total positive Einheiten $\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \dots \varepsilon_{m'}$ so wählen können, daß die Gesamtheit der Einheitenverbände in der Gestalt:

4) $$\varepsilon_1^{x_1} . \varepsilon_2^{x_2} \dots \varepsilon_p^{x_p} . \varepsilon_{p+1}^{x_{p+1}} \dots \varepsilon_{m'}^{x_{m'}} \xi^2 \qquad (x = 0, 1)$$

wo ξ alle Einheiten aus k durchläuft, darstellbar ist.

Das ausgewählte System der konjugierten Körper $k^{(1)}, \dots k^{(p)}$ besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß man, wenn man die Vorzeichenreihen sämtlicher Einheiten aus k nur in bezug auf diese Körper bildet, alle möglichen Vorzeichenreihen, nämlich 2^p, erhält. Die Wahl des Körpersystems ist nicht eindeutig; man wird im allgemeinen, wie schon die einfachsten Beispiele zeigen, mehrere solche Systeme wählen können, worauf es indessen im Folgenden nicht ankommt.

§ 2.

Das Klassensystem von k schreiben wir wie früher, wenn der engere Aequivalenzbegriff zugrunde gelegt wird, in der Gestalt:

1) $$c_1^{x_1} \dots c_e^{x_e} d_1^{y_1} \dots d_{e'}^{y_{e'}} \ (x_i = 0, 1, \dots 2^{h_i} - 1; y_i = 0, 1); \ h_1 + h_2 + \cdots h_e + e' = h.$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß bei dem Uebergang vom gewöhnlichen zum schärferen Aequivalenzbegriff erstens die neuen Klassen $d_1, \dots d_{e'}$ hinzutreten und zweitens die Klassen $c_1, \dots c_{e''}$ eine Verdoppelung ihres Grades erfahren. Es ist dann

$$e' + e'' = p'.$$

Bezeichnet man die Klassen

$$c^{2^{h_1 - 1}}, \dots c^{2^{h_{e''} - 1}}$$

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1907.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1907.

für das folgende sind in ω nur die Faktoren $\omega_1, \dots \omega_q$, von denen stets mindestens einer vorhanden sein muß, wenn ein Körper zweiter Art vorliegen soll. Für die Zahl ω gilt:

2) $$\omega^{(p+1)} < 0, \dots \omega^{(p+q)} < 0, \; \omega^{(p+q+1)} > 0, \dots \omega^{(\lambda)} > 0.$$

Unter den Zahlen $\omega^{(1)}, \dots \omega^{(p)}$ mögen n_1 negative sein, nämlich

3) $$\omega^{(u_1)} < 0, \dots \omega^{(u_{n_1})} < 0.$$

Die übrigen $r = p - n_1$ Zahlen sollen positiv sein, nämlich

4) $$\omega^{(v_1)} > 0, \dots \omega^{(v_r)} > 0.$$

Die Gesamtheit der negativen Zahlen unter den konjugierten von ω bezeichnen wir wie früher mit n, so daß

5) $$n_1 + q = n.$$

Unter Benutzung unserer früheren Bezeichnungen gilt nun:

6) $$v^* \geqq m' - n - e_1 + 1$$

7) $$v \geqq v^* + a - (e - e_1).$$

Die Zahl e_1 ist, woran erinnert sein möge, dadurch bestimmt, daß 2^{e_1} Klassen aus k bei gewöhnlicher Aequivalenz in K in die Hauptklasse in gewöhnlichem Sinne übergehen. Durch Addition von (6) und (7) folgt;

8) $$v \geqq m' - n + 1 + a - e.$$

Der Körper K gehört zu einer gewissen Untergruppe der Klassengruppe von k, die durch die Kongruenz:

9) $$\sum x + y_1 + y_2 + \cdots y_q \equiv 0 (2)$$

wo die x und y die Exponenten von (1) in § 2 bedeuten, definiert wird. Welche Exponenten x in $\sum x$ auftreten, hängt von der Wahl von $\bar{\omega}$ ab. Die Gesamtheit der Klassen d, die in der durch (9) charakterisierten Klassengruppe enthalten sind, bilden selbst eine Gruppe; man kann sie in folgender Weise darstellen:

10) $$(d_1 d_q)^{w_1} (d_2 d_q)^{w_2} \dots (d_{q-1} d_q)^{w_{q-1}} d_{q+1}^{w_{q+1}} \dots d_\varrho^{w_\varrho} \qquad (w = 0, 1),$$

Alle Einheiten nun, die Relativnormen von Zahlen aus K sind, müssen die folgenden Bedingungen befriedigen:

11) $$\left(\frac{\varepsilon, \omega}{1^{(u_1)}}\right) = 1, \dots \left(\frac{\varepsilon, \omega}{1^{(u_{n_1})}}\right) = 1.$$

Ich will zeigen, daß es $q - 1$ unabhängige Einheiten giebt, die, obwohl sie (11) befriedigen, doch nicht Relativnormen von Zahlen aus K sind. Ich wähle zu diesem Zweck eine Zahl aus K, deren

ist: [illegible]
Andererseits befriedigt [illegible]
den Zahlen [illegible] die Zahlen [illegible]
Indizes z von allen [illegible]
Relativnorm einer Zahl aus [illegible]
Festsetzung über die Einheiten [illegible]

15) [illegible]

setzen, damit $\eta_1 \alpha_1$ [illegible]
Bedingungen (11) befriedigt, [illegible]
norm einer Zahl aus [illegible]

In analoger Weise [illegible]
[illegible] ermitteln [illegible]

oder da $n_1 + q = n$ ist:

16) $$v \leqq m' - n + 1.$$

Vergleicht man (8) und (16), so folgt

17) $$a = e, \quad v = m' - n + 1.$$

Aus (6) ergiebt sich dann:

$$v^* = m' - n - e_1 + 1$$

und demnach ist auch

18) $$a = v - v^* + (e - e_1).$$

§ 4.

Auf Grund der Entwickelungen des vorigen Paragraphen können wir jetzt einen dem Satz der vorigen Mitteilung analogen Satz beweisen.

Satz 2. Es sei K_1 ein relativzyklischer Körper vom Relativgrad 2^{h_1} in bezug auf den Grundkörper k, der im Klassenkörper enthalten ist. Ist dann C eine Klasse aus K_1, deren Relativnorm in bezug auf k in der Hauptklasse von k im weiteren Sinne liegt, so ist C in K_1 der $S_1 - 1^{\text{ten}}$ Potenz einer Klasse im weiteren Sinne äquivalent. S_1 bedeutet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K_1 in bezug auf k.

Der Beweis ist ebenfalls analog wie in § 1 meiner vorigen Mitteilung zu führen. Es sei zunächst K_1 ein unverzweigter relativquadratischer Körper in bezug auf k. Es gilt dann für die Körper

erster Art	zweiter Art
$a = e - 1$	$a = e$
$v^* = m' - n - e_1 + 1$	$v^* = m' - n - e_1 + 1$
$v = m' - n$	$v = m' - n + 1$
$a = v - v^* + (e - e_1)$	$a = v - v^* + (e - e_1)$.

Aus den letzten Relationen für a, die für die Körper erster und zweiter Art identisch sind, folgt dann zunächst die Richtigkeit unseres Satzes, wenn wir für C eine Klasse c aus k, die also die Bedingung $c^2 \sim 1$ in k erfüllt, nehmen. Denn geht c in K_1 in die Hauptklasse über, so ist die Richtigkeit unseres Satzes selbstverständlich. Geht aber c in K nicht in die Hauptklasse über, so giebt es eine Klasse A eines ambigen Komplexes in K_1, so daß

$$c \sim A^{S_1 - 1} \text{ in } K_1$$

wird. Denn nach unseren Festsetzungen giebt es $e - e_1$ unabhängige

Klassen aus k, deren Quadrat in k in der Hauptklasse liegt und die in K_1 nicht in die Hauptklasse übergehen. Es handelt sich dabei immer um den gewöhnlichen Aequivalenzbegriff. Andererseits giebt es, wie aus der Gleichung $a = v - v^* + (e - e_1)$ folgt, genau $e - e_1$ unabhängige ambige Komplexe, die keine ambige Klasse enthalten. Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung in dem betrachteten Falle.

Ist C eine Klasse aus K_1, die der Bedingung

$$1) \qquad C^{S_1+1} \sim 1 \text{ in } k$$

genügt, aber nicht in k liegt, so kann man C in der Gestalt darstellen:

$$2) \qquad C = c' C_1^{F_1(S_1)} \dots C_a^{F_a(S_1)},$$

wo c' eine Klasse aus k und $C_1, \dots C_a$ gewisse Klassen aus K_1 sind, deren Relativnormen in k nicht in die Hauptklasse fallen. Die Zahl a hat den Wert $e-1$ oder e, je nachdem K_1 ein Körper von der ersten oder zweiten Art ist. Aus (1) und (2) folgt

$$3) \qquad 1 \sim c'^2 c_1^{F_1(1)} \dots c_a^{F_a(1)} \text{ in } k,$$

wenn $c_1, \dots c_a$ die Relativnormen von $C_1, \dots C_a$ in k bedeuten. Aus (3) ergiebt sich

$$4) \qquad F_1(1) \equiv 0(2) \dots F_a(1) \equiv 0(2).$$

Beachtet man nun, daß das Quadrat einer Klasse C aus K_1 sich immer als Produkt aus einer Klasse aus k und der symbolischen $S_1 - 1$ten Potenz einer Klasse aus K_1 darstellen läßt, nämlich

$$C^2 = C^{+(S_1+1)} C^{-(S_1-1)} = c . C^{-(S_1-1)},$$

so folgt aus (2) und (4), daß man setzen kann:

$$5) \qquad C = c\, C'^{(S_1-1)}$$

wo C' eine Klasse aus K_1 und c eine solche aus k bedeutet. Für c gilt nach (5) und (1)

$$c^2 \sim 1 \text{ in } k.$$

Daher ist c nach dem bereits Bewiesenen $(S_1 - 1)$te Potenz einer Klasse aus K_1; daraus folgt nach (5) dasselbe für C.

Die Ausdehnung unseres Beweises auf unverzweigte relativzyklische Körper vom Relativgrad 2^{h_1} erfolgt genau wie für ungerades l; ich begnüge mich daher mit dem Hinweis auf § 1 meiner ersten Mitteilung.

§ 5.

Der Beweis des Satzes 2 genügt noch nicht, um wie in der ersten Mitteilung zum Ziele zu gelangen; wir müssen vielmehr noch untersuchen, wie sich in den unverzweigten relativ quadratischen Körpern K in bezug auf k die Klassenzahlen bei der schärferen und bei der gewöhnlichen Aequivalenz verhalten. Es gilt in dieser Beziehung folgender Satz:

Satz 3. *Es sei K ein unverzweigter relativquadratischer Körper in bezug auf k. Haben dann $p' = s-p$ und e_1 die frühere Bedeutung, sind ferner unter den total positiven Einheiten in k 2^{z} Relativnormen von Einheiten aus K und gehen endlich 2^{f} Klassen aus k, die dort in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen, in K in die Hauptklasse im engeren Sinne über, so ist der Quotient der Klassenzahlen von K bei schärferer und gewöhnlicher Aequivalenz 2^{λ}, wo*

$$1) \qquad \lambda = 2s-p+e_1-1-f-(m'-z) \text{ ist.}$$

Um den Satz zu beweisen, leiten wir für λ eine obere und untere Grenze ab, deren gemeinsamer Wert dann den Wert von λ ergiebt. Wir erhalten zunächst eine untere Grenze auf folgendem Wege.

Das System der Einheitenverbände von k denken wir uns wie früher durch die unabhängigen Einheiten

$$2) \qquad \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \ldots \varepsilon_{m'}$$

repräsentiert, unter denen $\varepsilon_{p+1}, \ldots \varepsilon_{m'}$ total positiv sind. Diese sind sämtlich Relativnormen von Zahlen aus K, wie aus § 3 folgt. Außer den total positiven Einheiten befriedigt noch das System

$$3) \qquad \varepsilon_{v_1}^{w_1} \ldots \varepsilon_{v_r}^{w_r} (w = 0, 1),\ r = p - n_1$$

wo die Indizes v dieselben wie in (4) in § 3 sind, die Bedingungen 11 in § 3. In dem System sind aber nur, wie ebenfalls im § 3 gezeigt ist, $2^{r-(s-1)} = 2^{p-n+1}$ Einheiten Relativnormen von Zahlen aus K, wenn K ein Körper zweiter Art ist; für Körper erster Art ist die Anzahl 2^{p-n}. Ferner ergiebt sich, da 2^{z} total positive Einheiten Relativnormen von Einheiten aus K sind, daß 2^{v^*-z} Einheiten des Systems (3) ebenfalls Relativnormen von Einheiten aus K sind, da es im ganzen 2^{v^*} solche Einheiten giebt.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß man unter den Einheiten in k, die Relativnormen von Zahlen aus K sind, $u = v-v^*-(m'-p-z)$

Einheiten $\vartheta_1, \dots \vartheta_u$ derartig bestimmen kann, daß der Ausdruck:

$$4) \qquad \vartheta_1^{x_1} \dots \vartheta_u^{x_u} \varepsilon$$

außer für $x_1 \equiv \cdots x_u \equiv 0\,(2)$ keine Einheiten enthält, die total positiv oder Relativnormen von Einheiten aus K wären; ε bedeutet dabei eine beliebige Einheit, die Relativnorm einer Einheit aus K ist.

Da $\vartheta_1, \dots \vartheta_u$ Relativnormen von gebrochenen Zahlen aus K sind, kann man setzen:

$$5) \qquad \vartheta_i = A_i^{1+S} \qquad (i = 1, \dots u),$$

wo die A_i gebrochene Zahlen aus K sind und S die Substitution $\sqrt{\omega} \mid -\sqrt{\omega}$ bedeutet.

Es seien nun A_i die Klassen in K, in denen die Zahlen A_i bei Zugrundelegung des schärferen Aequivalenzbegriffes liegen. Es liefert dann das Klassensystem

$$6) \qquad A_1^{x_1} \dots A_u^{x_u} \qquad (x = 0, 1)$$

nur für $x_1 = \cdots x_u = 0$ die Hauptklasse im engeren Sinne. Denn soll die Zahl $A = A_1^{x_1} \dots A_u^{x_u}$ in der Hauptklasse im engeren Sinne liegen, so muß es eine Einheit H in K geben, sodaß HA total positiv in K ist. Es muß dann auch die Relativnorm von HA in k total positiv sein, d. h. wenn man

$$H^{1+S} = \varepsilon$$

setzt, so muß $\vartheta_1^{x_1} \dots \vartheta_u^{x_u} \varepsilon$ eine total positive Einheit in k sein. Nach (4) ist das nur möglich, wenn $x_1 \equiv \cdots x_u \equiv 0\,(2)$.

Das System der Klassen, die in k in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen, haben wir in § 2 in der Gestalt:

$$7) \qquad c_1^{*x_1} \dots c_{e'}^{*x_{e'}} d_1^{y_1} \dots d_e^{y_e} \qquad (x, y = 0, 1)$$

geschrieben. Von diesen sollen 2^f in K in die Hauptklasse im engeren Sinne übergehen. Es mag dann vom System (7) in K das folgende Klassensystem bleiben:

$$8) \qquad c_1'^{u_1} \dots c_{e'-f''}'^{u_{e'-f''}} d_1'^{v_1} \dots d_{e-f'}'^{v_{e-f'}}. \qquad (f'' + f' = f)$$

Ferner bezeichne ich Klassen aus K_1, deren Relativnormen bei schärferer Aequivalenz resp. in $c_1^*, \dots c_{e'}^*$ fallen, mit $C_1^*, \dots C_{e'}^*$ und mit $D_1, \dots D_b$ solche b unabhängige Klassen aus K, deren Relativnormen in eine Klasse des Systems der Klassen d in (7) fallen.

[illegible]

[illegible] Klassen in K in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen. Ich behaupte, daß keine Klasse des Systems außer wenn sämtliche Exponenten Null sind, in der Hauptklasse von K im engeren Sinne liegt. Denn wenn eine Klasse aus [illegible] in der Hauptklasse im engeren Sinne liegen soll, so muß auch ihre Relativnorm in k in der Hauptklasse im engeren Sinne liegen. Daraus folgt, daß die sämtlichen Exponenten y und z Null sein müssen.

Bedeutet nun A eine beliebige Klasse des Systems $A_1^{x_1} \ldots A_r^{x_r}$ und c eine beliebige Klasse aus K, die bereits in k liegt, so folgt weiter, daß die Aequivalenz

$$(10) \qquad Ac \simeq 1 \text{ in } K$$

nur bestehen kann, wenn gleichzeitig

$$(11) \qquad A \simeq 1 \text{ und } c \simeq 1 \text{ in } K$$

gilt. Denn ist A eine Zahl aus A, die wir so annehmen können, daß die Relativnorm von A in k eine Einheit liefert, und ist γ eine Zahl aus k, die in c liegt, so muß man zufolge (10) eine Ein-

heit H in K bestimmen können, so daß $HA\gamma$ in K total positiv ist. Es muß dann auch die Relativnorm von $HA\gamma$ und folglich auch die von HA in k total positiv sein. Das ist nach der Wahl der Klassen A nur möglich, wenn $A \simeq 1$ in K ist. Es folgt also aus (10) immer (11) und damit ist unsere obige Behauptung über das System (9) bewiesen.

Das System (9) enthält demnach:

$$12)\qquad 2^{u+b+e'+p'-f}$$

verschiedene Klassen. Setzt man die oben für u und b angegebenen Werte ein, so findet man für den Exponenten in (12) bei den Körpern beider Art: $2p'+e_1-f-(m'-z)$. Es gilt demnach für den in Satz 3 eingeführten Exponenten λ:

$$13)\qquad \lambda \geqq 2s-p+(e_1-1)-f-(m'-z).$$

Wir haben jetzt zweitens eine obere Grenze für λ zu ermitteln, indem wir eine untere Grenze für den Grad der Vorzeichengruppe der Einheiten von K bestimmen. Von den Einheiten des Systems:

$$14)\qquad \varepsilon_{v_1}^{w_1}\dots\varepsilon_{v_r}^{w_r} \qquad (w=0,1),\qquad r=p-n_1$$

sind genau $2^{z'}=2^{v^*-z}$ Relativnormen von Einheiten aus K (vgl. (3) in § 5). Ich kann daher z' unabhängige Einheiten $H_1,\dots H_{z'}$, in K wählen, deren Relativnormen in das System (14) fallen. Schreibe ich dann das Einheitensystem:

$$15)\qquad H_1^{t_1}\dots H_{z'}^{t_{z'}}.\varepsilon_{v_1}^{w_1}\dots\varepsilon_{v_r}^{w_r} \qquad (t,w=0,1)$$

auf, so folgt aus den Eigenschaften der Einheiten $\varepsilon_{v_1},\dots\varepsilon_{v_r}$, daß das System (15) außer 1 keine total positive Einheit in K enthält.

Es sollten nun weiter 2^f Klassen, die in k in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen, in K in die Hauptklasse im engeren Sinne übergehen; es mögen $\delta_1,\dots\delta_f$ normierte Zahlen aus f unabhängigen Klassen der genannten Art sein. Ich muß dann f Einheiten $E_1,\dots E_f$ in K wählen können, so daß $E_i\delta_i$ $(i=1,2,\dots f)$ total positiv in K werden.

Diese Einheiten E_i füge ich dem System (15) hinzu:

$$16)\qquad H_1^{t_1}\dots H_{z'}^{t_{z'}}\varepsilon_{v_1}^{w_1}\dots\varepsilon_{v_r}^{w_r}E_1^{s_1}\dots E_f^{s_f} \qquad (t,w,s=0,1)$$

und untersuche, wieviel total positive Einheiten in dem System (16) vorkommen können.

Damit eine Einheit des Systems (16) total positiv sei, müssen zunächst die sämtlichen Exponenten z gleich Null sein, wie man durch Bildung der Relativnorm in bezug auf k findet, denn die Einheiten E_i haben total positive Relativnormen in k. Es kann also nur eine Einheit der Gestalt εE, wo

$$(17) \qquad \varepsilon = \varepsilon_{r_1}^{w_1} \ldots \varepsilon_{r_\nu}^{w_\nu}, \quad E = E_1^{s_1} \ldots E_r^{s_r}$$

ist, in (16) total positiv sein. Wenn aber εE total positiv ist, so muß dann auch $\varepsilon\vartheta$, wo

$$(18) \qquad \vartheta = \vartheta_1^{s_1} \ldots \vartheta_r^{s_r}$$

ist, total positiv sein, folglich

$$(19) \qquad \varepsilon\vartheta^{(r_1)} > 0, \ldots \varepsilon\vartheta^{(r_\nu)} > 0.$$

Da nun die Zahlen ϑ in k normiert sein sollten, so muß

$$(20) \qquad \vartheta^{(r_1)} > 0, \ldots \vartheta^{(r_\nu)} > 0$$

sein. Aus (19) und (20) folgt dann

$$\varepsilon^{(r_1)} > 0, \ldots \varepsilon^{(r_\nu)} > 0;$$

es muß deshalb in (17) $w_1 = \ldots w_\nu = 0$, also $\varepsilon = 1$ sein. Es muß daher E und demnach auch ϑ total positiv in K sein, folglich:

$$(21) \qquad \vartheta^{(\ldots)} > 0, \ldots \vartheta^{(\ldots)} > 0.$$

Die Bedingungen (21) können nur für [illegible] unabhängige Klassen, die in k in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen, erfüllt werden. Denn es gibt im ganzen [illegible] unabhängige derartige Klassen, von diesen fallen [illegible] die den Bedingungen (21) nicht genügen, fort; es bleiben also [illegible]. Daraus folgt, daß in dem Einheitensystem (16) höchstens [illegible] total positive Einheiten vorhanden sein können. Der Grad der Vorzeichengruppe der Einheiten von K ist daher größer oder gleich

$$2^{[illegible]} = 2^{[illegible]}.$$

Setzt man für [illegible] seinen Wert an und beachtet, daß [illegible] [illegible] Körper unter den konjugierten von K auftreten, so ergibt sich

$$(22) \qquad [illegible] = 2^{[illegible]}$$

Aus (15) und (22) folgt dann

$$(23) \qquad [illegible] = 2^{[illegible]}$$

Es stellt demnach das System (9) in K alle Klassen dar, die in K in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegen.

§ 6.

Auf Grund der Entwickelungen des letzten Paragraphen können wir einen dem Satz 2 analogen Satz beweisen, bei dem aber der schärfere Aequivalenzbegriff zugrunde liegt.

Satz 4: Ist K ein unverzweigter relativzyklischer, im Klassenkörper enthaltener Körper vom Relativgrad 2^h in bezug auf den Grundkörper k und ist C eine Klasse aus K, deren Relativnorm in k in der Hauptklasse im engeren Sinne liegt, so ist C der $(S-1)$-ten Potenz einer Klasse aus K im engeren Sinne äquivalent. S bedeutet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k.

Indem wir wieder die beiden Zeichen $\sim$ und $\simeq$ zur Bezeichnung der gewöhnlichen und der schärferen Aequivalenz benutzen, können wir die Voraussetzung für C, indem wir zunächst $h = 1$ annehmen, in der Gestalt:

1) $$C^{S+1} \simeq 1 \text{ in } k$$

schreiben. Da demnach auch $C^{S+1} \sim 1$ in k ist, muß es nach Satz 2 eine Klasse C' in K geben, so daß

2) $$C \sim C'^{S-1} \text{ in } K.$$

Folglich gilt auch

3) $$C \simeq C'^{S-1} . A \text{ in } K,$$

wo A eine Klasse aus K bedeutet, die in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegt. Aus (3) und (1) folgt:

4) $$A^{S+1} \simeq 1 \text{ in } k.$$

Da A in K in der Hauptklasse im weiteren Sinne liegt, muß A eine Klasse des Systems (9) des vorigen Paragraphen sein. Dabei müssen dann aber sämtliche Exponenten y und z gleich Null sein, weil nach (4) die Relativnorm von A in k in der Hauptklasse im engeren Sinne liegt, was von den Relativnormen der Klassen D_i, C_i nicht gilt. Ferner können wir auch die Exponenten u Null setzen, weil die Klassen c_i' in dem System (9) von § 5 die Forderung unseres Satzes erfüllen, nämlich der $(S-1)$-ten Potenz einer Klasse aus K im engeren Sinne äquivalent sind. Denn es giebt Klassen C_i' in K, die in der Hauptklasse im weiteren Sinne

liegen und für die Aequivalenz

$$C_i'^{S+1} \simeq c_i' \text{ in } k \tag{5}$$

gilt. Da nun $C_i'^{S}$ in der Hauptklasse im engeren Sinne liegt, folgt aus (5)

$$C_i'^{S-1} \simeq c_i' \text{ in } K.$$

Wir können demnach die Klasse A in der Gestalt ansetzen:

$$A_1^{x_1} \dots A_u^{x_u} d_1'^{v_1} \dots d_g'^{v_g}, \tag{6}$$

wo die Klassen A_i, d_i' dieselbe Bedeutung wie in (9) in § 5 haben, es ist nur statt des Index $e'' - f''$ hier kürzer g geschrieben. Wir wollen zeigen, daß alle Klassen aus 6), wenn wir darin den x, v beliebige Werte 0, 1 beilegen, $(S-1)$ten Potenzen von Klassen aus K im engeren Sinne äquivalent sind. Die Klassen A_i zunächst enthalten ihrer Entstehung nach Zahlen A_i aus K, deren Relativnormen in k Einheiten sind. Es giebt demnach Ideale $\mathfrak{J}_i$ in K, so daß

$$A_i = \mathfrak{J}_i^{S-1} \tag{7}$$

ist. Liegt nun $\mathfrak{J}_i$ in der Klasse B_i von K bei schärferer Aequivalenz, so gilt:

$$A_i \simeq B_i^{S-1}$$

Damit ist für die Klassen $A_1, \dots A_u$ die Richtigkeit unseres Satzes gezeigt. Um auch die Klassen $d_1', \dots d_g'$ zu erledigen, bemerken wir, daß wir diejenigen Klassen der Hauptklasse im weiteren Sinne in k, die nicht l-te Potenzen von Klassen sind, früher mit

$$d_1^{y_1} \dots d_{e'}^{y_{e'}}$$

bezeichnet haben. Setzen wir $K = (k, \sqrt{\omega})$ und nehmen für ω die frühere Gestalt (1) in § 3 an:

$$\omega = \bar{\omega} \,.\, \omega_1 \dots \omega_q$$

so folgt, daß die Klassen $d_1, \dots d_q$ in K in die Hauptklasse im engeren Sinne übergehen. Denn bedeutet z. B. δ_1 eine normierte Zahl aus d_1, so ist nach unseren früheren Festsetzungen unter den reellen konjugierten von δ_1 nur $\delta_1^{(1)}$ negativ (vgl. (3) in § 2). Da nun der Körper $K^{(1)}$ ein imaginärer ist, weil $\omega^{(1)} < 0$ ist, so folgt, daß δ_1 eine total positive Zahl in K ist. Analoges gilt für $\delta_2, \dots \delta_q$. Wir haben demnach

$$d_1 \simeq 1, \dots d_q \simeq 1 \text{ in } K.$$

Es brauchen also nur noch die Klassen $d_{\varrho+1}, \dots d_{\varrho'}$, betrachtet zu werden. Ist aber d_ι eine beliebige dieser Klassen, so giebt es, wie aus der Definition der zu ω gehörigen Klassengruppe in k folgt, in der Hauptklasse im weiteren Sinne in K eine Klasse D_ι, so daß

$$D_\iota^{s+1} \simeq d_\iota \text{ in } k. \tag{8}$$

Da D_ι^s in der Hauptklasse von K im engeren Sinne liegt, folgt aus (8)

$$D_\iota^{s-1} \simeq d_\iota \text{ in } K.$$

Hiermit ist der aufgestellte Satz für den Fall $h = 1$ bewiesen; die Ausdehnung auf beliebiges h erfolgt analog wie im § 1 meiner ersten Mitteilung.

§ 7.

Mit Hülfe der Sätze 2 und 4 können wir jetzt zum gewünschten Ziele gelangen. Um den Gang der Ueberlegungen nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich noch folgenden Hülfssatz vorweg:

Hülfssatz. Es sei G eine Untergruppe der Klassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers k, deren komplementäre Gruppe zyklisch vom Grade p^h ist, wo p eine beliebige Primzahl bedeutet. Existiert dann keine Untergruppe G' von G, deren komplementäre Gruppe zyklisch vom Grade p^{h+1} ist, so giebt es eine Klasse c in k mit der Eigenschaft

$$c^{p^h} \sim 1,$$

so daß sich die gesamte Klassengruppe von k in der Gestalt

$$c^x \cdot G \quad (x = 0, 1, \dots p^h - 1)$$

schreiben läßt.

Der Satz gilt für beliebige Abel'sche Gruppen und läßt sich durch einfache gruppentheoretische Ueberlegungen beweisen. Betrachte ich alle Klassen in k, deren Grad zu p prim ist, als Einheitselement, so kann man die Klassengruppe von k schreiben:

$$c_1^{x_1} \dots c_\varepsilon^{x_\varepsilon} \quad (x_\iota = 0, 1, \dots p^{h_\iota} - 1).$$

Dabei denke ich mir das Klassensystem $c_1, \dots c_\varepsilon$ so geordnet, daß $h_\iota \leqq h_{\iota-1}$ ist. Es läßt sich dann eine Untergruppe G der Klassengruppe, deren komplementäre Gruppe zyklisch vom Grade p^h ist,

durch eine Kongruenz:

1) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_s x_s \equiv 0 \ (p^h)$$

definieren. Ist a_f der erste nicht durch p teilbare Koeffizient, so muß die Klasse c_f genau vom Grade p^h sein. Denn wäre ihr Grad größer, so könnte man die Kongruenz (1) modulo p^{h+1} ansetzen und erhielte dadurch eine Untergruppe G' von G, deren komplementäre Gruppe zyklisch vom Grade p^{h+1} wäre. Wäre aber der Grad von c_f kleiner als p^h, so würde (1) überhaupt keine Gruppe definieren, deren komplementäre Gruppe zyklisch vom Grade p^h ist. Denn da die Grade aller auf c_f folgenden Klassen ebenfalls kleiner als p^h wären, so kämen für alle Unbestimmten $x_f, \ldots x_s$ höchstens die Reste modulo p^{h-1} in Frage. Aus dem Vorstehenden folgt, daß c_f vom Grade p^h sein muß; man kann daher die Klasse c_f als Klasse c des Hülfssatzes für die Gruppe G benutzen.

Wir beweisen jetzt, daß der umfassendste relativ Abelsche unverzweigte Körper, dessen Relativgrad eine Potenz von 2 ist, inbezug auf einen Körper k gleich 2^h ist, wenn die Klassenzahl von k bei schärferer Aequivalenz genau durch 2^h teilbar ist. Wir bezeichnen diesen Körper, wie wir ihn früher konstruiert haben, mit K. Soll dann noch ein umfassenderer relativ Abel'scher unverzweigter Körper, dessen Relativgrad eine Potenz von 2 ist, existieren, so können wir annehmen, daß er K enthält, da wir K zu ihm adjungieren können. Es folgt dann, daß, wenn K nicht der umfassendste Körper der angegebenen Art ist, notwendig ein Körper K' existieren muß, der relativ quadratisch in bezug auf K und relativ Abel'sch und unverzweigt in bezug auf k ist. Bezeichnen wir die Relativgruppen von K' und K in bezug auf k resp. mit Γ' und Γ, so muß, wenn wir mit T eine gewisse Substitution bezeichnen,

$$\Gamma' = T^x \Gamma \quad (x = 0, 1)$$

gelten. Γ ist eine Untergruppe von Γ', deren komplementäre Gruppe vom Grade 2 ist. Wir bestimmen nun eine Untergruppe Γ_1 von Γ, deren komplementäre Gruppe in bezug auf Γ' zyklisch vom Grade 2^{h_1+1} ist, derart daß keine Untergruppe mit umfassenderer zyklischer Komplementärgruppe existiert. Es muß dann nach unserem Hülfssatz eine Substitution S_1 geben, so daß

1) $$\Gamma' = S_1^x \Gamma_1 \quad (x = 0, 1, \ldots 2^{h_1+1} - 1)$$

2) $$\Gamma = S_1^{2x} \Gamma_1 \quad (x = 0, 1, \ldots 2^{h_1} - 1)$$

und

3) $$S_1^{2^{h_1+1}} = 1.$$

Der zu Γ_1 gehörige im Körper K enthaltene Unterkörper $K^{(h_1)}$ ist dann relativ zyklisch vom Relativgrad 2^{h_1} in bezug k. Die Klassengruppe G in k, zu der $K^{(h_1)}$ gehört, besitzt dann eine zyklische Komplementärgruppe vom Grade 2^{h_1} und wir können daher nach unserem Hülfssatz die Klassengruppe von k in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} G \qquad (x_1 = 0, 1, \ldots 2^{h_1} - 1)$$

schreiben, wo c_1 eine Klasse mit der Aequivalenzeigenschaft:

4) $$c_1^{2^{h_1}} \simeq 1 \text{ in } k$$

ist. Indem wir die Gruppe G ebenfalls durch eine Basis dargestellt denken und dabei alle Klassen mit ungeradem Grade als Einheitselement nehmen, schreiben wir das Klassensystem von k:

5) $$c_1^{x_1} \ldots c_t^{x_t} \qquad (x_i = 0, 1, \ldots 2^{h_i} - 1).$$

Es gilt der schärfere Aequivalenzbegriff; wir haben aber die früher unterschiedenen Klassen c und d jetzt in der Bezeichnung nicht mehr unterschieden, weil es für das Folgende nicht notwendig ist.

Der Körper $K^{(h_1)}$ gehört zu der durch die Kongruenz

6) $$x_1 \equiv 0 \ (2^{h_1})$$

charakterisierten Untergruppe von (5). Der oben genannte Körper K' besitzt in bezug auf k die Gruppe Γ'; wir bezeichen den in ihm enthaltenen Unterkörper, der zur Gruppe Γ_1 gehört, mit $K^{(h_1+1)}$. Der letzte ist dann relativ zyklisch vom Relativgrad 2^{h_1+1} in bezug auf k und enthält $K^{(h_1)}$ als Unterkörper. Wir haben nachzuweisen, daß ein Körper von der Art des Körpers $K^{(h_1+1)}$ nicht existieren kann.

Das Klassensystem von $K^{(h_1)}$ können wir in der Gestalt darstellen:

7) $$C_2^{x_2} \ldots C_t^{x_t} B_1^{y_1} \ldots B_f^{y_f} C^z \qquad (x, y = 0, 1),$$

wo $B_1, \ldots B_f$ Klassen bedeuten, deren Relativnormen in k in der Hauptklasse im engeren Sinne liegen. Die Relativnormen von $C_2, \ldots C_t$ fallen in k in die Klassen $c_2, \ldots c_t$ und C durchläuft alle

Klassen aus $K^{(h_1)}$. Denn ist C^* eine beliebige Klasse aus $K^{(h_1)}$, so muß ihre Relativnorm in bezug auf k von der Gestalt

$$c_2^{z_2} \dots c_e^{z_e}$$

sein, weil $K^{(h_1)}$ zu der durch (6) definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Es fällt also die Relativnorm von $C^* C_2^{-z_2} \dots C_e^{-z_e}$ in k in die Hauptklasse im engeren Sinne und damit ist die Möglichkeit der Darstellung des Klassensystems von $K^{(h_1)}$ durch (7) dargetan.

Ein unverzweigter relativquadratischer Körper in bezug auf $K^{(h_1)}$ läßt sich deshalb durch die Kongruenz:

$$8)\qquad a_2 x_2 + \cdots a_e x_e + b_1 y_1 + \cdots b_f y_f \equiv 0\,(2)$$

charakterisieren, wo x_i, y_i die Exponenten in (7) bedeuten. Ich zeige nun zunächst, daß die zu den Kongruenzen $y_i \equiv 0\,(2)$ gehörigen Körper keine relativ Galois'schen in bezug auf k sind, indem ich als Beispiel den zu $y_1 \equiv 0\,(2)$ gehörigen Körper $\overline{K}$ wähle. Das Klassensystem von $K^{(h_1)}$ können wir mit Rücksicht auf $\overline{K}$ in die Gestalt

$$9)\qquad B_1^{y_1}\,\overline{G} \qquad (y_1 = 0, 1)$$

setzen, wo $\overline{G}$ die Gruppe ist, zu der $\overline{K}$ gehört. Soll dann $\overline{K}$ relativ Galois'sch in bezug auf k sein, so muß, wenn S eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von $K^{(h_1)}$ in bezug auf k bedeutet,

$$10)\qquad S\overline{G} = \overline{G}$$

gelten. $\overline{G}$ muß dann, wie man ganz analog wie in meiner ersten Mitteilung beweist, alle Klassen enthalten, die $(S-1)$-te Potenzen von Klassen sind.

Da die Relativnorm von B_1 in k in der Hauptklasse im engeren Sinne liegt, ist nach Satz 4 B_1 der $(S-1)$-ten Potenz einer Klasse aus $K^{(h_1)}$ im engeren Sinne äquivalent und müßte daher selbst in $\overline{G}$ liegen, was zu einem Widerspruch führt.

Auch diejenigen Körper, die zu Kongruenzen gehören, in denen x und y gleichzeitig auftreten, können nicht relativ Galois'sch in bezug auf k sein. Denn wäre z. B. der zur Kongruenz

$$a_2 x_2 + b_1 y_1 \equiv 0\,(2)$$

gehörige Körper K^* relativ Galois'sch in bezug auf k, so wäre er

auch relativ Galois'sch in bezug auf den Körper $K_2 = (k, \sqrt{\omega_2})$, der zur Kongruenz $x_2 \equiv 0\,(2)$ gehört. Dieselben Ueberlegungen wie oben führen dann zu einem Widerspruch.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß die einzigen unverzweigten relativquadratischen Körper in bezug auf $K^{(h_1)}$, die relativ Galois'sch in bezug auf k sind, durch eine Kongruenz

$$11)\qquad a_2 x_2 + \cdots a_t x_t \equiv 0\,(2)$$

definiert werden, wo die x_i die Exponenten aus (7) bedeuten. Diese Körper können aber nicht relativzyklisch in bezug k sein. Denn sie lassen sich auch durch Adjunktion von $\sqrt{\omega}$ zu $K^{(h_1)}$ erzeugen, wo ω eine solche Zahl aus k bedeutet, daß der Körper $(k, \sqrt{\omega})$ zu der durch (11) definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, wo die x_i die Exponenten aus (5) bedeuten.

Hiermit ist nachgewiesen, daß ein Körper von der Art des Körpers $K^{(h_1+1)}$ nicht existieren kann, und dadurch ist bewiesen, daß in bezug auf einen Körper k, dessen Klassenzahl bei schärferer Aequivalenz genau durch 2^h teilbar ist, kein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad 2^{h+1} existiert.

§ 8.

Auf Grund der Entwickelungen dieser und der ersten Mitteilung können wir jetzt leicht beweisen, daß der Klassenkörper der umfassendste relativ Abel'sche unverzweigte Körper in bezug auf einen gegebenen Grundkörper ist. Es sei k der Grundkörper und Kk der zugehörige Klassenkörper. Wäre nun K' ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper in bezug auf k, der nicht in Kk enthalten ist, so können wir annehmen, daß er Kk enthält, indem wir Kk zu ihm adjungieren.

Es läßt sich dann zunächst zeigen, daß der Relativgrad von K' in bezug auf k nicht durch eine Primzahl teilbar sein kann, die nicht in der Klassenzahl von k aufgeht. Denn wäre l eine solche Primzahl, so würde folgen, daß in bezug auf k ein unverzweigter relativzyklischer Körper vom Relativgrad l existieren müßte, obwohl die Klassenzahl von k nicht durch l teilbar ist. Das ist unmöglich; denn ist l ungerade, so gilt, wie wir früher gezeigt und mit Benutzung der früheren Bezeichnungen, für jeden relativzyklischen Körper vom Relativgrad l in bezug auf k:

$$1)\qquad a^* \leq t + r^* - m' - 1 + e_1.$$

Ist die Klassenzahl von k zu l prim, so ist $e_1 = 0$; daher folgt aus (1)

$$v^* \geqq m' + 1 + a^* - t. \tag{2}$$

Da nun v^* nicht größer als m' sein kann, muß notwendig $t = 1$ sein, d. h. es muß mindestens ein Primideal in der Relativdiskriminante aufgehen und der betrachtete Körper könnte daher nicht unverzweigt sein. Ist $l = 2$ so gilt:

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + n + e_1. \tag{3}$$

Wäre nun die Klassenzahl von k auch bei schärferer Aequivalenz ungerade, so wäre $e_1 = 0$ und $n = 0$. Es würde daher folgen:

$$v^* \geqq m' + 1 + a^* - t,$$

daher wieder $t \geqq 1$, woraus sich die Verzweigtheit des betrachteten Körpers ergäbe.

Der Körper K' könnte also nur dadurch umfassender als Kk sein, daß es eine Primzahl l_1 giebt, die zu einer höheren Potenz im Relativgrade von K' in bezug auf k als in der Klassenzahl von k aufgeht. Es sei also etwa der Relativgrad von K' genau durch $l_1^{h_1'}$ und der von Kk genau durch $l_1^{h_1}$ teilbar und $h_1' > h_1$. Es müßte dann in bezug auf k ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad $l_1^{h_1'}$ existieren, während die Klassenzahl von k nur durch $l_1^{h_1}$ teilbar wäre. Das ist unmöglich, wie wir in der ersten Mitteilung für ungerades l_1 und in dieser Mitteilung für $l_1 = 2$ nachgewiesen haben.

Wir können daher folgenden Schlußsatz aussprechen:

Schlußsatz: **Ist k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und K ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper in bezug auf k, so ist K im Klassenkörper von k enthalten.**

Über einen Konvergenzsatz.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 12. Januar 1907.

Die Herren Hellinger und Töplitz haben auf S. 353 ihrer Arbeit „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen" im Jahrgang 1906 dieser Nachrichten den Satz mitgeteilt:

Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver Größen; die unendliche Reihe

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

konvergiere für alle Systeme positiver Größen x_1, $x_2, \ldots$, für welche

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 1$$

ist. Dann liegt die Linearform L für alle jene Systeme $x_1, x_2, \ldots$ unterhalb einer endlichen Schranke; es ist nämlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$$

konvergent und

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}.$$

Indem ich mir einen Beweis für diesen Satz zurechtlegte, fand ich folgende Verallgemeinerung, welche vielleicht für die Zwecke der Herren Hellinger und Töplitz nützlich sein kann, und in welcher der obige Hilfssatz als Spezialfall $p = 2$ enthalten ist.

Es sei p eine reelle Größe >1,

$$a_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

die unendliche Reihe

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

sei für alle Systeme positiver Größen $x_i (i = 1, 2, \ldots)$ konvergent, für welche

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p = 1$$

ist. Dann liegt L für alle jene Systeme x_i unterhalb einer endlichen Schranke, und zwar ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \tag{1}$$

konvergent und

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2}$$

Zum Beweise ist offenbar nur erforderlich, die Konvergenz der Reihe (1) zu zeigen; denn nach der bekannten Relation [1])

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

folgt daraus

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^p < \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1},$$

also

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1}$$

und damit (2).

---

1) Vergl. z. B. Hölder, „über einen Mittelwertsatz", diese Nachrichten, 1889, S. 44; Pringsheim, „zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen", Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. 32, 1902, S. 174; Jensen, „sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes", Acta mathematica, Bd. 30, 1906, S. 181.

Gesetzt nun, die Reihe (1) wäre divergent, so setze ich

$$M_0 = 0,$$
$$M_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{p}{p-1}} \qquad (n \geqq 1).$$

Dann wären die M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Größen; also wäre nach einem bekannten Satz von Herrn Dini[1])

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i - M_{i-1}}{M_i}$$

divergent und nach einem bekannten Abel-Dini'schen Satze[2])

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i - M_{i-1}}{M_i^p}$$

konvergent. Ich setze nun

$$x_i = \lambda \frac{a_i^{\frac{1}{p-1}}}{a_1^{\frac{p}{p-1}} + \cdots + a_i^{\frac{p}{p-1}}} = \lambda \frac{\sqrt[p]{M_i - M_{i-1}}}{M_i},$$

wo

$$\frac{1}{\lambda} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i - M_{i-1}}{M_i^p}}$$

ist. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p = \lambda^p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i - M_{i-1}}{M_i^p}$$

konvergent und $= 1$, aber

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^{\frac{p}{p-1}}}{a_1^{\frac{p}{p-1}} + \cdots + a_i^{\frac{p}{p-1}}} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i - M_{i-1}}{M_i}$$

divergent, gegen die Voraussetzung.

Damit ist der Satz bewiesen.

Berlin, den 6. Dezember 190[illegible].

---

1) Vergl. z. B. S. 85 in Herrn Pringsheims Artikel „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse", Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, 1898—1904.

2) Vergl. den in Anm. 1 angeführten Art.

Ueber den allgemeinsten Begriff der ebenen stetigen Kurve.

Von

A. Schoenflies.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 12. Januar 1907.

In einem auf der Stuttgarter Versammlung gehaltenen Vortrag habe ich die gestaltlichen Eigenschaften derjenigen Punktmengen angegeben, die analytisch durch zwei für $0 \leqq s \leqq 1$ stetige Funktionen

$$x = f(s), \quad y = \varphi(s)$$

dargestellt werden, und damit den allgemeinsten stetigen ebenen Kurvenbegriff liefern. Es ist zunächst klar, daß diese Punktmengen geschränkt, perfekt und zusammenhängend sein müssen. Als weitere notwendige und hinreichende Eigenschaft habe ich die Erreichbarkeit bezeichnet, die folgende Bedeutung hat. Ist J irgend ein Gebiet derjenigen Gebietsteilung, die durch die Punktmenge $\mathfrak{T}$ bewirkt wird, und t ein Punkt von $\mathfrak{T}$, der zur Grenze von J gehört, so muß man jeden inneren Punkt m von J mit t durch einen einfachen in J verlaufenden Weg verbinden können[1]). Insbesondere soll t für das Gebiet J allseitig erreichbar heißen, wenn die genannte Eigenschaft auch für jedes Teilgebiet von J erfüllt ist, zu dessen Grenze t gehört.

Dieser Satz soll zunächst für den Fall, daß die Ebene durch die Menge $\mathfrak{T}$ in eine endliche Zahl von Gebieten zerfällt, im Folgenden bewiesen werden[2]); ich beweise also den folgenden

1) Ein Weg besteht aus einer endlichen Zahl von Strecken, oder aus unendlich vielen, die in t ihren Grenzpunkt besitzen.

2) Für den Fall unendlich vieler Gebiete bedarf die in meinem Vortrag vermutete Bedingung einer kleinen Modification.

Lehrsatz. Eine ebene geschränkte, perfekte, zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{T}$, die in der Ebene eine endliche Zahl von Gebieten bestimmt, ist dann und nur dann stetiges Bild der Strecke, wenn jeder ihrer Punkte, für jedes Gebiet, zu dessen Grenze er gehört, allseitig erreichbar ist.

Bedenkt man, daß von den der Menge $\mathfrak{T}$ auferlegten Eigenschaften die ersten drei, nämlich Geschränktheit, Perfektheit, Zusammenhang unmittelbar einleuchten, und daß zu ihnen als weitere notwendige und hinreichende Bedingung nur die allseitige Erreichbarkeit ihrer Punkte tritt, so dürfte in der Erreichbarkeit der dem stetigen Kurvenbegriff anhaftende gestaltliche Charakter seinen einfachsten und naturgemäßen Ausdruck gefunden haben, und in der That ein objektives Merkmal darstellen.

Unter den im Satz genannten Gebieten sind einfach zusammenhängende Gebiete zu verstehen. Die im Folgenden zu betrachtenden Gebiete sind stets dieser Art, auch wenn es nicht ausdrücklich gesagt wird. Ihre Grenze kann jedoch die mannigfachsten gestaltlichen Formen haben und unterliegt sonst nur der im Satz enthaltenen Bedingung.

Was die allgemeine Beweismethode betrifft, so operire ich auch hier zunächst mit den Eigenschaften von gewissen Polygonen, und übertrage sie durch Grenzbetrachtungen auf die allgemeinen Punktmengen.

§ 1. Die methodischen Hilfsmittel und Hilfssätze.

Die methodischen Hilfsmittel, die zum Beweise des Satzes dienen, sind im wesentlichen in meinen Beiträgen zur Theorie der Punktmengen[1]) enthalten; ich lasse sie hier in Kürze nebst einigen Zusätzen und in teilweise vereinfachter Form nochmals folgen.

1. **Zu jeder Menge $\mathfrak{T}$ läßt sich eine Polygonfigur Π finden, die sie in einem mittleren Abstand ε approximirt.** Man erhält sie am einfachsten nach einem von Runge angegebenen Verfahren[2]). Man legt dazu eine quadratische Teilung mit der Quadratseite $\frac{1}{4}\varepsilon$ zu Grunde. Es giebt dann Quadrate, die von $\mathfrak{T}$ frei sind, d. h. deren Inneres und Umfang keinen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Diejenigen von ihnen, bei denen außerdem auch die sämtlichen acht anstoßenden Quadrate von $\mathfrak{T}$ frei sind,

1) Math. Ann. 55 p. 195, 59 p. 129, 62 p. 286.

2) vgl. Acta math. Bd. 6, S. 230.

bilden ein von einer endlichen Zahl von Polygonen begrenztes Gebiet. Diese Polygone bilden die Figur Π; die Menge $\mathfrak{T}$ liegt außerhalb dieses Gebiets. Aus seiner Definition ergiebt sich unmittelbar folgende Eigenschaft. Ist p ein Punkt von Π, und bezeichnet $\varrho(p, \mathfrak{T})$ den Abstand des Punktes p von $\mathfrak{T}$, so ist

$$1) \qquad \tfrac{1}{4}\varepsilon < \varrho(p, \mathfrak{T}) < \tfrac{3}{4}\varepsilon.$$

Dieser Relation halber sage ich, daß Π die Menge $\mathfrak{T}$ im Abstand ε approximirt.

2. Sei C eine geschlossene Curve, die also die Ebene in zwei Gebiete $J(C)$ und $A(C)$ zerlegt, und seien c' und c'' zwei von einem inneren Punkt m erreichbare Punkte von C. Die von m zu ihnen führenden Wege l' und l'' zerlegen $J(C)$ in zwei Teilgebiete J_1 und J_2 und C in zwei Kurvenbögen C_1 und C_2 und jede zusammenhängende Teilmenge von C, der c' und c'' angehören, muß einen der beiden Kurvenbögen als Bestandteil enthalten.

Wenn die Grenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes J außer einer geschlossenen Kurve C auch solche Punkte t_i enthält, die Grenzpunkte nur von J sind, so daß

$$\mathfrak{T} = C + \mathfrak{T}_i$$

zu setzen ist[1]), zerfällt J durch zwei Wege l' und l'' immer noch in zwei Gebiete J_1 und J_2, zu deren Grenze zwei wohlbestimmte Teilmengen T_1 und T_2 von $\mathfrak{T}$ gehören. Diese brauchen keine Kurvenbögen zu sein. Immer aber giebt es auch in diesem Fall zwei Kurvenbögen C_1 und C_2, die t' und t'' enthalten, so daß jeder zusammenhängenden Teilmenge von $\mathfrak{T}$, der t' und t'' angehören, einer dieser Kurvenbögen angehört.

3. Wird t' mit t'' durch einen im Teilgebiet J_1 verlaufenden Weg $\mathfrak{w}$ so verbunden, daß (Fig. 1)[2]) kein Punkt von $\mathfrak{T}$ innerhalb des durch $\mathfrak{w}$, l', l'' gebildeten Polygons liegt[3]), und ist w ein variabler Punkt von $\mathfrak{w}$, so giebt es für die Entfernungen $\varrho(t', w)$ und $\varrho(t'', w)$ ein Maximum e, und für alle durch J_1 laufenden Wege $\mathfrak{w}$ dieser Art hat e eine untere Grenze η. Sie soll die zu t' und t'' für das Gebiet J_1 zugehörige Wegdistanz heißen[4]). Auf der Grenzmenge T_1 von J_1

Fig. 1.

1) wie z. B. ein Kreis mit einem seiner Radien.

2) Die Figuren sind nur schematisch gezeichnet.

3) Diese Wege machen die früher benutzten Rückkehrwege (Beiträge III, p. 800) entbehrlich.

4) Früher als Ausbiegung bezeichnet.

kann man das
J_ν zerlegen,
Eigenschaft
Null con-
Punktes $t_\varkappa$
i also

gen die
gen $\mathfrak{T}$
conver-
daß für

Grenze

Polygone
Führung des

Zahl, die für
stimmen, daß
was einer

convergirende

Hilfssatz über

Polygon, M **ein äußerer**
endlich $\mathfrak{p} = M \ldots A_1$ **und**
sich nicht **kreuzen, so kann**
ziehen, die **durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$**
des Polygons **eindringen.**
innerhalb **zweier eindeutig be-**
B' und $\mathfrak{p}'' = A'' \ldots B''$. **Der**
bestimmt **mit den Weg-**
P', **das die Punkte**
innerer **Punkt von**
man **diese Wege nicht**
Punkten M **und** N **aus-**

Da aber andrerseits kein Punkt einer Menge $T_{\nu+\varrho}$ und daher auch kein Punkt von T_ω innerhalb von P'_ν enthalten ist, so ist damit die Behauptung bewiesen.

Das gleiche gilt, wenn überhaupt unendlich viele Teilgebiete J_ν einen Punkt t von T_ω gemein haben. Man braucht nämlich nur je eine gewisse Zahl consecutiver Gebiete J_ν zu einem Gebiet J'_ν zusammenzufassen, so wird dadurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Die hier betrachteten Teilgebiete von J sind diejenigen, auf die man sich für den Beweis des obigen Satzes methodisch beschränken kann, was daher in Folgendem geschehen soll.

6. Für jedes Gebiet J_ν giebt es eine zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehörige Wegdistanz η_ν. Ist H ihr oberster Limes, so brauchen die η_ν nicht direct gegen H zu convergiren. Man sieht aber leicht, daß man aus der Folge $\{t_\nu\}$ eine einfache Teilfolge $\{t'_\nu\}$ so ausscheiden kann, daß die zu je zwei consecutiven Punkten t'_ν und $t'_{\nu+1}$ gehörigen Wegdistanzen η'_ν sich schließlich beliebig wenig von H unterscheiden; bei vorgegebenem σ giebt es dann ein N, so daß für jedes $\nu > N$

$$H - \sigma < \eta'_\nu < H + \sigma$$

ist. Eine solche Folge $\{t'_\nu\}$ soll reduzirte einfache Folge heißen; ich setze fest, daß die im Folgenden zu betrachtenden Folgen stets reduzirt sind. Für sie hat auch jede Teilfolge $\{t''_\nu\}$ die Eigenschaft, daß für jedes $\nu > N$ die obige Relation besteht.

Gemäß 3) enthält jede Menge T_ν mindestens einen Punkt τ_ν, dessen Abstand von t_ν resp. $t_{\nu+1}$ gleich η_ν ist. Diese Punkte τ_ν liefern auch einen zu T_ω gehörigen Punkt τ_ω, so daß $\varrho(t_\omega, \tau_\omega) = H$ ist.

7. Ich führe noch folgende Bezeichnung ein. Sind t' und t'' zwei Punkte der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}$, so soll das Maximum von $\varrho(t', t'')$[1] die größte Breite von $\mathfrak{T}$ oder kurz Breite von $\mathfrak{T}$ heißen und durch $\mathfrak{B}(\mathfrak{T})$ bezeichnet werden.

Wenn dann die Mengen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_\nu, \ldots$$

eine Grenzmenge $\mathfrak{T}_\omega$ haben, und wenn für jedes ν

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) > e \text{ ist, so ist } \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\omega) \geqq e.$$

1) Durch $\varrho(t', t'')$ oder durch $\overline{t', t''}$ bezeichne ich die Entfernung von t' und t''.

8. Wie ich an anderer Stelle bewiesen habe[1]), kann man das Gebiet J so in eine endliche Zahl von Teilgebieten $J_\varkappa$ zerlegen, daß die in den $J_\varkappa$ enthaltenen Streckenzüge $P_\varkappa$ die Eigenschaft haben, daß die Breite $\mathfrak{B}(P_\varkappa)$ mit ε gleichmäßig gegen Null convergirt. Sei $d_\varkappa$ das Maximum der Entfernung eines Punktes $t_\varkappa$ der Menge $T_\varkappa$ von $P_\varkappa$ und D das Maximum aller $d_\varkappa$; sei also

$$\varrho(t_\varkappa, P_\varkappa) \leqq d_\varkappa \leqq D.$$

Wenn dann $\mathfrak{P}_\nu$ eine Folge von Polygonen ist, die gegen die Menge $\mathfrak{T}$ approximiren, so sollen sie gleichmäßig gegen $\mathfrak{T}$ convergirend heißen, falls mit ε_ν auch D_ν gegen Null convergirt. Bei gegebenem σ kann man dann ein N finden, so daß für $\nu > N$ die Relation

$$\varrho(t_\varkappa^{(\nu)}, P_\varkappa^{(\nu)}) < \sigma \tag{2}$$

für jedes Teilgebiet $J_\varkappa^{(\nu)}$, resp. jeden Punkt $t_\varkappa^{(\nu)}$ seiner Grenze $T_\varkappa^{(\nu)}$ und den zugehörigen Streckenzug $P_\varkappa^{(\nu)}$ erfüllt ist.

Die Einführung der gleichmäßigen Konvergenz der Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ stellt dasjenige neue Hilfsmittel dar, das mir die Führung des Beweises wesentlich erleichtert hat.

9. Sind endlich $t', t'', \ldots t^{(\lambda)}$ Punkte in endlicher Zahl, die für das Gebiet J erreichbar sind, so kann man ε so bestimmen, daß das Polygon $\mathfrak{P}$ die Punkte $t^{(i)}$ sämtlich approximirt, was einer näheren Begründung nicht bedarf.

§ 2. Sätze über Erreichbarkeit und gleichmässig convergirende Polygonfolgen.

Ich schicke zunächst einen leicht beweisbaren Hilfssatz über gewöhnliche Streckenzüge voraus.

Hilfssatz: Sei $\mathfrak{P}$ ein gewöhnliches Polygon, M ein äußerer und A_1 und B_1 zwei innere Punkte, endlich $\mathfrak{p} = M \ldots A_1$ und $\mathfrak{q} = M \ldots B_1$ zwei Streckenzüge, die sich nicht kreuzen, so kann man von M aus zwei Wege l' und l'' ziehen, die durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ getrennt werden, und in das Innere des Polygons eindringen. Diese Wege kreuzen das Polygon innerhalb zweier eindeutig bestimmter Streckenzüge $\mathfrak{p}' = A' \ldots B'$ und $\mathfrak{p}'' = A'' \ldots B''$. Der eine von ihnen — es sei $A' \ldots B'$ — bestimmt mit den Wegstücken $M \ldots A'$ und $M \ldots B'$ ein Polygon P', das die Punkte A_1 und B_1 ausschließt. Auch gehört kein innerer Punkt von $A' \ldots B'$ den Wegen $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ an. Läßt man diese Wege nicht von M, sondern von zwei verschiedenen Punkten M und N aus-

1) Math. Ann. 62, S. 310.

gehen, so tritt an die Stelle des Polygons ein analoger Streckenzug, der $\mathfrak{p}'$ enthält und M und N verbindet.

Diese Eigenschaft kann sich nicht ändern, wenn man die Streckenzüge $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ über A_1 und B_1 so verlängert, daß die Verlängerung innerhalb von $\mathfrak{P}$ liegt. Der Satz bleibt insbesondere auch dann noch bestehen, wenn man A_1 und B_1 mit demselben Punkt P innerhalb $\mathfrak{P}$ durch Wege verbindet, die in P einen Grenzpunkt haben.

Hieraus folgt fast unmittelbar der folgende

Satz 1: Ist $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge, deren Wegdistanzen η_ν gegen Null convergieren, so ist ihr Grenzpunkt t_ω für das durch sie bestimmte Teilgebiet J_ω erreichbar.

Seien nämlich $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ die Wege, die in den Gebieten $J_{\nu-1}$ und J_ν von t_ν zu $t_{\nu-1}$ und von t_ν zu $t_{\nu+1}$ führen, und sei w_ν resp. $w_{\nu-1}$ je einer ihrer Punkte. Legt man nun um t_ν ein Quadrat der Seite ε_ν das die übrigen Punkte t_λ sowie w_ν und $w_{\nu-1}$ ausschließt, so bestimmen dem Hilfssatz zufolge die Punkte w_ν und $w_{\nu-1}$ mit Teilen der Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ und einem Teil des Quadrats einen Streckenzug, der teils zu J_ν teils zu $J_{\nu-1}$ gehört und dadurch dem Hilfsatz gemäß eindeutig bestimmt ist. Wird dies für alle Werte $\lambda - 1 < \nu < N$ ausgeführt, so ergibt sich ein zusammenhängender Streckenzug, der in $J_{\lambda N}$ (§ 1,5) enthalten ist. Da nun sowohl η_ν als auch ε_ν für wachsendes ν gegen Null convergiert, so hat dieser Streckenzug nur einen Grenzpunkt, nämlich t, während er zugleich ganz in J_ω liegt.

Satz 2: Falls die Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ gegen die Grenze $\mathfrak{T}$ des Gebietes J gleichmäßig convergiren, sind alle Punkte von $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar für J.

Wenn nämlich ein Punkt t von $\mathfrak{T}$ für ein Teilgebiet J' nicht erreichbar ist, kann es nach Satz 1) keine Folge $\{t_\nu\}$ mit t als Grenzpunkt geben, deren Wegdistanzen η_ν gegen Null convergiren. Die η_ν besitzen daher für jede derartige Folge einen Limes $H > 0$; die Folge denken wir uns in reduzirter Form angenommen.

Zur Grenze des durch diese Folge bestimmten Gebietes J_ω gehört sowohl t, wie auch der Punkt τ_ω, für den $\varrho(\tau_\omega, t) = H$ ist (§ 1, 6). Beide Punkte gehören also auch zur Grenze jedes Gebietes $J_{\lambda\omega}$. Sei nun $\mathfrak{P}$ irgend eines der approximirenden Polygone, so wird der in J_ω enthaltene Teil P_ω von den Wegen l_ν in Punkten p_ν gekreuzt, die einen zu P_ω gehörigen Grenzpunkt p_ω besitzen gegen den sie von der gleichen Seite convergiren. Wir können daher (Fig. 3) N resp. ein Gebiet $J_{N\omega}$ so bestimmen, daß für

Fig. 3.

den Streckenzug $P_{N\omega}$ die Relation

$$\mathfrak{B}(P_{N\omega}) < \sigma$$

besteht. Andererseits ist, wie unmittelbar evident,

$$4) \qquad H = \varrho(t, \tau_\omega) < \varrho(t, P_{N\omega}) + \varrho(\tau_\omega, P_{N\omega}) + \mathfrak{B}(P_{N\omega}),$$

es muß daher mindestens eine der beiden Größen $\varrho(t, P_{N\omega})$ und $\varrho(\tau_\omega, P_{N\omega})$ größer als $\frac{1}{2}(H - \sigma)$ sein.

Da nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Polygon war, so würde es, falls t für J' nicht erreichbar wäre, für jedes Polygon $\mathfrak{P}$ ein Teilgebiet $J_{N\omega}$ von J' geben, in dem der Maximalabstand $\varrho(t, P_{N\omega})$ größer als eine endliche positive Größe bliebe; d. h. die Polygone convergirten nicht gleichmäßig.

Satz 3: Ist die Grenze $\mathfrak{T}$ des Gebietes J allseitig erreichbar, so convergiren die in J approximirenden Polygone gleichmäßig gegen $\mathfrak{T}$.

Falls die Polygone nämlich nicht gleichmäßig convergiren, os giebt es für unendlich viele von ihnen je ein Teilgebiet J, so daß für einen Punkt t seiner Grenze und den es durchziehenden Streckenzug P

$$5) \qquad \varrho(t, P) > e > 0$$

ist. Sei noch p der Punkt, in welchem der in J zu t führende Weg l den Streckenzug P kreuzt.

Sei nun $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ die bezügliche Polygonfolge, seien $\mathfrak{P}^{(\varkappa)} = \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}^{(\lambda)} = \mathfrak{P}_2$ zwei dieser Polygone, so daß $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ist, und seien t' resp. t'' zwei Punkte der Grenze von J_1 und J_2 (Fig. 4), für die

$$\varrho(t', P_1) > e \text{ und } \varrho(t'', P_1) > e$$

ist[1]). Wir wählen nun das Polygon $\mathfrak{P}^{(\lambda)} = \mathfrak{P}_2$ insbesondere so, daß es in dem in § 1, 2 genannten Sinn auch den Punkt t' approximirt; es giebt dann ein gewisses Teilgebiet J_2', zu dessen Grenze t' gehört, und so daß für einen Punkt p_2' von P_2'

$$\varrho(t', p_2') = \varrho(t', P_2') < \tfrac{1}{2}\varepsilon_2$$

ist, wo p_2' zugleich der Kreuzungspunkt von l' mit P_2' ist. Endlich sei J'' das durch die Wege l' und l'' bestimmte Teilgebiet[2]), so daß der zugehörige Streckenzug P'' die Endpunkte p_2 und p_2' hat.

Fig. 4.

1) Es ist klar, daß t' und t'' verschieden von einander gewählt werden können.

2) Es giebt zwar zwei, doch kommt für das folgende immer nur ein bestimmtes in Betracht.

In dem durch die Punkte t', t'', p_2, p_2' gebildeten Viereck ist dann

6) $$\overline{t''p_2} < \overline{t't''} + \overline{p_2't'} + \overline{p_2p_2'}.$$

Nun ist aber

$$\overline{p_2'p_2} \leqq \mathfrak{B}(P''),\ \overline{p_2't'} \leqq \tfrac{3}{2}\varepsilon_2\ \overline{t''p_2} > e$$

folglich ergiebt sich

7) $$e < \overline{t't''} + \mathfrak{B}(P'') + \tfrac{3}{2}\varepsilon_2.$$

Man wähle nun wieder ein Polygon $\mathfrak{P}^{(\mu)} = \mathfrak{P}_3$ so aus, daß es den Punkt t'' approximirt und daß für ein Teilgebiet J_3 und einen Punkt t''' seiner Grenze

$$\varrho(t''', P_3) > e$$

ist, und setze dies unbegrenzt fort, so erhält man eine Folge $\{t^{(n)}\}$, so daß für je zwei consecutive Punkte eine Relation der Form 7) gilt. Aus ihr kann man eine einfache Folge $\{\tau_\nu\}$ auswählen, die den Grenzpunkt τ_ω haben möge. Beachtet man nun, daß mit $\mathfrak{P}^{(\lambda)} = \mathfrak{P}_2$ auch jedes Polygon $\mathfrak{P}^{(\varrho)}$ den Punkt t' approximirt, wenn $\varrho > \lambda$ ist, ebenso den Punkt t'', falls $\varrho > \mu$ ist, u. s. w., so folgt, daß die Relation 7) für je zwei consecutive Punkte der Folge $\{\tau_\nu\}$ Geltung hat. Nimmt man nun wieder N so, daß $\varrho(\tau_\nu, \tau_{\nu+1}) < \sigma$ ist, bei gegebenem σ und für $\nu > N$, so wird

8) $$\mathfrak{B}(P^{(\nu)}) > e - \sigma - \tfrac{3}{2}\varepsilon_\nu.$$

Nun gehört aber zur Grenzmenge T_ω' des durch die Folge $\{\tau_\nu\}$ bestimmten Teilgebietes J_ω' jeder Punkt, der Grenzpunkt der Streckenzüge $P^{(\nu)}$ ist. Daher ist notwendig auch (§ 1, 7)

$$\mathfrak{B}(T_\omega') \geqq e,$$

so daß sich T_ω' nicht auf einen Punkt reduciert.

Sollte nun ein Punkt t von T_ω' für jedes Teilgebiet J_ν' und damit auch für jedes Teilgebiet $J_{\nu\omega}'$ erreichbar sein, so kann doch, wie wir oben sahen, (§ 1, 5) nur ein solcher Punkt existieren. Seien nun t' und t'' zwei von diesem eventuellen Punkt t verschiedene Punkte von T_ω', so kann man N so finden, daß t' und t'' für $\nu > N$ zur Grenze keines Gebietes J_ν' gehören, wohl aber zur Grenze von $J_{\nu\omega}'$. Ist nun $\mathfrak{P}$ irgend ein die Menge $\mathfrak{T}$ approximierendes Polygon und sind l_ν seine Kreuzungspunkte mit den zu den Punkten τ_ν führenden Wegen, so kann ein Weg, der in $J_{\nu\omega}'$ zu t' oder t'' führt, das Polygon $\mathfrak{P}$ niemals zwischen zwei Punkten l_μ

und l_ν kreuzen, vielmehr müßte der Kreuzungspunkt notwendig auf l_ω fallen. Dies ist aber ebenfalls unmöglich, da sonst die zu t' und t'' führenden Wege identisch wären. Es können also nicht beide Punkte t' und t'' für $J'_{\nu\omega}$ erreichbar sein, obwohl sie zu seiner Grenze gehören. Dies ist aber ein Widerspruch und der Satz damit bewiesen.

§ 3. Beweis des Satzes für den einfachsten Fall; die Menge $\mathfrak{T}$ ist eine geschlossene Kurve.

Lehrsatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine geschlossene Kurve eindeutiges und stetiges Bild der Strecke $0 \leqq s \leqq 1$ ist, besteht in der allseitigen Erreichbarkeit ihrer Punkte.

Eine geschlossene Curve $\mathfrak{C}$ ist so definirt, daß sie die Ebene in ein äußeres Gebiet $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ und ein inneres Gebiet $J(\mathfrak{C})$ zerlegt, so daß jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ gemeinsamer Grenzpunkt von J und $\mathfrak{A}$ ist.

Ich beweise zunächst, daß die Bedingung notwendig ist. Sei $\{c_\nu\}$ eine einfache Folge von Punkten, die von einem inneren Punkt m erreichbar sind, mit dem Grenzpunkt c_ω, so ist zu zeigen, daß auch c_ω von m aus erreichbar ist. Man wähle nun irgend einen Punkt s_ν der Strecke aus, dessen Bildpunkt c_ν ist so haben die so ausgewählten zu den Punkten c_ν gehörigen Punkte s_ν mindestens einen Grenzpunkt s_ω, und man kann links oder rechts von s_ω unendlich viele Punkte s_ν so auswählen, daß s_ω ihr einziger Grenzpunkt ist. Sei S die bezügliche Punktmenge, und sei s_{ν_1} einer ihrer Punkte, so giebt es notwendig einen ersten Punkt s_{ν_2} zwischen s_{ν_1} und s_ω, sodaß $\nu_2 > \nu_1$ ist, ebenso einen ersten Punkt s_{ν_3} zwischen s_{ν_2} und s_ω, so daß $\nu_3 > \nu_2$ ist u. s. w. Seien

$$S' = \{s'_\nu\}$$

diese Punkte, so wird ihnen auch eine Teilmenge von $\{c_\nu\}$ entsprechen, deren Indices wachsen, sie sei $\{c'_\nu\}$.

Der Strecke $s'_1 s'_2$ entspricht nun notwendig eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{C}_1$ der geschlossenen Curve $\mathfrak{C}$, die die Punkte c'_1 und c'_2 enthält; ihr gehört daher notwendig mindestens einer der beiden Kurvenbögen an, die gemäß § 1 durch die Punkte c'_1 und c'_2 bestimmt werden. Diese Kurvenbögen seien C_1 und C'_1; C_1 sei derjenige, der keinen Punkt c'_ν außer c'_1 und c'_2 enthält. Dasselbe gilt für die Strecke $s'_2 s'_3$; ihr entspricht eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{C}$, der mindestens einer der beiden

durch c_1' und c_2' bestimmten Curvenbögen C_2 und C_2' angehört, wo wieder C_2 keinen Punkt c_ν' außer c_1' und c_2' enthalten soll, und das gleiche gilt für jedes Intervall $s_\nu' s_{\nu+1}'$. Wählt man nun auf den Teilmengen

9) $$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_\nu, \ldots$$

je einen Punkt

10) $$c_1'', c_2'', \ldots c_\nu'', \ldots$$

beliebig aus, so entspricht ihnen mindestens je ein Bildpunkt

11) $$s_1'', s_2'', \ldots s_\nu'', \ldots$$

auf den Strecken $s_1' s_2'$, $s_2' s_3' \ldots$ Diese Punkte haben aber den Punkt s_ω als Grenzpunkt. Wegen der Stetigkeit müssen daher die Punkte c_ν'' den Punkt c als Grenzpunkt haben. Dies gilt, in welcher Weise man auch die Punkte c_ν'' auf den Teilmengen $\mathfrak{C}_\nu$ wählen mag.

Daraus folgert man aber leicht, daß der Punkt c erreichbar sein muß. Um dies in aller Form darzutun, kann man folgendermaßen verfahren.

Sei wieder (§ 1, 4) $J' = J_\omega$ das durch die Wege l_ν' bestimmte Teilgebiet von J, sei J'' das Complementärgebiet und seien $\mathfrak{C}'$ resp. $\mathfrak{C}''$ die zugehörigen Teilmengen von $\mathfrak{C}$, so ist klar, daß jeder Curvenbogen C_ν' die Menge $\mathfrak{C}''$ als Teilmenge enthält. Es ist daher zunächst ausgeschlossen, daß $\mathfrak{C}''$ in unendlich vielen Teilmengen $\mathfrak{C}_\nu$ als Bestandteil enthalten ist, da sonst dem obigen zufolge dem Punkt s_ω alle Punkte von $\mathfrak{C}''$ entsprechen müssen. Es muß daher eine Zahl N geben, von der Art, daß für $\nu > N$ jede Teilmenge $\mathfrak{C}_\nu$ den Curvenbogen C_ν als Bestandteil enthält. Wenn nun aber der Punkt c nicht erreichbar ist, so haben nach § 1, 6 die bezüglichen Curvenbögen C_ν mehr als einen Grenzpunkt und jeder dieser Grenzpunkte müßte wiederum dem Punkt s_ω entsprechen, was nicht möglich ist.

Dasselbe läßt sich in gleicher Weise für das äußere Teilgebiet nachweisen. Damit ist zunächst gezeigt, daß die im Satz genannte Bedingung notwendig ist.

Wir zeigen nun, daß sie auch hinreichend ist. Dazu benutze ich diejenige fortgesetzte Zerlegung von J in Teilgebiete, die ich in meinen Beiträgen ausführlich erörtert habe. Man kann danach wenn man das approximirende Polygon $\mathfrak{P}$ beliebig annimmt, das Gebiet J so durch Wege l_i in Teilgebiete $J_\varkappa$ zerlegen, daß für jedes $J_\varkappa$ resp. für den zugehörigen Streckenzug $P_\varkappa$ die Relation

$$\mathfrak{B}(P_\varkappa) < \delta$$

besteht, wo δ mit ε gleichmäßig gegen Null convergirt[1]). Ueberdies tritt die fortgesetzte Zerlegung in Teilgebiete immer so ein, daß jedes $J_\varkappa$ wieder in gewisse Teilgebiete $J_{\varkappa\iota}$ zerfällt u. s. w. Ich bezeichne noch die Punkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{C}$, die durch die Wege l_ι bestimmt werden, durch p_ι, resp. c_ι, und setze, wie oben, falls $c_\varkappa$ ein Punkt des Curvenbogens $C_\varkappa$ ist.

$$\text{12)} \qquad \varrho(c_\varkappa, P_\varkappa) \leqq d_\varkappa; \quad d_\varkappa \leqq D.$$

Man kann nun das Polygon $\mathfrak{P}$ durch zwei stetige Funktionen

$$\text{13)} \qquad x = f(s), \quad y = \varphi(s)$$

stetig auf die Strecke $0 \leqq s \leqq 1$ abbilden, z. B. so, daß man die Strecke durch die Punkte s_ι in so viele gleiche Teile teilt, als die Zahl der Gebiete $J_\varkappa$ beträgt und den Intervallen, die $\sigma_\varkappa$ heißen sollen, die Streckenzüge $P_\varkappa$, von irgend einem anfangend, consecutiv entsprechen läßt. Ferner soll die herzustellende Abbildung der Curve $\mathfrak{C}$ auf die Strecke so bewirkt werden, daß den Punkten s_ι die Punkte c_ι und den Intervallen $\sigma_\varkappa$ die Curvenbögen $C_\varkappa$ zugewiesen werden, was eine erlaubte Festsetzung ist.

Nun sei wieder $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$ eine gegen $\mathfrak{C}$ approximirende Polygonfolge, so gelten für jedes $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ die Relationen

$$\varrho(c_\varkappa, P_\varkappa^{(\nu)}) \leqq d_\varkappa^{(\nu)} \leqq D^{(\nu)}$$

und es convergirt wegen der gleichmäßigen Konvergenz $D^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null. Daraus folgert man leicht, daß die Funktionen

$$x = f_\nu(s), \quad y = \varphi_\nu(s)$$

gleichmäßig gegen zwei Grenzfunktionen convergiren.

Sei nämlich $J_\varkappa^{(\nu)}$ ein durch $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ bestimmtes Teilgebiet, und $J_\iota^{(\varrho)}$ ein solches, das für $\varrho > \nu$ durch $\mathfrak{P}^{(\varrho)}$ bestimmt ist, und das zugleich Teilgebiet von $J_\varkappa^{(\nu)}$ ist. Ist dann c ein Punkt, der sowohl zu $C_\varkappa^{(\nu)}$, wie zu $C_\iota^{(\varrho)}$ gehört, so hat man

$$\varrho(c, P_\varkappa^{(\nu)}) \leqq D^{(\nu)}, \quad \varrho(c, P_\iota^{(\varrho)}) \leqq D^{(\varrho)}.$$

Sind daher $p^{(\nu)}$ und $p^{(\varrho)}$ irgend zwei Punkte von $P_\varkappa^{(\nu)}$ und $P_\iota^{(\varrho)}$, so ist offenbar

$$\text{14)} \quad \varrho(p^{(\nu)}, p^{(\varrho)}) < D^{(\nu)} + D^{(\varrho)} + \mathfrak{B}(P_\varkappa^{(\nu)}) + \mathfrak{B}(P_\iota^{(\varrho)}) < D^{(\nu)} + D^{(\varrho)} + \delta^{(\nu)} + \delta^{(\varrho)};$$

1) vgl. Math. Ann. 62, S. 310. Es genügt z. B. $\delta < 24\varepsilon$ zu wählen.

eine solche Relation gilt daher auch für zwei solche Punkte von $P_\varkappa^{(\nu)}$ und $P_l^{(\varphi)}$, die demselben Wert von s entsprechen. Da aber mit s_ν auch $D^{(\nu)}$ und $\delta^{(\nu)}$ gegen Null convergirt, so ist damit die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $f_\nu(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ dargetan. Nach einem bekannten Satze bestimmen sie daher zwei stetige Grenzfunktionen

15) $$x = f_\omega(s), \quad y = \varphi_\omega(s),$$

und es ist nur noch zu zeigen, daß diese Funktionen die Curve $\mathfrak{C}$ darstellen.

Dazu bemerke ich zunächst, daß auch die Breite der Curvenbögen $C_\varkappa^{(\nu)}$ gegen Null convergirt. Für irgend zwei Punkte $c'_\varkappa$ und $c''_\varkappa$ von $C_\varkappa^{(\nu)}$ ist nämlich, wie unmittelbar ersichtlich,

16) $$\varrho(c'_\varkappa, c''_\varkappa) \leqq \varrho(c'_\varkappa, P_\varkappa^{(\nu)}) + \varrho(c''_\varkappa, P_\varkappa^{(\nu)}) + \mathfrak{B}(P_\varkappa^{(\nu)}) < 2D^{(\nu)} + \delta^{(\nu)},$$

woraus die Behauptung folgt.

Bezeichnen wir noch durch

17) $$\sigma_\varkappa, \sigma_{\varkappa l}, \sigma_{\varkappa lm}, \ldots$$

die auf der Strecke durch fortgesetzte Teilung entstehenden Intervalle, so daß jedes $\sigma_{\varkappa l}$ ein Teilintervall von $\sigma_\varkappa$ ist, u. s. w. und durch S_r die von ihren Endpunkten auf der Strecke gebildete dichte Menge. Sind dann

18) $$C_\varkappa, C_{\varkappa l}, C_{\varkappa lm}, \ldots$$

die entsprechenden Curvenbögen, so ist auch $C_{\varkappa l}$ für jedes l Teilmenge von $C_\varkappa$ u. s. w. und wegen $\lim \mathfrak{B}(C_\varkappa^{(\nu)}) = 0$ ist auch die von ihren Endpunkten auf $\mathfrak{C}$ bestimmte Menge C_r überall dicht. Jeder Punkt s' der Strecke ist nun einziger gemeinsamer Punkt gewisser Intervalle 17) mit wohlbestimmten Indices $\varkappa, l, m, \ldots$ Die entsprechenden Curvenbögen 18) haben andererseits die Eigenschaft, daß jeder eine Teilmenge des vorhergehenden ist, und daß ihre Breite gegen Null convergirt, sie können daher ebenfalls nur einen Punkt c' gemein haben, den wir dem Punkt s' zu ordnen.

Damit haben wir eine eindeutige und stetige Beziehung zwischen der Strecke und der Curve hergestellt. Da aber bei dieser Beziehung den Punkten von S_r dieselben Punkte von $\mathfrak{C}$ entsprechen, wie bei dem Funktionenpaar 15), so stellen diese Funktionen wirklich die Curve $\mathfrak{C}$ dar.

Aus dem Vorstehenden ziehen wir noch die Folgerung, daß die allseitige Erreichbarkeit der Punkte von $\mathfrak{T}$ entweder nur für J oder nur für $\mathfrak{A}$ bekannt zu sein braucht und daß das eine

eine Folge des andern ist. In der Tat, wenn alle Punkte von $\mathfrak{T}$ von J aus allseitig erreichbar sind, so läßt sich $\mathfrak{T}$ durch stetige Funktionen $x = f(s)$, $y = \varphi(s)$ darstellen und nunmehr folgt die Erreichbarkeit ihrer Punkte auch für $\mathfrak{A}$.

Dies gestattet die Umkehrung des Jordanschen Curvensatzes etwas zu modificiren. Denn man braucht auch für ihn die allseitige Erreichbarkeit nur für J oder nur für $\mathfrak{A}$ vorauszusetzen. Inhaltlich wird übrigens der Satz selbst dadurch nicht modificirt. Denn die hier vorausgesetzte allseitige Erreichbarkeit für J oder $\mathfrak{A}$ ist mit der einfachen Erreichbarkeit für J und $\mathfrak{A}$ identisch. Es ist aber methodisch zweckmäßig, hier mit der allseitigen d. h. also für jedes Teilgebiet verlangten Erreichbarkeit zu operiren.

Bemerkung. Es ist klar, daß man die Curve $\mathfrak{C}$ so auf die Strecke abbilden kann, daß man den Punkten 0 und 1 beliebige Punkte c_0 und c_1 entsprechen läßt.

Zunächst leuchtet ein, daß dies für ein Polygon möglich ist; naturgemäß wird dabei ein Teil des Polygons mehrfach abgebildet. Werden nun die Wege l_0 und l_1 gezogen, so hat man nur die Polygone $\mathfrak{P}_\nu$ in entsprechender Weise auf die Strecke abzubilden, d. h. so daß immer die Punkte $p_0^{(\nu)}$ und $p_1^{(\nu)}$ den Punkten 0 und 1 entsprechen. Man kann sogar jedes Polygon in dieser Weise beliebig oft durchlaufen und kommt stets zu einer analogen stetigen Darstellung der Curve.

§ 4. Beweis für den Fall, dass die Menge $\mathfrak{T}$ nirgends dicht ist und die Ebene in höchstens zwei Gebiete zerlegt.

Sei jetzt J irgend ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathfrak{T}$ seine volle Grenze, so daß $\mathfrak{T}$ auch Punkte enthalten kann, die Grenzpunkte nur von J sind, und sei wieder $\mathfrak{T}$ stetiges Bild einer Strecke, alsdann lassen sich die Betrachtungen von § 3 fast unmittelbar übertragen. Dies beruht darauf, daß gemäß § 1, 6 zwei erreichbare Punkte t' und t'' immer noch zwei Curvenbögen C und C' definieren, und daß jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$, die die Punkte t' und t'' enthält, notwendig einen dieser beiden Curvenbögen als Bestandteil enthalten muß.

Sei nun wieder $\{t_\nu\}$ eine einfache Folge, deren Punkte von einem innern Punkt m erreichbar sind. Nimmt man dann wiederum zu jedem Punkt t_ν je einen entsprechenden Bildpunkt s_ν beliebig an, so kann man wiederum genau wie vorher die Folge $\{t'_\nu\}$ und die Folge $\{s'_\nu\}$ bilden und an sie dieselben Schlüsse knüpfen. Dem Intervall $s'_1\, s'_2$ muß nämlich wiederum eine zusammenhängende

Teilmenge von $\mathfrak{T}$ entsprechen, der die beiden Punkte t_1' und t_2' angehören, und diese Teilmenge T_1 enthält daher wiederum mindestens einen der beiden bezüglichen Curvenbögen C_1' resp. C_1''; C_1' sei wieder Grenze desjenigen Gebietes, das keinen Weg $\mathfrak{l}_\nu'$ im Innern enthält. Dasselbe gilt wiederum für die Strecken $s_2' s_3'$ u. s. w. Die weiteren Schlüsse bleiben unverändert, sie beruhen auch hier darauf, daß die beliebig herausgegriffenen Punkte 11) nur den einen Grenzpunkt s_ω haben und daß daher beliebige auf den Teilmengen T_1, T_2 herausgegriffene Punkte ebenfalls nur einen Grenzpunkt und zwar t besitzen können.

Diese Betrachtung ist unverändert übertragbar auf den Fall, daß an die Stelle des Gebietes $J(\mathfrak{T})$ das Gebiet $\mathfrak{A}(\mathfrak{T})$ tritt, sowie auch auf den Fall, daß die Punktmenge $\mathfrak{T}$ eine Gebietsteilung überhaupt nicht bewirkt. Die einzige Modification, die im letztgenannten Fall eintritt, ist die, das zwei Wege, die von einem Punkt m zu zwei Punkten von $\mathfrak{T}$ führen, nicht zwei, sondern nur einen zusammenhängenden Curvenbogen bestimmen können, dem sie angehören, was jedoch den Beweis in keiner Weise beeinflußt.

Der zweite Teil des Beweises überträgt sich zunächst unmittelbar auf jedes einzelne Gebiet, da für ihn die Eigenschaft, ob $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Curve ist oder nicht, nirgends benutzt wird. Der Fall, daß $\mathfrak{T}$ eine Gebietsteilung nicht bestimmt, ist damit unmittelbar erledigt. Falls aber $\mathfrak{T}$ ein Gebiet J und ein Gebiet $\mathfrak{A}$ bestimmt, so läßt sich zunächst die Grenze von J und von $\mathfrak{A}$ durch je ein Funktionenpaar $f(s)$, $\varphi(s)$ resp. $f_1(s)$, $\varphi_1(s)$ darstellen, für $0 \leqq s \leqq s_1$ und $s_1 \leqq s \leqq 1$; auch können wir es, wie wir eben sahen, so einrichten, daß dem Punkt s_1 bei beiden Funktionenpaaren ein und derselbe Punkt von $\mathfrak{T}$ entspricht, der gemeinsamer Grenzpunkt von J und $\mathfrak{A}$ ist. Damit ist dann aber auch $\mathfrak{T}$ selbst durch zwei stetige Funktionen dargestellt, nebenbei bemerkt in der Weise, daß jeder Punkt, der gemeinsamer Grenzpunkt von J und $\mathfrak{A}$ ist, zu mindestens zwei Werten von s gehört (von s_1 eventuell abgesehen).

Es ist klar, daß die am Schluß von § 3 enthaltene Bemerkung auch auf den vorliegenden Fall ausdehnbar ist.

§ 5. Die Menge $\mathfrak{T}$ ist ein von einer geschlossenen Curve begrenztes (Peanosches) Gebiet.

Ist $\mathfrak{T}$ ein von einer geschlossenen Curve begrenztes Gebiet, wie das Peanosche Quadrat, so kommt die Erreichbarkeit nur für die Punkte der Gebietsgrenze in Frage, und es gilt der Satz:

Ein von einer geschlossenen Kurve begrenztes abgeschlossenes Gebiet ist dann und nur dann stetiges Bild der Strecke, wenn die geschlossene Kurve eine einfache Kurve ist.

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, genügt der Nachweis, daß alle Punkte der Grenzcurve $\mathfrak{C}$ vom äußeren Gebiet $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ aus erreichbar sind; gemäß § 3 sind sie es dann auch von $J(\mathfrak{C})$.

Die bisher benutzte Beweismethode bedarf hierzu einer Modification. Außer den beiden Curvenbögen C und C_1, die gemäß § 1, durch zwei Punkte c' und c'' von $\mathfrak{C}$ bestimmt werden, giebt es jetzt nämlich noch andere zusammenhängende Teilmengen von $\mathfrak{T}$, denen c' und c'' angehören, und zwar solche, die durch das Gebiet $J(\mathfrak{C})$ führen. Daher verlieren die früheren Schlüsse ihre unmittelbare Anwendbarkeit.

Seien nun zunächst t' und t'' irgend zwei von $\mathfrak{A}$ erreichbare Punkte, A ein durch die Wege l' und l'' bestimmtes Teilgebiet von $\mathfrak{A}$ und C der zugehörige Kurvenbogen. Sei ferner η' das Maximum der Abstände $\varrho(c, t')$, wo c ein Punkt von C ist, so kann man auf dem Bogen C einen für $\mathfrak{A}$ erreichbaren Punkt τ so bestimmen, daß bei beliebigem σ

$$19)\qquad \tfrac{1}{2}\eta' - \sigma < \varrho(t', \tau) < \tfrac{1}{2}\eta' + \sigma$$

ist; und falls noch τ' ein solcher Punkt von C ist, für den $\varrho(t', \tau') = \eta'$ ist, hat man noch

$$19a)\qquad \varrho(\tau', \tau) > \tfrac{1}{2}\eta' - \sigma.$$

Wenn nun ein Punkt t von $\mathfrak{C}$ für ein Teilgebiet von $\mathfrak{A}$ nicht erreichbar sein sollte, so construiren wir zunächst wieder eine Folge $\{t_\nu\}$ mit t als Grenzpunkt und bestimmen für das von den Wegen l_ν und $l_{\nu+1}$ gebildete Teilgebiet[1]) A_ν die eben definirten zu den Punkten t_ν zugehörigen Punkte τ_ν. (Fig. 5). Falls dann die Punkte τ_ν nicht von selbst eine einfache Folge bilden, so kann man doch eine Teilfolge dieser Art von ihnen absondern und alsdann eine Teilfolge von $\{t_\nu\}$ so bestimmen, daß die Punkte beider Folgen abwechselnd auf einander folgen. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß $\{t_\nu\}$ und $\{\tau_\nu\}$ bereits diese

Fig. 5.

1) vergl. die Anmerkung auf S. 35.

Eigenschaft besitzen. Wir bestimmen dann noch zu ihnen die oben definirten Punkte τ'_ν.

Für beliebiges σ läßt sich dann ein geeignetes N finden, so daß für jedes $\nu > N$

$$\eta'_\nu > \eta_\nu - \sigma, \quad \overline{\tau_\nu \tau_{\nu+1}} < \sigma, \quad \overline{t_\nu t_{\nu+1}} < \sigma$$

ist und demgemäß die folgenden Relationen bestehen

$$20) \qquad \overline{\tau_\nu t_\nu} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma, \quad \overline{t_{\nu+1} \tau_\nu} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma,$$

$$21) \qquad \overline{\tau'_\nu \tau_\nu} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma, \quad \overline{\tau'_\nu \tau_{\nu+1}} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma.$$

Aus den beiden letzten folgt zunächst, daß mit t auch der Grenzpunkt τ_ω der Folge $\{\tau_\nu\}$ unerreichbar ist, und zwar ist die zugehörige Wegdistanz sicher größer als $\tfrac{1}{2}H - \tfrac{3}{2}\sigma$.

Auf die Folgen $\{t_\nu\}$ und $\{\tau_\nu\}$ wenden wir nun die oben benutzte Beweismethode an. Zwei Punkte τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ bestimmen zunächst wieder zwei Kurvenbögen C_ν und C'_ν, deren Breite, falls t unerreichbar ist, nicht gegen Null convergirt, was ebenso folgt, wie in § 3. Das gleiche haben wir für jede andere zusammenhängende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{T}$ nachzuweisen, die τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ enthält, der also auch Punkte von $J(\mathfrak{C})$ angehören. Sei dazu $\mathfrak{P}$ ein Polygon, das die Kurve $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ aus so approximirt, daß auch τ_ν, $\tau_{\nu+1}$ und $t_{\nu+1}$ von ihm approximirt werden, sei A_ν das Teilgebiet, das die zu τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ führenden Wege λ_ν und $\lambda_{\nu+1}$ bestimmen, P_ν wieder der zugehörige Streckenzug, endlich π_ν, $\pi_{\nu+1}$, $p_{\nu+1}$ seine Kreuzungspunkte mit den Wegen λ_ν, $\lambda_{\nu+1}$ und $l_{\nu+1}$, so daß (§ 1, 8)

$$\overline{\tau_\nu \pi_\nu} < \tfrac{3}{2}\varepsilon, \quad \overline{\tau_{\nu+1} \pi_{\nu+1}} < \tfrac{3}{2}\varepsilon, \quad \overline{t_{\nu+1} p_{\nu+1}} < \tfrac{3}{2}\varepsilon$$

ist. Man hat dann weiter

$$\overline{\tau_{\nu+1} p_{\nu+1}} > \overline{t_{\nu+1} \tau_{\nu+1}} - \overline{t_{\nu+1} p_{\nu+1}}, \quad \overline{\tau_\nu p_{\nu+1}} > \overline{t_{\nu+1} \tau_\nu} - \overline{t_{\nu+1} p_{\nu+1}}$$

und daher

$$22) \qquad \overline{\tau_{\nu+1} p_{\nu+1}} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma - \tfrac{3}{2}\varepsilon, \quad \overline{\tau_\nu p_{\nu+1}} > \tfrac{1}{2}\eta_\nu - \tfrac{3}{2}\sigma - \tfrac{3}{2}\varepsilon.$$

Die Wege λ_ν, $\lambda_{\nu+1}$ und P_ν bestimmen nun ein Polygon, und die Menge T'_ν liegt außerhalb dieses Polygons. Man kann daher ein die Menge T'_ν approximirendes Polygon $\mathfrak{P}'$ so bestimmen, daß es ebenfalls außerhalb dieses Polygons enthalten ist. Jedes derartige Polygon muß andererseits die Punkte, τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ einschließen und den Punkt $p_{\nu+1}$ ausschließen; für seine Breite folgt daher

$$23) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{P}') > \overline{\tau_{\nu+1} p_{\nu+1}} - 3\varepsilon \text{ und } \mathfrak{B}(\mathfrak{P}') > \overline{\tau_\nu p_{\nu+1}} - 3\varepsilon$$

und damit ist gemäß § 1, 7 der verlangte Beweis erbracht. Für jede zusammenhängende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{T}$, die τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ enthält, gilt also, daß ihre Breite größer als $\frac{1}{3} H'$ ist, wo H' beliebig wenig kleiner ist als H.

Alles übrige ergibt sich nun genau wie in § 4; denn der dort geführte Beweis beruht nur darauf, daß wenn es einen unerreichbaren Punkt gäbe, jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$, zu der zwei consecutive Punkte t_ν und $t_{\nu+1}$ gehören, eine größte Breite besitzen würde, die für $\lim \nu = \infty$ nicht gegen Null convergirt.

Um zu zeigen, daß die Erreichbarkeitsbedingung auch hinreichend ist, benutze ich einen früher bewiesenen Lehrsatz, der folgendermaßen lautet:

Ist eine einfache Curve $\mathfrak{C}$ umkehrbar eindeutig und stetig auf den Umfang eines Quadrates $\mathfrak{Q}$ bezogen, so kann man diese Abbildung zu einer umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung der von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Q}$ eingeschlossenen Flächenstücke erweitern[1]).

Sei nun $\mathfrak{T}$ die bezügliche Fläche, $\mathfrak{C}$ die sie begrenzende einfache Curve und $\mathfrak{Q}$ ein Quadrat, so können wir zunächst die Curve $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{Q}$ also auch die Menge $\mathfrak{T}$ auf die Quadratfläche $\mathfrak{F}$ umkehrbar eindeutig und stetig beziehen; seien

24) $$\xi = F(x, y), \quad \eta = \Phi(x, y)$$

die bezüglichen Funktionen, wo ξ, η ein Punkt von $\mathfrak{T}$ und x, y ein Punkt von $\mathfrak{F}$ ist. Andererseits können wir nach Peano die Punkte der Quadratfläche $\mathfrak{F}$ eindeutig und stetig auf die Strecke abbilden, durch die Funktionen

$$x = f(s), \quad y = \varphi(s).$$

Daraus folgt unmittelbar

25) $$\xi = f_1(s), \quad \eta = \varphi_1(s),$$

und es sind $f_1(s)$ und $\varphi_1(s)$ stetige Funktionen von s, die für $0 \leqq s \leqq 1$ jeden Punkt ξ, η mindestens einmal darstellen.

Der Kürze halber soll die Menge $\mathfrak{T}$ ein Peanosches Gebiet heißen.

Da man bei der Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{Q}$ zwei Gegenecken von $\mathfrak{Q}$ zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{C}$ zuweisen kann, so ist die Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf die Strecke wieder so möglich, daß den Punkten 0 und 1 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{C}$ entsprechen.

---

1) vgl. Math. Ann. 62, p. 319.

§ 6. Beweis des Satzes für eine beliebige endliche Zahl von Gebieten.

Falls die Menge $\mathfrak{T}$ die Ebene in eine endliche Zahl von Gebieten zerlegt, so sei J' ein solches, das nicht zu $\mathfrak{T}$ gehört, und $\mathfrak{T}'$ seine Grenze. Dann kann die Erreichbarkeit der Punkte von $\mathfrak{T}'$ genau nach der Methode des vorigen Paragraphen bewiesen werden. Der Unterschied ist nur der, daß $\mathfrak{T}'$ keine geschlossene Curve zu sein braucht, doch ist dies ohne Belang. Denn man schließt analog, wie in § 5, daß zwar zusammenhängende Teilmengen von $\mathfrak{T}$, die zwei Punkte t'_ν und $t'_{\nu+1}$ von $\mathfrak{T}'$ enthalten, auch so möglich sind, daß ihnen Punkte von $\mathfrak{A}(J')$ zugehören; für jede solche Teilmenge, gelten aber die Schlüsse von § 5; sie zeigen, daß auch hier jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$, zu der die Punkte t'_ν und $t'_{\nu+1}$ gehören, eine nicht gegen Null convergirende Breite besitzt, falls für irgend ein Teilgebiet von J' der Grenzpunkt t' einer Folge $\{t'_\nu\}$ nicht erreichbar ist. Damit ist der erste Teil des Satzes wiederum bewiesen.

Für den Beweis des zweiten Teiles wollen wir uns zunächst jedes Peanosche Gebiet, das zur Menge $\mathfrak{T}$ gehört, falls es nicht von selbst einfach zusammenhängend ist, durch einfache Wege in einfach zusammenhängende Bestandteile zerlegt denken. Man erhält dann eine immer noch endliche Zahl von Gebieten, deren Grenzpunkte ebenfalls noch allseitig erreichbar sind. Sei N ihre Zahl.

Ich stütze mich nun weiter auf den Satz, daß es möglich ist, diese Gebiete in einem Zuge zu durchlaufen, wobei allerdings ein Gebiet mehrfach berührt werden darf. Man gehe dazu von einem Gebiete J_1 aus, gehe von ihm in ein benachbartes Gebiet J_2, alsdann in ein Gebiet J_3, das zu J_2 benachbart ist und fahre so fort bis das letzte erreichte Gebiet an lauter Gebiete grenzt, die schon durchlaufen sind. Hat man dann noch nicht alle N Gebiete durchlaufen, so zerfallen die nicht durchlaufenen Gebiete in eine endliche Zahl zusammenhängender Gebietsgruppen, deren jede an mindestens eines der schon durchlaufenen Gebiete grenzt. Ist $\mathfrak{T}'$ eine solche Gruppe, so wird der Satz bewiesen sein, falls man $\mathfrak{T}'$ in einem Zuge durchlaufen kann. Ist nämlich J_ν eines der schon durchlaufenen Gebiete, an das ein Gebiet J' von $\mathfrak{T}'$ grenzt, so braucht man nur noch die Wege von J_ν zu J' und von J' zu J_ν hinzuzufügen. Da aber hier eine Reduction in der Anzahl der Gebiete eintritt, so ist der Satz damit bewiesen.

Sei nun

$$J', J'', \dots J^{(\lambda)} \dots J^{(\varrho)}$$

die so bestimmte Reihenfolge, und seien

$$\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'', \dots \mathfrak{T}^{(\lambda)}, \dots \mathfrak{T}^{(\varrho)}$$

die bezüglichen ihnen entsprechenden Mengen, so daß $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ die Grenze von $J^{(\lambda)}$ ist, oder aber, falls $J^{(\lambda)}$ ein Peanosches Gebiet ist, mit $J^{(\lambda)}$ und seiner Grenze identisch, so haben je zwei consecutive Mengen Punkte gemein und man wähle den Punkt $t^{(\lambda)}$ auf $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ so, daß er gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{T}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{T}^{(\lambda+1)}$ ist. Man zerlege dann die Einheitsstrecke in ϱ Teile $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_\lambda \dots \sigma_\varrho$ und bilde $\mathfrak{T}^{(\lambda+1)}$ eindeutig und stetig so auf das Intervall $\sigma_{\lambda+1}$ ab, daß $t^{(\lambda)}$ und $t^{(\lambda+1)}$ den Endpunkten von $\sigma_{\lambda+1}$ entsprechen, was, wie gezeigt, möglich ist.

Dann ist damit auch die ganze Menge $\mathfrak{T}$ eindeutig und stetig auf die Einheitsstrecke abgebildet und damit ist der an der Spitze stehende Satz in seinem ganzen Umfang bewiesen.

§ 7. Ueber Punktmengen, die eindeutige und stetige Bilder beliebiger perfecter linearer Mengen sind.

Der Begriff der stetigen Abbildung resp. der stetigen Funktion ist bekanntlich von der continuirlichen Strecke auf jede perfecte lineare Menge als Bereich der unabhängigen Variabeln übertragbar. Jedes eindeutige und stetige Abbild einer geschränkten perfecten Menge ist nach bekannten allgemeinen Sätzen ebenfalls geschränkt und perfect; andere gestaltliche Eigenschaften kommen ihm aber nicht mehr zu. Diese Tatsache begründet einen prinzipiellen Unterschied zwischen den stetigen Funktionen einer continuirlichen und denen einer zusamenhanglosen Veränderlichen. Es besteht also der Satz:

Jede beliebige geschränkte perfecte Menge eines R_n kann eindeutiges und stetiges Abbild einer geschränkten linearen perfecten Menge sein.

Dieser allgemeine Satz läßt sich sehr einfach folgendermaßen beweisen. Sei wieder $\mathfrak{T}$ die bezügliche Menge, so lege man um sie einen n-dimensionalen Würfel W_n und bilde ihn zunächst nach Peanoscher Methode eindeutig und stetig auf die Einheitsstrecke $0 \leq s \leq 1$ ab. Dann ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge von W_n, und ihr entspricht daher eine gewisse Teilmenge S der Einheitsstrecke, die $\mathfrak{T}$ zu Bildpunkten hat, und zwar soll S die Gesamtheit aller

dieser Bildpunkte sein. Dann ist zunächst klar, daß S eine abgeschlossene Menge ist. Ist nämlich $\{s_\nu\}$ eine Punktfolge mit dem Grenzpunkt s_ω und $\{t_\nu\}$ die entsprechende Punktfolge von $\mathfrak{T}$, so muß wegen der Stetigkeit dem Punkte s_ω der Punkt t_ω entsprechen. Da aber $\mathfrak{T}$ eine abgeschlossene Menge ist, so enthält sie den Punkt t_ω und da S die Gesamtheit aller Bildpunkte darstellt, so gehört der Punkt s_ω der Menge S an.

Die Menge S läßt sich nun weiter, falls sie nicht etwa schon perfect ist, auf den in ihr enthaltenen perfecten Bestandteil $\mathfrak{S}$ reduciren. In diesem Fall hat man nämlich bekanntlich

$$S = R + S_1,$$

wo R eine abzählbare Menge isolirter Punkte bedeutet. Sei nun t_1 ein Punkt von $\mathfrak{T}$, der Bildpunkt eines Punktes r von R ist, so ist doch gleichzeitig t_1 Grenzpunkt unendlich vieler Punkte von $\mathfrak{T}$, die daher auch Bildpunkte unendlich vieler Punkte von S sind und falls s_1 einer ihrer Grenzpunkte ist, so muß ihm wegen der Stetigkeit der Punkt t_1 entsprechen. Der Punkt s_1 gehört aber notwendig zu S_1. Jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ ist also Bildpunkt eines Punktes von S_1. Man hat nun weiter

$$S_1 = R_1 + S_2,$$

und folgert ebenso, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ auch Bildpunkt eines Punktes von S_2 ist u. s. w. Dieser Schluß gilt aber nicht blos von ν auf $\nu+1$, sondern auch von $\{\nu\}$ auf ω, wie leicht ersichtlich ist. Sei nämlich

$$S = \sum R_\nu + S_\omega,$$

so ist folgendes nachzuweisen. Man hat anzunehmen, daß es in unendlich vielen Teilmengen R_ν je einen Punkt r_ν giebt, der den Punkt t als Bildpunkt besitzt und zu zeigen, daß dieser Punkt auch Bildpunkt eines Punktes von S_ω ist. In der Tat gehört aber jeder Grenzpunkt der unendlich vielen Punkte r_ν zu S_ω und ihm muß wegen der Stetigkeit wieder der Punkt t selbst entsprechen. Damit ist die Zulässigkeit der transfiniten Induktio erwiesen. Beachtet man nun, daß die Zerlegung

$$S = R + \mathfrak{S},$$

wo $\mathfrak{S}$ der perfecte Bestandteil von S ist, durch alleinige Anwendung der Schlüsse von ν auf $\nu+1$ und von $\{\nu\}$ auf ω erreichbar ist, so folgt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ in der perfecten Menge $\mathfrak{S}$ einen Bildpunkt besitzt. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Für die stetige Abbildung auf zusammenhangslose lineare Mengen wird also weder der Zusammenhang noch auch die Erreichbarkeit gefordert. Beispielsweise kann auch jedes endliche Stück der Curve $y = \sin\frac{1}{x}$, wenn man es als abgeschlossen nimmt, stetiges Abbild einer solchen Menge sein.

Ueber das Auftreten der Gattungen und Gruppen von Ammonitiden in den einzelnen Zonen der Unteren Kreide Norddeutschlands.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 12. Januar 1907.

Als ich meine Arbeit über die Ammonitiden des norddeutschen Neokom veröffentlichte, hob ich gleich hervor, daß die von mir beschriebenen Arten nur einen Theil der betreffenden Faunen bildeten, da ich eine Anzahl von Formen wegen ungenügender Erhaltung unberücksichtigt lassen mußte, und daß voraussichtlich durch neue Aufschlüsse und neue Fundorte es erforderlich werden würde, noch weitere Zonen zu unterscheiden. So hatte ich später Veranlassung genommen, die Schichten mit Crioceras rarocinctum v. K. und C. Strombecki v. K., die „Crioceras-Bank" G. Müller's, von den darunter liegenden Thonen des oberen Hauterivien mit Simbirskites Phillipsi zu trennen und als besondere Stufe zum Unteren Barrêmien zu stellen.

Mancherlei Wichtiges hat neuerdings auch Stolley mitgetheilt (Ueber alte und neue Aufschlüsse und Profile in der unteren Kreide Braunschweigs und Hannovers, Braunschweig 1906), aber auch diese Angaben bedürfen noch mancher Vervollständigungen und Berichtungen.

Durch sorgfältige Ausbeutung der Thongrube bei Jetenburg habe ich allmählich von dort eine Reihe besserer Exemplare erhalten, und andere neue Formen sind in einer neuen Thongrube bei Lindhorst, östlich Stadthagen, gefunden worden, wie sie übrigens auch in den alleroberaten Schichten der Thongrube an den Schießständen bei Jetenburg vorkommen, allerdings fast stets

in kleineren, beschädigten Exemplaren und oft ohne Loben. Diese Schichten habe ich als Zone des Polyptychites Clarkei unterschieden. Die übrigen Schichten von Jetenburg scheinen aber 2 oder 3 verschiedenen Zonen zuzugehören, soweit sich dies nach dem Vorkommen von zum Theil verschiedenen Arten zu verschiedenen Zeiten beurtheilen läßt, in denen verschiedene Schichten der Thone ausgebeutet wurden; es ist unmöglich, etwa selbst Ammoniten aus dem anstehenden Gestein zu entnehmen, da sie doch ziemlich selten und noch seltener für eine genaue Bestimmung genügend erhalten sind. Es sind, ebenso wie bei Lindhorst, ausschließlich Polyptychites-Arten, und ich habe eine Beschreibung derselben, soweit sie eine solche gestatten, kürzlich vollendet.

Es sei hier auch noch bemerkt, daß ich zwar von den beiden Stufen des oberen Valanginien die mit Polyptychites terscissus und Crioceras curvicosta mit Vorbehalt für die jüngere gehalten hatte, weil darin zuerst Hopliten auftreten, die mit solchen unseres Hauterivien einige Verwandtschaft aufweisen, daß aber in den unteren Thonen der Thongrube von Ottensen in den letzten Jahren einige wenige Exemplare gefunden worden sind, welche für diesen Horizont charakteristisch sind, während in den Thoneisensteinknollen der darüber folgenden Schichten einige Bruchstücke von Hoplitides Arnoldi vorgekommen sind. Diese Art konnte ich aber aus der Zone des Saynoceras verrucosum und des Olcostephanus (Astieria) psilostomus von Hoheneggelsen anführen, so daß diese Zone somit die jüngere von beiden ist.

Das Valanginien enthält daher jetzt folgende Eintheilung: 5. Zone des Saynoceras verrucosum und Hoplitides Arnoldi; 4. Z. d. Polyptychites terscissus und Crioceras curvicosta; 3. Z. d. P. Clarkei; 2. Z. d. P. Brancoï und P. Keyserlingi (wahrscheinlich ist noch abzutrennen eine obere Stufe mit P. ascendens und eine unterste mit P. bullatus; 1. Z. d. P. diplotomus und Oxynoticeras Gevrili.

Bei der Untersuchung der verschiedenen Faunen hat sich nun immer deutlicher herausgestellt, daß, ähnlich wie in den Zonen der Juraformation und Anderer mehr nicht nur gewisse Gattungen, sondern auch gewisse Gruppen, die man zu Untergattungen oder Gattungen erheben könnte, für bestimmte Stufen recht bezeichnend werden, so daß schon das Vorkommen von einer vielleicht nicht einmal sicher bestimmbaren Art einer solchen Gruppe meistens schon auf einen speciellen Horizont schließen läßt.

Zu bemerken ist vor Allem, daß die Faunen des unteren Valanginien zwar eine recht große Zahl von Arten enthalten, aber

ganz vorwiegend solche der Gattung Olcostephanus (Polyptychites), so daß unstreitig nahe Beziehung zu der ebenfalls sehr eintönigen Fauna unserer obersten Jurabildungen existiert, soweit in diesen überhaupt Ammoniten vorkommen, nämlich mit den Amm. gigas, A. Gravesi und A. portlandicus der A. gigas-Schichten. Dagegen fehlen namentlich in den unteren Zonen alle die Phylloceras und Hoplites, welche im südwestlichen Frankreich in den gleichalterigen Schichten in so großer Zahl auftreten und als Nachfolger der Arten der betreffenden Gattungen gelten können, welche dort im obersten Jura verbreitet sind. Die recht seltenen Polyptychiten, welche zugleich im Valanginien auftreten, sind verkieste Jugendformen und lassen sich vorläufig nicht mit den großen Exemplaren der norddeutschen Arten identifizieren.

Auffällig ist aber das gleichzeitige, unvermittelte Auftreten der Oxynoticeras-Arten (Platylenticeras Hyatt = Garnieria Sayn) im untersten Valanginien Südfrankreichs, Norddeutschlands etc.

Valanginien.

1) Im untersten Valanginien, in der Gevrili-Zone, finden sich neben dem O. Gevrili, O. heteropleurum, O. Marcoui etc. auch einige Polyptychites-Arten, wie P. diplotomus, P. latissimus etc., die sich dadurch auszeichnen, daß sie bauchig und stark involut sind, eine ziemlich scharfe Nabelkante, zahlreiche Nabelknoten und in deren Fortsetzung meist zweimal gespaltene Rippen besitzen und dabei breite und lange Stämme der Loben haben. Vereinzelte Formen dieser Gruppe finden sich noch bis zum oberen Valanginien, doch weichen sie meistens in dem einen oder anderen jener Merkmale etwas ab.

2) Die Zone des Polyptychites Brancoi dürfte noch in 2 oder gar 3 Zonen zu theilen sein und enthält vorwiegend weniger bauchige aber ziemlich stark involute Polyptychites-Arten mit besser abgerundeter Nabelkante und stärkeren, zuweilen spitzigen aber weniger zahlreichen Nabelknoten — meistens etwa 11 bis 13 pro Windung; dieselben erheben sich bei ausgewachsenen Exemplaren oft auf der Mitte der Wohnkammer besonders hoch, erhalten größere Abstände, werden später wieder niedriger, und die von ihnen auslaufenden Rippen biegen sich immer schärfer nach vorn, jedoch ohne stärkere Vorbiegung auf der Externseite. Im untersten Theile der Zone treten bauchige Formen wie P. bullatus auf, im oberen aber auch einzelne Arten mit 15 bis 16 Nabelknoten pro Windung, und zu oberst schon eine flachere Form mit zahlreichen feinen Rippen, P. ascendens.

3) Die Zone des Polyptychites Clarkei führt vorwiegend Formen mit weniger starken, aber etwas zahlreicheren Nabelknoten, meistens zwischen 15 und 18 pro Windung, schwächeren Rippen, ziemlich stark involuten Windungen mit rundlichem Querschnitt und treppenförmigem Nabel. Die Loben haben meist ziemlich dicke, oft nach unten verjüngte Stämme. Es finden sich aber auch einzelne Formen mit mehr als 20 Nabelknoten, welche einen Uebergang zu den Formen der nächsten Stufe bilden.

4) Die Zone des Polyptychites terscissus und P. bidichotomus hat sehr bezeichend flachere Formen ohne eigentliche Knoten auf der Nabelkante, höchstens knotigen Anschwellungen der Rippen, welche sich mehrfach spalten und gewöhnlich auf der Externseite noch etwas stärker vorbiegen. Diese Gruppe könnte mit Dichotomites bezeichnet werden. Bei einzelnen sehr groß werdenden Arten, wie P. obsoletecostatus und P. Grotriani Neum. et Uhlig werden aber im Alter die Rippen auf den Seitenflächen ziemlich undeutlich, so daß ein gewisser Uebergang zu den Craspedites-Arten existirt, deren Skulptur in der Jugend auch wesentlich deutlicher ist. In dieser Zone treten bei uns die ersten Hopliten auf, von denen Crioceras curvicosta ein wenig tiefer zu liegen scheint.

5) Die Zone des Saynoceras verrucosum und Olcostephanus (Astieria) psilostomus enthält S. verrucosum und Hoplitides-Arten, Hopliten mit unsymmetrisch-zweitheiligen Lateralloben, wie H. Brandesi und H. Arnoldi, welche mit französischen und schweizerischen Typen des obersten Valanginien mindestens nahe verwandt sind, ferner Crioceras und die 5 einzigen Craspedites-Arten, deren Horizont sicher festgestellt werden konnte, und die ersten Arten der Gattung Astieria, welche dann noch in das Untere Hauterivien hinaufreicht.

Hauterivien.

6) Die Zone des Hoplites radiatus und H. noricus, mit der Fauna der Mergel von Hauterive entspricht jedenfalls dem untersten Hauterivien der Schweiz und Südfrankreichs und enthält zuerst auch zahlreiche Hopliten neben Crioceras-Arten, wie C. Roemeri Neum. et Uhlig, und endlich die letzten Astieria-Arten, abgesehen von der sehr zweifelhaften A. cf. Atherstoni von Ahlum.

Baumberger stellte nun zwar in neuester Zeit die „Astierien-Zone“ noch in das Valanginien, und bei Stadthagen waren zeitweise unter den Hoplites noricus-Schichten graue Mergel mit Astieria Astieri, A. convoluta und anderen fast durchweg ver-

drückten Formen aufgeschlossen, neben denen sich ein großes Bruchstück fand, das nach Gestalt und Skulptur zu Phylloceras Winkleri Uhlig gehören könnte, jedenfalls zur Zeit die erste Kreide-Art der Gattung Phylloceras in Norddeutschland sein würde. Ich möchte diese Schicht aber vorläufig nicht als besondere Zone ansehen, da die Astieria-Arten sich auch mit den Hoplites noricus etc. zusammen finden, so am Elligser Brink, im Hilsbornsgrund, bei Ihme etc. Eine weitere Gliederung dieser Zone scheint nicht möglich zu sein. Die direkte Auflagerung der folgenden Zone wurde in neuerer Zeit in der Nähe von Hannover beobachtet.

7) Die Zone des Crioceras capricornu ist durch diese Art bezeichnet, die sich öfters allein darin findet, oder begleitet von Crioceras Wermbteri, zuweilen auch mit C. semicinctum Roem. und C. torulosum, doch treten diese wohl auch allein auf, wie es scheint. Auffällig ist das Fehlen der nicht-evoluten Hopliten vom Beginn dieser Zone an.

8) Die Zone des Simbirskites (Olcostephanus) Phillipsi ist in ihrer Fauna noch ungenügend bekannt, da sie in ihrer Thon-Facies bisher fast nur sehr kleine, verkieste Jugendstadien von Ammoniten geliefert hat oder größere mehr oder minder stark verdrückte; es sind aber fast ausschließlich Simbirskites-Arten und diese Gattung, zu der ich auch die ursprünglich als Cruspedites tenuis beschriebene Form jetzt rechne, ist auf diese Zone beschränkt, wie es scheint. Zweifelhaft ist es immerhin, ob ein und derselben Zone alle die Arten der Gattung angehören, welche O. Weerth aus dem Teutoburger Wald-Sandstein beschrieben hat, sowie die, welche ich selbst nach den beschädigten und abgeriebenen Phosphorit- und Schwefelkies-Steinkernen von Helgoland aufführte.

Barrêmien.

9) Die Zone des Crioceras rarosulcatum und C. Strombecki, die „Crioceras-Bank“ G. Müller's, das unterste Barrêmien, ist durch eine Bank oder eine Geodenlage von grauem, mergeligem Kalk vertreten und wird durch Thone überlagert, welche Stolley als Zone des Belemnites Speetonensis unterscheiden will, aus denen aber Ammonitiden mir nicht bekannt sind.

10) Die Zone mit Crioceras fissicostatum und Ancyloceras crassum wird sonst noch durch die kleineren An-

cyloceras-Arten und durch Hamites minutus bezeichnet und ist die nächste z. Z. unterscheidbare über der vorhergehenden.

11) Die Zone des Crioceras elegans, nur von Hildesheim bekannt, mit größeren Crioceras mit kräftigen, Spitzen oder Knoten tragenden Rippen und ganz freien Windungen.

12) Die Zone des Crioceras Andreae und C. Denckmanni enthält mittelgroße Crioceras-Formen, deren Windungen sich nahezu berühren und im Alter ziemlich glatte Rippen tragen, früher aber in der Regel sowohl Extern- als auch Lateral- und Nabel-Knoten besitzen. In der tiefen alten Thongrube bei Mellendorf fanden sich außer diesen Crioceras auch nicht selten Bruchstücke des großen Ancyloceras costellatum, immerhin in etwas anderer Erhaltung; ob in denselben Schichten, konnte ich nicht ermitteln, da die Thongrube gerade aufgegeben wurde, als ich sie zum ersten Mal besuchte. Bei Hildesheim fehlt diese Art ganz, aber zwischen der Zone mit C. Denckmanni und der folgenden liegen Schichten mit Feld und Wiese bedeckt, in denen allenfalls A. costellatum stecken könnte, der dann eine besondere Zone bezeichnen würde.

13) Die Zone des Ancyloceras innexum enthält bei Hildesheim außer Belemniten anscheinend nur diese eine Art, und es scheint, als ob dies auch bei Mellendorf der Fall wäre, da sie hier seit längeren Jahren nicht mehr vorgekommen ist; wohl aber fanden sich weiter nach Westen, vermuthlich in etwas höheren Schichten vereinzelte Exemplare von Crioceras pingue nebst Hamulina nitida, welche mir nur von dort bekannt sind und vielleicht eine besondere Zone bezeichnen. Was hier zunächst darüber folgt, ist zur Zeit nicht bekannt. Zu Ancyloceras innexum könnten aber auch beschädigte und meist verdrückte Stücke gehören, welche in mürben, grauen Kalken in den untersten Schichten einer Thongrube bei Behrenbostel gefunden worden sind, zusammen mit Crioceras cf. robustum, den ich jetzt für den Alterzustand von Ancyloceras trispinosum halten muß, so daß vielleicht die 14. Zone des A. trispinosum (C. robustum) mit der des A. innexum zu vereinigen sein wird. (Siehe Anmerkung am Schluß.)

Aptien.

Das Aptien (incl. Bedoulien) ist von mir bisher im nordwestlichen Deutschland ganz ebenso gegliedert worden, wie in Frankreich, und enthält wieder nicht-evolute Hopliten nebst Oppelien, in seiner untersten Zone (15 oder 16) der des H. Weissi, namentlich Ancyloceras Urbani, bei Kastendamm aber auch Hoplites Deshayesi,

Oppelia nisoides und eine Anzahl kleinerer Ancyloceras mit jedenfalls sehr kleiner Spirale, dem ersten Douvilleiceras, Belemnites Ewaldi und Duvalia Grasi etc., Hierüber folgen dann wohl die eigentlichen Schichten mit H. Deshayesi.

Nach den übereinstimmenden Angaben von G. Müller und Stolley liegen aber bei Timmern unter den Deshayesi-Schichten die Schichten mit Hoplitides Bodei und Ancyloceras Urbani, aus welchen Stolley (Aufschlüsse der unteren Kreide in Braunschweig und Hannover S. 12) den Hoplites Weissi anführte, so daß der Gedanke nahe lag, es wäre dies die Zone des H. Weissi, in welcher an Stelle des H. Deshayesi der H. Bodei und laeviusculus aufträten. Das Exemplar, welches Herr Stolley als H. Weissi angesprochen hatte, stimmt aber in der Gestalt nicht genügend mit dieser Art überein, und die Lobenlinie, welche sich gut frei legen ließ, weicht durch weit kürzere Loben davon ab und gleicht eher der von großen Formen, die ich mit zu H. laeviusculus gestellt hatte. Es scheint also hier ein Horizont (15?) vorzuliegen, der bei Kastendamm fehlt, falls man nicht annehmen will, daß die Fauna von Kastendamm (abgesehen von Anc. Urbani, Oppelia nisoïdes und den Belemniten) bei Timmern durch die Hoplitiden vertreten sei. Stolley's „abgeplattete Mutation des Bel. brunsvicensis" gehört jedenfalls dem unteren Aptien an.

Die Zonen des H. Deshayesi (17) und des H. furcatus (18) sind in den letzten Jahren nicht näher als bisher bekannt geworden, und über das Alter der Schichten, welche in einzelnen Thongruben östlich von Sarstedt anstehen und fast sämmtlich dem unteren Aptien angehören dürften, habe ich kein sicheres Urtheil. Es sei aber hervorgehoben, daß im oberen Aptien und im Albien wieder große Phylloceras bei uns auftreten, wenn auch recht selten.

Albien.

Das Albien (Gault der Engländer) wurde bisher in zwei Abtheilungen getheilt, die des Amm. Milletianus und die Minimus-Thone. Wie G. Müller und Stolley angaben, liegt an der Basis Sonneratia cf. bicurvata Mich., aber die Vorkommnisse, die Stolley anführte, gehören verschiedenen Arten an, von welchen keine mit der ächten S. bicurvata übereinstimmt, und welche wohl in verschiedenen Niveaus liegen, so daß hierüber zur Zeit noch weitere Untersuchungen erforderlich sind.

Das untere Albien enthält aber an einzelnen Stellen in großer Zahl Hoplites tardefurcatus Leym., der vielleicht für eine besondere Zone 21)? bezeichnend ist, ferner Parahoplites- nebst Dou-

villeiceras (Acanthoceras)-Arten mit rundlichem Querschnitt der Windungen und erhabenen Rippen, welche einfach oder gespalten über die Röhre gerade hinweglaufen, öfters mit Knoten oder doch Kanten versehen. 20) Eine Fauna solcher Formen, allerdings nur in sehr kleinen Jugend-Exemplaren, erwähnte Stolley aus dem untersten Albien von Bettmar, und dieses könnte füglich ein Aequivalent der Fauna der Zone von Clansaye sein, die Jacob in neuester Zeit beschrieb und dem untersten Albien zurechnete. Er bemerkte dabei, daß im südwestlichen Frankreich Parahoplites-Arten aus der Verwandtschaft des P. Milleti schon im obersten Aptien beginnen und zusammen mit Douvilleiceras-Arten aus der Verwandtschaft des D. Martini vorkommen, als Bindeglieder zwischen Aptien und Albien. Das Gleiche könnte also füglich auch bei uns noch beobachtet werden.

22) Die Zone des Ammonites (Parahoplites) Milleti dürfte auf die Fauna von Algermissen-Vöhrum zu beschränken sein, deren Ammoniten-Fauna ich unternommen habe, zu beschreiben. Der echte Hoplites tardefurcatus kommt darin nicht mehr vor.

Das untere Albien würde somit 3 oder 4 verschiedene Zonen enthalten. Die Faunen des oberen Albien oder Gault, der Minimus-Thone und Flammenmergel 23) sind ja schon vor langer Zeit durch von Strombeck aufgeführt worden und stimmen mit ihren Anahoplites- und Hoplites-Arten sehr nahe mit denen Englands und Frankreichs etc. überein. Es sind vorwiegend Formen mit kantiger Externseite oder einer tiefen Einsenkung darauf, oft mit kräftigen Rippen. Ob sie bei uns eine Gliederung in einzelne Zonen zulassen, läßt sich wohl zur Zeit nicht entscheiden; von Strombeck stellte dies in Abrede.

Es lassen sich daher folgende Stufen nach Ammonitiden im nordwestlichen Deutschland unterscheiden:

Valanginien.

1) Gevrili und diplotomus-Schichten = Oxynoticeras (Platylenticeras)-Sch.
2) Brancoi- und Keyserlingi-Schichten } Polyptychites-Schichten.
3) Clarkei-Schichten } Polyptychites-Schichten.
4) Terscissus-Schichten (Dichotomites-Sch.).
5) Verrucosum- und Arnoldi-Sch. (Craspedites-Sch., Beginn der Astierien).

Hauterivien.

6) Radiatus- und Noricus-Schichten. Ende der Astierien, Acanthodiscus und Lyticoceras und der Belemniten aus der Verwandtschaft des B. subquadratus.
7) Zone des Crioceras capricornu.
8) Simbirskites-Schichten, Zone des S. Phillipsi.

Barrêmien.

Fast ausschließlich evolute Formen, daneben Desmoceras, Belemnites brunsvicensis.

9) Zone des Crioceras rarosulcatum.
10) Zone des C. fissicostatum und Anc. crassum.
11) Zone des Cr. elegans. Formen mit starken Rippen.
12) Zone des Cr. Andreae und C. Denckmanni, mittelgroße Formen, deren Windungen sich nahezu berühren.
12a)? Zone des Anc. costellatum.
13) Zone des Ancyloceras innexum.
14) ? Zone des Crioceras robustum (trispinosum), nach Angabe Stolley's an der oberen Grenze schon mit Oppelia.

Aptien.

Oppelia nisoïdes etc., Belemnites Ewaldi.

15) ? Zone des Hoplitides Bodei } Ancyloceras Urbani.
16) Zone des H. Weissi }
17) Zone des H. Deshayesi.
18) Zone des Acanthoceras (Douvilleiceras) Martini.

Albien (Gault)

unten Belemnites Strombecki oben (23) B. minimus.

19) Zone der Soenneratia cf. bicurvata.
20) Zone von Clansaye.
21) Tardefurcatus-Schichten.
22) Milleti-Schichten.
23) Zone des A. interruptus etc.

Anmerkung. Zu den Jugendformen (Leptoceras), die ich als Ancyloceras trispinosum und A. obtusatum beschrieb (Ammonitiden S. 366 und 369, Tafel 35 fig. 2—8 und 9—10), habe ich seitdem einige größere Schwefelkieskerne erhalten, welche freilich höchstens je eine Windung enthalten, aber zum Theil bis an das Ende gekammert sind und bis zu 125 mm Durchmesser haben. Die ersten erhaltenen Windungen einzelner Stücke schließen sich aber in Gestalt, Skulptur und Loben ganz an die letzten erhaltenen jener Arten an, so daß ich sie für die Altersformen dieser halten muß

und es dahin gestellt lasse, ob die gestreckten Bruchstücke, die ich darauf bezogen hatte, lediglich Monstrositäten sind, wie sie bei den Leptoceras-Formen öfters vorzukommen scheinen. Es hat sich aber weiter ergeben, daß das als Crioceras robustum beschriebene Stück zwar etwa eine halbe Windung mehr erreicht, als das größte jener Exemplare, aber derselben Art angehört, also Altersform von Anc. trispinosum ist; dieser Name ist daher zu den Synonymen zu stellen, während die andere Art Crioceras obtusatum heißen muß. Der erste Laterallobus liegt bei diesen Arten ziemlich genau auf der Mitte der Seitenflächen. Zu diesen Arten dürften auch meist etwas verdrückte aber ziemlich vollständige Exemplare gehören, welche sich in grauem, mergeligem Kalk in den untersten Schichten einer Thongrube bei Kastendamm-Behrenbostel gefunden haben, in nahezu denselben Schichten mit Desmoceras Hoyeri, unter den Schichten des Aptien mit Oppelia nisoïdes etc.

In der Vieweg'schen Thongrube an der Moorhütte bei Volkmarode finden sich nicht selten im Thon kleinere, von mir zu Oppelia nisoïdes gerechnete Formen, und aus der Kalkbank mit Crioceras sparsicosta besitzt Herr Stolley auch größere, deren Lobenlinie der von jener Art äußerst ähnlich ist. Wenn von einem Hohlkiel nichts zu erkennen ist, so kann dies durch Verdrückung bedingt sein; ich kenne diese Art aber nicht älter als im Aptien, während der hier häufige Belemnites brunsvicensis eine typische Form des Barrêmien ist. Stolley gab aber neuerdings an, daß Oppelia nisoïdes sowohl über als auch erheblich unter der Sparsicosta-Bank vorkäme, aus der er auch Ancyloceras Urbani anführt (auch eine typische Form des unteren Aptien). Vielleicht liegt hier eine Störung der Lagerung vor, jedenfalls nehmen die sonst flach liegenden Schichten längs einer Linie plötzlich ein ziemlich steiles Einfallen an; sonst müßte man annehmen, daß das Aptien hier auf Barrêmien liegt, oder daß hier, und zwar nur hier, jene Arten mit Bel. brunsvicensis zusammen in derselben Schicht vorkämen, und das ist höchst unwahrscheinlich.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XVI.

Von

O. Wallach.

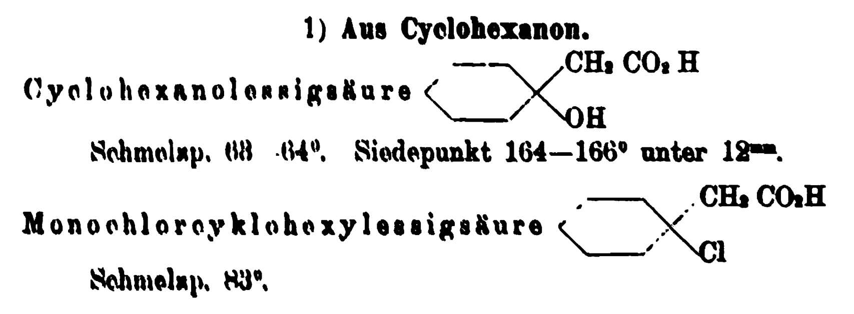
Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Februar 1907.

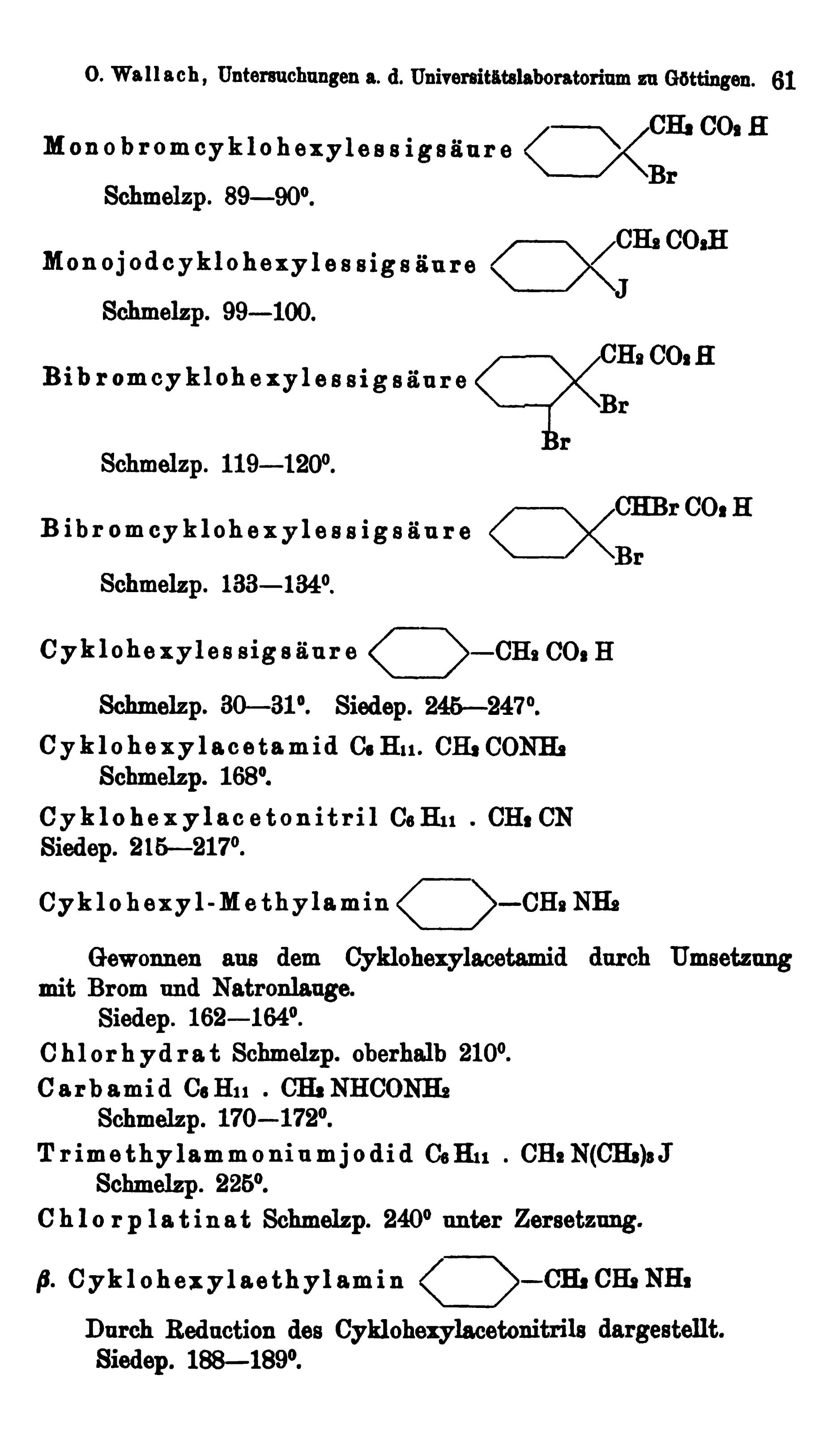
I. Ueber Karbonsäuren cyclischer Kohlenwasserstoffe.

Die Synthese derartiger noch wenig bekannter Verbindungen ist auf folgendem Weg durchgeführt worden. Die einfachsten cyclischen Ketone, Cyklopentanon, Cyklohexanon, Cykloheptanon wurden mit Bromessigester bei Gegenwart von Zink condensiert, die entstehenden Oxyester mit Bromwasserstoff umgesetzt und so das Hydroxyl gegen Brom ausgetauscht. Die so erhaltenen gebromten Säureester oder freien Säuren können mit Zink und Essigsäure zu halogenfreien Verbindungen reduciert werden. Zu denselben halogenisierten Säuren gelangt man auch, wenn man den Oxysäuren erst Wasser entzieht und an die gewonnenen ungesättigten Säuren Halogenwasserstoff anlagert.

Folgende verschiedenen Ringsystemen angehörende Verbindungen wurden auf diesem Wege dargestellt.

1) Aus Cyclohexanon.





Monobromcyklohexylessigsäure $C_6H_{10}<^{CH_2\,CO_2H}_{Br}$

Schmelzp. 89—90°.

Monojodcyklohexylessigsäure $C_6H_{10}<^{CH_2\,CO_2H}_{J}$

Schmelzp. 99—100.

Bibromcyklohexylessigsäure (Ring mit Br; $>^{CH_2\,CO_2H}_{Br}$)

Schmelzp. 119—120°.

Bibromcyklohexylessigsäure $C_6H_{10}<^{CHBr\,CO_2H}_{Br}$

Schmelzp. 133—134°.

Cyklohexylessigsäure $C_6H_{11}—CH_2\,CO_2H$

Schmelzp. 30—31°. Siedep. 245—247°.

Cyklohexylacetamid $C_6H_{11}.\,CH_2\,CONH_2$
Schmelzp. 168°.

Cyklohexylacetonitril $C_6H_{11}\,.\,CH_2\,CN$
Siedep. 215—217°.

Cyklohexyl-Methylamin $C_6H_{11}—CH_2\,NH_2$

Gewonnen aus dem Cyklohexylacetamid durch Umsetzung mit Brom und Natronlauge.
Siedep. 162—164°.

Chlorhydrat Schmelzp. oberhalb 210°.

Carbamid $C_6H_{11}\,.\,CH_2\,NHCONH_2$
Schmelzp. 170—172°.

Trimethylammoniumjodid $C_6H_{11}\,.\,CH_2\,N(CH_3)_3\,J$
Schmelzp. 225°.

Chlorplatinat Schmelzp. 240° unter Zersetzung.

β. **Cyklohexylaethylamin** $C_6H_{11}—CH_2\,CH_2\,NH_2$

Durch Reduction des Cyklohexylacetonitrils dargestellt.
Siedep. 188—189°.

Chlorhydrat Schmelzp. 252—253°.

Carbamid $C_6H_{11} . CH_2CH_2NHCONH_2$
Schmelzp. 85—86°.

Trimethylammoniumjodid $C_6H_{11} . CH_2CH_2N(CH_3)_3J$
Schmelzp. 221—222°.

Dicyklohexyl-Aceton, ⬡—CH_2—CO—CH_2—⬡,

welches auch als vollkommen hydriertes Dibenylketon aufgefaßt werden kann, entsteht bei der trockenen Destillation von Cyklohexylessigsaurem Kalk. Es erstarrt bei niederer Temperatur, das Semicarbazon schmilzt bei 142—145°.

2) Aus Suberon.

Suberylessigsäure $\begin{matrix} CH_2CH_2CH_2 \\ CH_2CH_2CH_2 \end{matrix} > CH . CH_2CO_2H$
Siedepunkt 165° unter 19mm.

Monobromsuberylessigsäure (C_6H_{12}): $C<\begin{matrix} CH_2CO_2H \\ Br \end{matrix}$
Schmelzp. 68—69°.

Monojodsuberylessigsäure (C_6H_{12}): $C<\begin{matrix} CH_2CO_2H \\ J \end{matrix}$
Schmelzp. 80—81.

Beide hologenisierte Säuren schmelzen nicht scharf und zersetzen sich beim Aufbewahren.

Suberylacetamid $C_7H_{13}CH_2CONH_2$
Schmelzp. 146—148°.

Suberyl-Methylamin $C_7H_{13}CH_2NH_2$
Siedep. 195—196°.

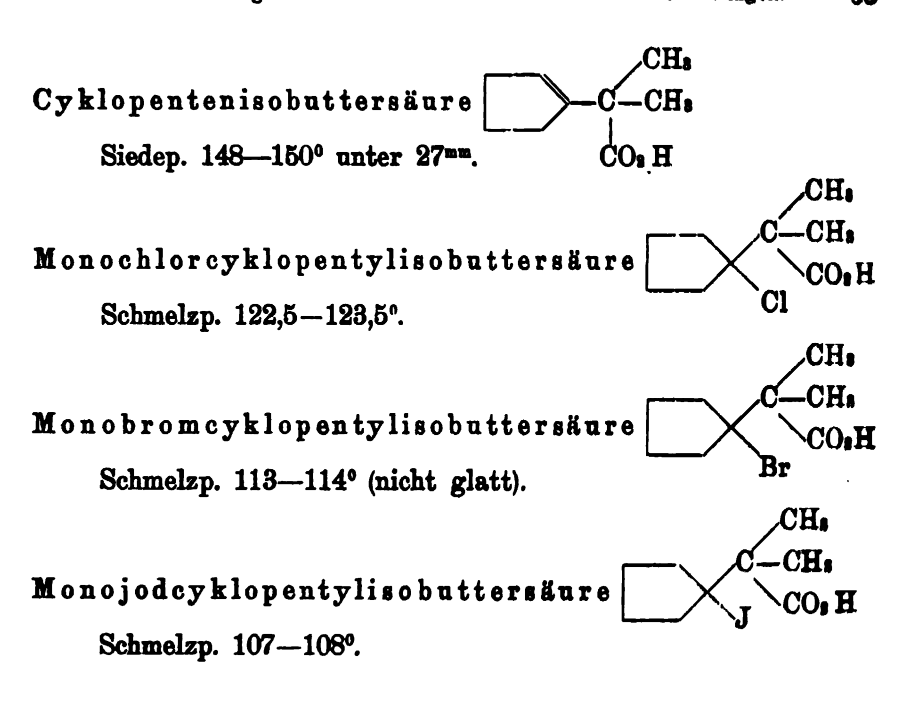
Carbamid $C_7H_{13}CH_2NHCONH_2$
Schmelzp. 127—129°.

3) Aus Cyklopentanon.
(Mitbearbeitet von Karl Fleischer.)

Cyklopentylessigsäure ⬠—$CH_2 . CO_2H$
Siedep. 226—230°.

Cyklopentylacetamid ⬠—$CH_2CO . NH_2$
Schmelzp. 143—145°.

Cyklopentyl-Methylamin ⬠—CH_2NH_2
Siedep. 139—145°.



Cyklopentenisobuttersäure

Siedep. 148—150° unter 27mm.

Monochlorcyklopentylisobuttersäure

Schmelzp. 122,5—123,5°.

Monobromcyklopentylisobuttersäure

Schmelzp. 113—114° (nicht glatt).

Monojodcyklopentylisobuttersäure

Schmelzp. 107—108°.

4) Aus 1.4-Cyklo-Methylhexanon.

(Mitbearbeitet von Edgar Evans.)

Cyklo-1.4-Methylhexanolessigsäure

CH_3— ⟨ ⟩ CH_2CO_2H / OH

Wurde in zwei Modificationen erhalten. Schmelzp. 139,5—140,5° und 88—90°.

Monochlor-Cyklo-1.4-Methylhexylessigsäure

CH_3— ⟨ ⟩ CH_2CO_2H / Cl

Schmelzp. 88—89°.

Monobrom-Cyklo-1.4-Methylhexylessigsäure

CH_3— ⟨ ⟩ CH_2CO_2H / Br

Schmelzp. 85—86°.

Bibrom-Cyklo-1.4-Methylhexylessigsäure

Schmelzp. 97—99°.

Cyklo-1.4-Methylhexylessigsäure

CH_3—⟨ ⟩—CH_2CO_2H

Schmelzp. 63—65°.

Cyklo-1.4-Methylhexylacetamid

CH_3—⟨ ⟩—CH_2CONH_2

Schmelzp. 161—162°.

5) Aus Menthon.

(Mitbearbeitet von E. Schellack.)

Mentholessigsäure CH_3—⟨ ⟩—$CH(CH_3)_2$, —OH, CH_2COOH

Schmelzp. 82—83°, Siedep. 193—197° unter 11mm.

Mentholessigsäuremethylester

Siedep. 136—137° unter 10mm. Schmelzp. 32—33°.

Brommenthylessigsäure CH_3—⟨ ⟩—$CH(CH_3)_2$, —Br, CH_2CO_2H

Schmelzp. 135—137° (bei schnellem Erhitzen).

Bei der Behandlung mit wasserabspaltenden Agentien entsteht aus der Mentholessigsäure neben Menthenessigsäure (flüssig) ein

Lacton
```
         CH3
         |
         CH
        /  \
     CH2    CH2
      |      |
     CH2    CH—CH2COO
        \  /        |
         C----------
         |
       CH(CH3)2
```

von folgenden Eigenschaften:

Siedep. 300—305°, d = 0.915, n_D = 1.4781, M = 54.7 (berechnet für $C_{12}H_{20}O_2$ = 55.0).

Bei der Behandlung mit Jodwasserstoffsäure verwandelt sich dies Lacton in ein isomeres vom Schmelzp. 88.5—89.5°, welches in großen Glaubersalzähnlichen Krystallen krystallisiert.

Beide Modificationen verhalten sich wie γ-Lactone.

II. Ueber das Verhalten der Nitrite primärer Basen und über Ringerweiterung carbocyklischer Systeme.

Es ist eine allgemein verbreitete, aber nichtsdestoweniger unrichtige Ansicht, daß die Nitrite primärer Amine der aliphatischen Reihe ganz unbeständige und im Augenblick der Entstehung zerfallende Verbindungen seien. Das ist nicht der Fall und trifft noch weniger für die primären alicyklischen Amine zu. Es existieren da sogar Nitrite primärer Basen, welche so beständig sind, daß sie sich aus heißem Wasser gut umkrystallisieren lassen und in trockenem Zustande jedenfalls Monate lang (länger reichen meine Erfahrungen noch nicht) ganz unverändert bleiben.

Wenn man die Nitrite primärer Basen isolieren will, so ist allerdings eine Bedingung einzuhalten, auf die man bis dahin wohl wenig geachtet hat und darum zu irrigen Anschauungen gelangt ist: es muß jede Spur freier Säure ferngehalten werden. Denn sobald man zu einem sogar in heißer wäßriger Lösung beständigen Nitrit auch nur die kleinste Menge freier Säure, z. B. Essigsäure, hinzufügt, beginnt alsbald eine Zersetzung, die unter lebhafter Stickstoff-Entbindung in der nachher zu beschreibenden Weise abläuft. Die Anwesenheit freier Säure wirkt also in hohem Grade beschleunigend — katalytisch — auf die Umsetzungsreaktion.

Die Beobachtungen über die relative Beständigkeit organischer Nitrite stehen übrigens ganz im Einklang mit Erfahrungen, welche bezüglich des Ammoniumnitrits vorliegen. Von diesem hat z. B. Arndt[1]) gezeigt, daß durch die Anwesenheit von Säureionen die Zersetzung ungemein befördert wird.

Am leichtesten sind natürlich die Nitrite zu isolieren, welche schwer löslich in Wasser sind. Das gilt von einer ganzen Reihe von Nitriten alicyklischer Basen.

Was secundäre Basen anbelangt, so habe ich derartige beständige und schwer lösliche Nitrite schon vor längerer Zeit z. B. im Dibornylamin-Nitrit[2]), Dicyklohexylamin-Nitrit[3]) kennen gelehrt. Bei primären Basen hatte ich gleichfalls schon vor langer Zeit die Beständigkeit des Fenchylamin-Nitrits[4]) beobachtet. Diese Beispiele möchte ich nun durch die folgenden ergänzen.

---

1) Z. f. phys. Ch. **39**, 64 (1901); **45**, 571 (1903); Centralbl. **01**, I, 1294; **04**, I, 10.

2) Annalen **269**, 357 (1891.

3) Ebenda **272**, 124 (1892); **346**, 265.

4) Annalen **269**, 359 (1891).

Das Nitrit des l-Menthylamins (aus l-Menthonoxim durch Reduktion hergestellt [1]) und das Nitrit des Pinylamins kann man ebenso wie Fenchylaminnitrit sehr gut erhalten, wenn man möglichst concentrierte wäßrige Lösungen der Chlorhydrate der Basen mit 1 Mol. Natriumnitritlösung vermischt. Es eignet sich für die Umsetzung das käufliche, gewöhnlich alkalisch reagierende, Natriumnitrit sehr gut.

Die Nitrite scheiden sich bald aus und können zur Befreiung von Chlorhydrat aus warmem Wasser umkrystallisiert werden.

Das l-Menthylamin-Nitrit krystallisiert in schönen Nadeln, deren Zersetzungspunkt bei etwa 139° liegt. Wird die wäßrige Lösung unter Zusatz einiger Tropfen Essigsäure gekocht, so entsteht unter Stickstoffentwicklung das gewöhnliche krystallisierte Menthol, neben etwas in Folge eingetretener Dissoziation gebildeten Menthylamins, welches man dem Reaktionsprodukt durch Schütteln mit Oxalsäure entziehen kann.

Das Pinylamin-Nitrit krystallisiert aus Wasser in derben Krystallen, die sich bei etwa 125° zersetzen. Der Zerfall des Salzes erfolgt in angesäuerter Lösung ganz ähnlich wie bei den anderen Nitriten, in diesem Fall unter vorzugsweiser Entstehung von Pinocarveol.

Wie in den vorstehend besprochenen Beispielen wird sich auf dem angegebenen Wege immer dann das Nitrit einer Base aus säurefreier Lösung isolieren lassen, wenn das Nitrit merklich schwerer löslich ist, als das Chlorid. Ist das Umgekehrte der Fall, so wird die in verdünnter Lösung sich abspielende Reaktion

$$R.NH_2.HCl + NaNO_2 = NaCl + R.NH_2 NO_2 H$$

bei fortschreitender Konzentration unter Ausscheidung des Chlorhydrats der organischen Base rückläufig werden können. Das ist z. B. zu beobachten, wenn man Benzylaminchlorhydrat mit Natriumnitrit in Umsetzung bringen will. Mischt man warme concentrierte Lösungen beider Salze und kühlt die Lösung ab, so krystallisiert ein organisches Salz aus, welches aber in der Hauptsache aus Benzylaminchlorhydrat besteht.

In den zahlreichen Fällen, wo sowohl das Chlorid als auch das Nitrit der organischen Base sehr löslich ist, kann man bei der in Rede stehenden Umsetzung beim Abdunsten der Lösungen Kochsalz zur Ausscheidung bringen und wenigstens Nitritlösungen erhalten und sich immer davon überzeugen, daß solche

1) Annal. **276**, 300: **300**, 279.

Lösungen eine relative Beständigkeit besitzen, solange nur das Vorhandensein von Säureionen hintangehalten wird.

Unter diesen Umständen entstand die Frage, ob es nicht vielleicht auch möglich sei, das Nitrit einer aromatischen Base zu isolieren, da wo die Ausscheidungsbedingungen in Folge von Schwerlöslichkeit des gesuchten Salzes besonders günstig sind.

Schwerlöslichkeit der Nitrite wird man nun immer da am ehesten erwarten können, wo schwerlösliche Nitrate bekannt sind. Ein solches schwerlösliches Nitrat habe ich z. B. früher beim 4-Amino-1.3-xylol beobachtet [1]). Vermischt man eine concentrierte wäßrige Lösung des Chlorhydrats dieser Base mit einer Lösung von Kalisalpeter, so scheidet sich sofort das Nitrat des Xylidins in krystallinischer Form aus. Auch die Darstellung des Xylidinnitrits gelingt auf entsprechendem Wege, man muß aber von sehr reinem Xylidinchlorhydrat ausgehen, sonst erhält man harzige oder stark gelb gefärbte Produkte. 5 g ganz weißes, reines Xylidinchlorhydrat (aus 4 Amino-1.3-Xylol) werden in 20 ccm Wasser gelöst und in die mit Eis abgekühlte Lösung 2.3 g Natriumnitrit, gelöst in 5—6 ccm Wasser, eingetragen und umgeschüttelt. Die abgekühlte Flüssigkeit erstarrt bald zu einem weißen oder schwach gelblich gefärbten Krystallmagma, das alsbald abgesaugt und auf Thontellern getrocknet wird. Das trockene Präparat färbt sich bald gelb und zerfließt nach einiger Zeit zu einem rothbraunen Oel. Daß man es in den ursprünglich abgeschiedenen Krystallen mit einem Nitrit des Xylidins zu thun hat, geht aus folgendem Verhalten hervor.

Die Krystalle lösen sich ganz klar in Wasser. Wird die Lösung mit Essigsäure angesäuert und gekocht, so entweicht Stickstoff unter Abscheidung eines Phenols. Werden die Krystalle mit Natronlauge übergossen, so wird Xylidin frei und die Flüssigkeit färbt sich gelb. Nach dem Ausäthern der aromatischen Base und der gelben Zersetzungsprodukte wurde die alkalische Lösung eingedampft. Im Rückstand ließ sich die Anwesenheit großer Mengen Natriumnitrit konstatieren. Beim Uebergießen der ursprünglich abgeschiedenen Krystalle mit verdünnter Schwefelsäure wird keine salpetrige Säure frei. Eine Lösung der Krystalle giebt aber mit Silbernitrat einen reichlichen Niederschlag von Silbernitrit, dem nur sehr wenig Chlorsilber beigemengt war, das beim Lösen des ausgeschiedenen Salzes in Salpetersäure zurückbleibt.

---

1) Annalen **319**, 98.

Das auf dem angegebenen Wege dargestellte, nicht umkrystallisierte Xylidinnitrit enthält natürlich noch Spuren unorganischer Substanz.

Während die ganz neutralen wässrigen Lösungen der Nitrite namentlich der alicyklischen Basen recht beständig sind und sich erst bei längerem Kochen in Folge von Dissoziation und Freiwerden von geringen Mengen salpetriger Säure langsam zu verändern beginnen, werden die warmen Lösungen — wie oben schon bemerkt wurde — durch Eintragen eines Tropfens Essigsäure oder Mineralsäure zu sofortiger Zersetzung angeregt. Dieser Prozeß verläuft dann unter lebhafter Stickstoff-Entwicklung in der Regel nach mehreren Richtungen gleichzeitig und es scheint in jedem Einzelfalle von der Natur der vorliegenden Base einerseits und von den gewählten Versuchsbedingungen andererseits abzuhängen, welche Zersetzungsrichtung bevorzugt wird.

Als Hauptrichtungen, nach denen die Umsetzung sich abspielt, hat man zu unterscheiden:

1) Die Bildung von Kohlenwasserstoffen (also Wasserabspaltung),

2) die Bildung von einem oder auch mehreren (unter sich isomeren) Alkoholen.

Nebenreaktionen (Bildung von Nitrosaminen) sollen einstweilen unberücksichtigt bleiben.

Als Beispiel dafür, wie sehr die Natur der Base für die Umsetzungsrichtung bestimmend ist, möchte ich meine frühere Beobachtung [1]) in Erinnerung bringen, daß l-Menthylaminnitrit bei der Zersetzung ziemlich glatt l-Menthol liefert (s. auch oben), während d-Menthylaminnitrit unter denselben Bedingungen wesentlich Menthen giebt. Als weiteres Beispiel möchte ich heut noch anführen, daß man aus Isothujylaminnitrit fast nur Kohlenwasserstoff erhält, während Thujylaminnitrit unter denselben Bedingungen auch reichlich Alkohol liefert. Räumliche Konfigurationen beeinflussen augenscheinlich die Richtung des Reaktionsverlaufs sehr wesentlich. Daß die Versuchsbedingungen auf den Reaktionsverlauf gleichfalls von Einfluß sind, daß es z. B. nicht immer gleichgültig ist, ob man das Chlorhydrat einer Base mit molekularen Mengen Natriumnitrit in Umsetzung bringt oder ob man eine essigsaure Lösung freier Base mit derselben Menge Natriumnitrit erwärmt, läßt sich u. a. am Beispiel des Fenchylamins deutlich zeigen.

---

1) Annalen **300**, 278.

Nähere Mitteilungen und Ermittelungen in dieser Hinsicht müssen noch vorbehalten bleiben.

Die Annahme, daß im Fall der Bildung eines Alkohols aus primärem Aminnitrit die Umsetzung stets nach dem Schema

$$R.CH_2CH_2.NO_2H = H_2O + N_2 + R.CH_2OH$$

verlaufen soll (wie man es in manchen verbreiteten Lehrbüchern immer noch als Dogma aufgeführt findet), d. h. daß immer nur oder vorzugsweise der dem angewandten Amin korrespondierende Alkohol entsteht, ist längst als unzutreffend erwiesen. V. Meyer[1]) hat bereits vor vielen Jahren auf den „anormalen" Verlauf, den die Reaktion nehmen kann, aufmerksam gemacht, indem er zeigte, daß n-Propylaminnitrit unter Entstehung von Propylen, n-Propylalkahol und Isopropylalkohol zerfallen kann und aus späterer Zeit liegen sehr schöne Arbeiten von M. Freund[2]) vor, der u. a. nachwies, daß das Nitrit der Base $(CH_3)_3.C.CH_2NH_2$ den Alkohol $(CH_3)_2.C(OH).CH_2.CH_3$ zu liefern vermag. Neuerdings endlich hat N. Demjanow[3]) Beobachtungen veröffentlicht, auf die ich nachher noch zurückkommen werde, denen gemäß aus Tetramethylenmethylamin Cyklopentanol und aus Hexamethylenmethylamin Suberylalkohol sich gewinnen läßt.

Diese interessanten Beobachtungen von N. Demjanow wiesen auf die Möglichkeit der Ringerweiterung bei cyklischen Verbindungen hin. Würde diese Reaktion sich verallgemeinern lassen, so hätte man es mit Vorgängen zu tun, welche sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht für die cyklischen Verbindungen von allergrößter Bedeutung wären.

Denn wenn man bei niederen Temperaturen einen Kohlenstoff-Sechsring zu einem Siebenring und einen Siebenring zu einem Achtring erweitern kann, so wird man mit der Ansicht brechen müssen, daß die höheren Ringsysteme unter allen Umständen die unbeständigeren sind. Ferner würde man eine Methode gewonnen haben, bisher kaum zugängliche Verbindungen mit 7 und mit 8 Kohlenstoffatomen im Ring synthetisch aufzubauen.

Der Entscheidung dieser Frage stand bisher nur die große Schwierigkeit im Wege, welche mit der Gewinnung des geeigneten Beobachtungsmaterials verknüpft war. Ein wesentlicher Zweck der in dem vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Versuche ist es nun gewesen, die für die Untersuchung notwendigen Basen

---

1) Ber. 9, 535 (1876).

2) Ber. 23, 2865 (1890); 24, 2150, 3350 (1891).

3) Centralbl. 1903, I, 828; 1904, I, 1214.

zu beschaffen. In der Tat ist es gelungen, die Reihe der Cyklyl-Methylamine

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{matrix} \Big> CH\,CH_2\,NH_2; \quad CH_2 \Big< \begin{matrix} CH_2-CH_2 \\ CH_2-CH_2 \end{matrix} \Big> CH\,CH_2\,NH_2;$$

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2-CH_2 \end{matrix} \Big> CH\,CH_2\,NH_2$$

aus den zugehörigen Ringketonen aufzubauen und ihr Verhalten gegen salpetrige Säure zu prüfen. Auch höhere Homologe des Cyklohexylmethylamins sind bereits dargestellt und werden auf ihr Verhalten untersucht. Einstweilen sollen die an den einfachsten Verbindungstypen beobachteten Erscheinungen kurz dargelegt werden.

Im allgemeinen zeigt sich, daß ganz neutrale wässrige Lösungen der Cyklylmethylaminnitrite sich kurze Zeit ohne weitgehende Zersetzung zu erleiden kochen lassen. Durch Ansäuern mit Essigsäure kann die Umsetzung leicht eingeleitet werden, die auch hier wesentlich nach den oben schon besprochenen drei Richtungen verläuft, d. h.: es bildet sich etwas Kohlenwasserstoff, etwas von dem dem angewandten Methylamin correspondierenden Alkohol und endlich ein Alkohol des nächst höheren Ringsystems. Da es bei der gegenwärtigen Untersuchung wesentlich darauf ankam, die nach letzterer Richtung verlaufende Zersetzung festzulegen, so sind die gleichzeitig entstehenden anderen Produkte nicht näher studiert. Folgendes sind die gewonnenen Resultate.

1. Ueberführung von Cyklopentanon in Cyklohexanon.

Das aus dem Cyklopentanon auf dem in dem vorigen Abschnitt beschriebenen Wege dargestellte Cyklopentylmethylamin

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{matrix} \Big> CH-CH_2\,NH_2$$

wurde in essigsaurer Lösung mit 1 Mol. Natriumnitrit in Umsetzung gebracht. Der unter Mitwirkung von Hr. C. Fleischer ausgeführte Versuch ergab, daß sich unter den Reaktionsprodukten ein Alkohol vorfand, der bei der Oxydation mit Chromsäure und Schwefelsäure ein sofort an Semicarbazid gehendes Keton lieferte. Das aus Methylalkohol umkrystallisierte Semicarbazon schmolz bei 165—166° und gab beim Vermischen mit Semicarbazon aus

Cyklohexanon keine Schmelzpunktsdepression. Nun wurde aus dem Semikarbazon durch Zerlegen mit verdünnter Schwefelsäure das Keton regeneriert und mit Wasserdampf abdestilliert. Zu dem wässrigen Destillat wurde ohne weiteres 2 Mol. Benzaldehyd (berechnet auf die Menge des angewandten Semikarbazons) gegeben, ferner etwas Alkohol und Natronlauge. Es schied sich sehr bald ein gelber Krystallbrei aus, der nach dem Abfiltrieren und Umkrystallisieren aus Alkohol bei 116—117° schmelzende Krystalle lieferte, welche sich als völlig identisch mit Dibenzylidencyklohexanon herausstellten. Nun wurde die von der Oxydation des ursprünglich entstandenen Cyklohexanols mit Chromsäure entstandene Flüssigkeit, aus der das Hexanon abdestilliert war, ausgeäthert. In den Aether ging eine Säure, welche nach dem Umkrystallisieren bei 146—148° schmolz und mit Adipinsäure identifiziert werden konnte. Auch daraus ging hervor, daß bei der Umsetzung der Cyklopentylbase mit salpetriger Säure ein Kohlenstoff-Sechsring entstanden war. Damit ist die Ueberführung von Cyklopentanon in Cyklohexanon realisiert.

2. Ueberführung von Cyklohexanon in Cykloheptanon (Suberon).

Es wurde unter Anwendung von Hexahydrobenzylamin (Cyklohexylmethylamin)

$$CH_2 \begin{matrix} \diagup CH_2-CH_2 \diagdown \\ \diagdown CH_2-CH_2 \diagup \end{matrix} CH\,CH_2\,NH_2$$

die Umsetzung mit salpetriger Säure und die Verarbeitung des erhaltenen Reaktionsprodukts genau so geleitet, wie im vorigen Versuch. Es ließ sich die Entstehung eines Alkohols nachweisen, der bei der Oxydation Suberon lieferte. Dieses wurde identifiziert 1) durch Ueberführung in das bei 160° schmelzende Semicarbazon und 2) durch Umsetzung mit 2 Mol. Benzaldehyd. Dabei entstand das charakteristische hell gefärbte, bei 107—108° schmelzende Dibenzylidensuberon [1]).

Diese Ueberführbarkeit von Hexahydrobenzylamin in Suberon ist nun, wie eingangs schon erwähnt worden ist, bereits von N. Demjanow beobachtet worden. Demjanow hatte die Base aber nicht aus Hexanon, sondern aus Hexahydrobenzonitril aufgebaut, während das zu obigen Versuchen verwendete Cyklo-

1) Wallach, Ber. 29, 1600 (1896).

hexylmethylamin aus dem Keton synthetisiert worden ist. Somit ist erst jetzt der Uebergang von Hexanon in Heptanon vollständig verwirklicht.

3. Ueberführung von Cykloheptanon (Suberon) in Cyklooktanon (Azelaïnketon).

Der Entscheidung der Frage, ob es auf dem im Vorstehenden gekennzeichneten Wege möglich sein würde, zu einer Erweiterung des Siebenringes zum Achtring zu gelangen, durfte besonderes Interesse beanspruchen. Daß sie im bejahendem Sinne zu beantworten ist, wird aus dem Folgenden hervorgehen.

Suberylmethylamin, $C_7H_{13}CH_2NH_2$, wurde in essigsaurer Lösung mit Natriumnitrit umgesetzt, der entstandene Alkohol in essigsaurer Lösung mit Chromsäure oxydiert und das gewonnene Produkt an Semicarbazid gebunden. Das so gewonnene Semicarbazon schmolz nach dem Umkrystallisieren bei 163—164,5° und ergab bei der Analyse folgendes Resultat:

0,1303 g gaben 0,2808 CO_2 mit 0,1098 H_2O

Berechnet für $C_9H_{17}N_3O$		Gefunden
C	58,93	58,78
H	9,35	9,45

Daß die dem Semicarbazon zu Grunde liegende Verbindung ein Keton $C_8H_{14}O$ und zwar nichts anderes als Cyklooktanon war, ging aus einem Oxydationsversuch hervor.

Eine gewogene Menge des reinen Semicarbazons wurde mit Oxalsäurelösung zerlegt und in das erhaltene wässrige Destillat so viel CrO_3 eingetragen, daß für die Oxydation der zu erwartenden Ketonmenge 3 Atome Sauerstoff zur Verfügung standen. Nach Hinzufügen von etwas Schwefelsäure wurde dann unter Umschütteln auf dem Wasserbad erwärmt, bis die Flüssigkeit eine rein grüne Farbe angenommen hatte. Schon nach dem Erkalten der Flüssigkeit krystallisierte in reichlicher Menge eine Säure aus, die direkt abfiltriert und aus kochendem Wasser umkrystallisiert werden konnte. Die in guten farblosen Krystallen erhaltene Säure schmolz bei 139—140°, zeigte also den Schmelzpunkt der Korksäure und eine vollständige Analyse des Silbersalzes bewies, daß diese Säure wirklich vorlag:

0,2080 g gaben 0,1878 CO_2, 0,0597 H_2O und 0,1156 Ag.

Berechnet für $C_8H_{12}O_4Ag_2$:		Gefunden:
C	24,74	24,63
H	3,12	3,22
Ag	55,64	55,58

Die glatte Bildung der Korksäure aus der aus dem Suberylmethylamin erhaltenen Verbindung $C_8H_{14}O$ ist nur erklärlich, wenn die letztere aus Cyklooctanon bestand.

Die Möglichkeit, daß man auf dem angegebenen Wege Cykloheptanon in Cyklooctanon abwandeln kann, ist damit erwiesen.

Ueber die Eigenschaften des Cyklooctanons.

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2-CH_2-CO \\ | \qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_2-CH_2-CH_2-CH_2 \end{array}$$

Gelegentlich seiner grundlegenden Versuche über die cyklischen Ketone verschiedener Ringsysteme hat Joh. Wislicenus in Gemeinschaft mit Hugo Mager auch das „Azelaïnketon" durch trockene Destillation von azelaïnsaurem Kalk darzustellen gesucht[1]). Das erhaltene Produkt war aber wenig einheitlich. Aus 10 g einer zwischen 180—240° siedenden Fraktion konnten nur 2,5 g einer „pfefferminzartig riechenden" Flüssigkeit vom Siedepunkt 90—91° unter 23 mm gewonnen werden, welche die erwartete Zusammensetzung besass, aber „mit diesem Präparat ausgeführte Oxydationsversuche ergaben keine befriedigenden Ergebnisse".

Dann haben Miller und Tschitschkin[2]) Azelaïnsäure mit Natronkalk destilliert. Ueber die Resultate wird berichtet: „Die Anteile zwischen 180—200° geben dem Azelon entsprechende Zahlen der Elementaranalyse, aber erst die Fraktionen oberhalb 200° geben bei der Oxydation mit rauchender Salpetersäure Korksäure".

Etwas ausführlichere Angaben macht Hans Derlon[3]), der im Laboratorium von Wislicenus die Versuche von Mager fortsetzte. Er erhielt aus dem im Vacuum zwischen 80—91° siedenden Anteile des Destillats aus Azelainsaurem Kalk ein bei 85° schmelzendes Semicarbazon und bei der Oxydation geringe Ausbeuten an Korksäure.

Man kann also wohl sagen, daß über das Cyklooktanon etwas Zuverlässiges noch nicht bekannt ist und daß es in reinem Zustand bisher überhaupt noch nicht vorgelegen hat. Der von Derlon angegebene Schmelzpunkt des Semicarbazons ist augenscheinlich irrtümlich und auch die Beschreibungen des freien Ketons stimmen nicht mit meinen Beobachtungen überein.

Das aus dem bei 163—164,5° schmelzenden Semicarbazon durch

1) Annalen 275, 363 (1893).
2) Centralbl. 1899, II, 181.
3) Ber. 31, 1957 (1898).

Erwärmen mit Oxalsäure regenerierte reine Cyklooctanon zeigt folgende Eigenschaften: Die Verbindung riecht dem Suberon außerordentlich ähnlich, etwas bittermandelölartig, wie es übrigens auch für reines Cyklopentanon und Cyklohexanon zutrifft.

Der Siedepunkt wurde bei 195—197° gefunden. Beim Abkühlen erstarrt das Keton leicht und schmilzt wieder bei 25° bis 26°. Außerdem wurde ermittelt:

$$d = 0.9584,\ n_D = 1.4694 \text{ bei } 20^0.$$

Die Tatsache, daß man von den Cyklylmethylaminen ausgehend ganz allgemein durch Umsetzung jener Basen mit salpetriger Säure Ringerweiterung erzielen kann, stellt uns nun vor die Frage, wie man den Mechanismus dieser Umsetzung zu deuten hat.

Die Möglichkeit einer Erklärung aller beobachteten Erscheinungen bietet sich meines Erachtens in der Annahme, daß sich die Uebergänge unter intermediärer Bildung eines unter den gegebenen Bedingungen unstabilen bicyklischen Systems vollzieht, vielleicht unter primärer Entstehung einer Diazoverbindung.

Ich möchte das am Beispiel des Uebergangs von Cyklopentylmethylamin in Cyklohexanol mit Hülfe folgender Formelbilder verdeutlichen:

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{matrix} \!\!>\! CHCH_2NH_2 . NO_2H \rightarrow \begin{matrix} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{matrix} \!\!>\! CH\,CH_2N_2OH \rightarrow$$

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2 & CH & \\ | & & \\ CH_2-CH & \triangle & CH_2 \end{matrix} + N_2 + H_2O$$

Nach dieser Vorstellung würde sich bei der Reaktion an den bestehenden Fünfring ein Dreiring anschließen, der nun an drei Stellen hydrolytisch gespalten werden kann. Tritt die Spaltung unter Lösung der Bindung 1 ein, so hat man

$$\begin{matrix} CH_2-CH_2 & CH & \\ | & {}_1\triangle{}^2_3 & \\ CH_2-CH & & CH_2 \end{matrix} + H_2O = \begin{matrix} CH_2- & CH_2 & -CH_2 \\ | & & | \\ CH_2- & CH(OH) & -CH_2 \end{matrix}$$

d. h. es ist der sekundäre Alkohol des nächsthöheren Ringsystems (Cyklohexanol) entstanden.

Setzt die Spaltung dagegen an der Bindung 2 oder 3 des Dreirings ein (was auf dasselbe herauskommt), so entsteht entweder der dem Ausgangsamin entsprechende primäre Alkohol, oder ein sekundärer desselben Ringsystems.

Beide Alkohole könnten auch unter Wasserabspaltung in Kohlenwasserstoffe übergehen, die ja, wie eingangs bemerkt wurde, ein fast regelmäßig auftretendes Nebenprodukt ausmachen. Folgende Formelbilder verdeutlichen das:

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH \end{array}\!\!\begin{array}{l} \searrow CH + H_2O \\ \angle\!\!\searrow CH_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{array}\!\!> CH\,CH_2\,OH \rightarrow \begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{array}\!\!> C = CH_2 \\ \searrow \begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH\,(OH) \end{array}\!\!> CH\,CH_2 \rightarrow \begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH \end{array}\!\!> C.\,CH_3 \end{array}$$

Für den Uebergang von Cykloheptylmethylamin in Cyklooctanol gewinnt man folgendes Bild:

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2-CH_2 \end{array}\!\!> CH-CH_2\,NH_2\,.\,NO_2\,H \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2-CH \end{array}\!\!\begin{array}{l} \searrow CH \rightarrow \\ \angle\!\!\searrow CH_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} CH_2-CH_2-CH_2\ \ -CH_2 \\ | \qquad\qquad\qquad\qquad | \\ CH_2-CH_2-CH(OH)\ CH_2 \end{array}$$

u. s. w.

So wären in einfachster Weise alle beobachteten Vorgänge erklärbar.

Eine ähnliche Betrachtungsweise läßt sich auch den Vorgängen der Nitritzersetzung bei den aliphatischen Aminen zu Grunde legen und ich finde, daß M. Freund sie auch beiläufig angedeutet hat [1]), um dann aber einer anderen Interpretation den Vorzug zu geben [2]).

Mag nun aber die angeführte Vorstellung von dem Reaktionsmechanismus zutreffend sein oder nicht, so regen doch jedenfalls die tatsächlichen Beobachtungen zu Versuchen an, die Ringerweiterung gegebener Systeme auch noch in anderer Richtung zu realisieren und womöglich das Problem zu lösen, bicyklische Verbindungen mit stabilen Ringsystemen aufzubauen.

---

1) Ber. 24, 2152.

2) Eine gewisse Analogie mit den besprochenen Umformungen wird man auch beim Verlauf der „Beckmannschen Umlagerungen" finden, wenn man für deren Verlauf sich der Erklärungsweise anschließt, welche ich neulich [Ann. 346, 273 (1906)] gegeben habe. Der Unterschied besteht nur darin, daß bei den Beckmannschen Umlagerungen das bei der Ringbildung beteiligte Stickstoffatom dem neuen Ring erhalten bleibt, während im vorliegenden Fall, wie bei den Diazoverbindungen, N_2 leicht in Form von freiem Stickstoff eliminiert wird.

Die bisherigen Versuche nahmen nur Cyklylmethylamine zum Ausgangspunkt. Wie werden sich Cyklylaethylamine und Cyklylpropylamine bei der Umsetzung mit salpetriger Säure verhalten? Werden wir aus

$$\begin{array}{l} CH_2-CH_2 \\ | \\ CH_2-CH_2 \end{array} \!\!> CH-CH_2-CH_2\,NH_2$$

einen Siebenring bilden können oder einen methylierten Sechsring, oder wird sich das Molekül vielleicht zu einem dipentacyklischen schließen, wie es im Campher vorliegt? Versuche, welche diese Fragen entscheiden sollen, sind bereits in Angriff genommen.

Messungen des elektrischen Vertikalstromes in der Atmosphäre. I.

Von

H. Gerdien.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 28. Juli 1906.

Einleitung. Das Problem der elektrischen Strömung in der Atmosphäre ist zur Zeit noch weit von seiner Lösung entfernt; der Grund dafür scheint mir vor allem in der Schwierigkeit zu liegen, alle in Betracht kommenden Faktoren dieses vielgestaltigen Vorganges messend zu verfolgen und ihre Wechselwirkung durch einfache Fragestellungen zu analysieren. Man muß hier, wie auch sonst vielfach in der Geophysik, darauf verzichten, die Versuchsbedingungen in jedem Falle so zu vereinfachen und zu variieren, wie es der Physiker im Laboratorium als seine Hauptaufgabe jedem ungeklärten Phänomen gegenüber betrachtet. Die analysierenden Methoden der Experimentalphysik lassen sich in der Geophysik nur in höchst unvollkommener Weise durch die statistische Verarbeitung des Beobachtungsmaterials ersetzen: sie wird der Natur der Sache nach nur für Institute durchführbar sein, die über eine hinreichende Anzahl geschulter Hilfskräfte verfügen. Nur an wenigen Stellen sind zur Zeit die erforderlichen Arbeitskräfte sowohl für Sammlung als auch für Verwertung des Beobachtungsmaterials in den Dienst der luftelektrischen Forschung gestellt; will man als Einzelner außerhalb des Rahmens dieser Untersuchungen zur Förderung des Problems beisteuern, so scheint mir dieses nur dann angebracht und erfolgverheißend zu sein, wenn es sich um die Ausarbeitung und Prüfung neuer Methoden handelt oder um die Erforschung spezieller, ihrer Natur nach als

Extremphänomene leichter zugänglicher Fälle. — Das Problem des Elektrizitätshaushaltes der Atmosphäre zerfällt in die Fragen nach dem normalen und dem gestörten elektrischen Strom; man kann im Zweifel sein, welches von beiden Gebieten der individuellen Arbeit leichter zugänglich ist. Für mich war zunächst der Umstand bestimmend, daß ich bei meinen luftelektrischen Untersuchungen im Freiballon [1]) an dem normalen vertikalen Leitungsstrom eine auffällig geringe Veränderlichkeit mit der Höhe gefunden hatte, die mich auf Grund von theoretischen Ueberlegungen, die weiter unten noch berührt werden sollen, zur Untersuchung der zeitlichen Veränderlichkeit des vertikalen Leitungsstromes veranlassten.

Instrumentarium und Methode. Das Potentialgefälle wurde den Registrierungen des im geophysikalischen Institut aufgestellten Benndorf'schen Elektrometers entnommen; das Instrument ist mit einer im Freien nahe unterhalb der Plattform des Hauptgebäudes unter einem Schutzdach angebrachten Radiotellurelektrode verbunden, deren Relativ-potentiale in bekannter Weise durch Simultanbeobachtungen auf ebenem Gelände auf das „absolute" Potentialgefälle reduziert wurden. Leider ist in der unmittelbaren Nachbarschaft kein besonders zu diesen Reduktionsbeobachtungen geeigneter Platz vorhanden; derjenige Ort, an dem die Beobachtungen schließlich vorgenommen wurden, liegt in einer Entfernung von 180 m vom Hauptgebäude, sodaß bei gewissen Wetterlagen die zeitlichen Aenderungen des Gefälles an beiden Plätzen sehr merklich von einander abweichen. Wesentlich diesem Umstande ist es zuzuschreiben, daß der Reduktionsfaktor nach den bisherigen Messungen mit einer Unsicherheit von etwa 10 % behaftet ist.

Die Messungen der spezifischen Leitfähigkeit wurden mittels des von mir konstruierten Apparates [2]) auf der „meteorologischen Wiese" des Instituts vorgenommen, die sich in der horizontalen Entfernung von 100 m vom Hauptgebäude befindet; da die Radiotellurelektrode des Benndorf'schen Elektrometers noch dazu in etwa 14 m Höhe über dem Boden angebracht ist, erscheint eine irgendwie merkliche Beeinflussung der Leitfähigkeitsmessungen auf der „meteorologischen Wiese" durch sie ausgeschlossen. Die „meteorologische Wiese" ist eine etwa 20 × 20 m messende Lichtung in dem das Institutsgelände bedeckenden etwa 4 m hohen

---

1) H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1905 und 1906.

2) H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1905.

Kiefernbestande. Die Aufstellung des Leitfähigkeitsapparates auf der Wiese ist insofern vorteilhaft, als der Apparat hier vor der influenzierenden Einwirkung des atmosphärischen Feldes sowie vor Windstößen etwas besser geschützt ist, als auf freier Ebene; der Luftaustausch mit der über die Bäume hinwegstreichenden Luft ist auf der Wiese hinreichend gesichert. Welche Störungen durch Ionenadsorption an dem bei stärkerem Winde auch in den unteren Schichten durchströmten Gehölz vorkommen, läßt sich nur schwer übersehen; bei den geringen Windstärken, bei denen ich ausschließlich beobachtete, war die Luft zwischen den Bäumen merklich in Ruhe.

Gleichzeitig mit den Leitfähigkeitsmessungen wurden Ionenzählungen vorgenommen; ich benutzte dazu den hinteren Teil des Apparates, den ich bei der Ballonfahrt vom 5. V. 1904 [1]) in Verbindung mit einem Vorsatzkondensator zu Messungen der spezifischen Ionenzahl, der spezifischen Leitfähigkeit und damit der spezifischen Ionengeschwindigkeit verwendet hatte. Der Apparat ist ein mit Zählwerk versehener, infolge seiner Dimensionen besonders leistungsfähiger Ebert'scher Ionenzähler, den ich nach eigenen Angaben von der Firma Spindler & Hoyer hatte anfertigen lassen. Obgleich die zur Erzielung einer gut messbaren Potentialabnahme am Blättchenelektrometer des Appurates erforderliche Aspirationszeit erheblich kleiner ist als die bei der Ebert'schen Originalkonstruktion erreichte, ist sie doch noch immer unbequem hoch, wenn es sich darum handelt den zeitlichen Verlauf der spezifischen Ionenzahlen auch bei schnelleren Aenderungen noch zu verfolgen.

Die Aufstellung der Apparate war folgende: auf einem hölzernen Stelltisch stand in etwa 1,20 m Höhe über dem Boden der Leitfähigkeitsapparat, über diesem der Ionenzähler; so war es ohne Schwierigkeit möglich, mit der rechten Hand die Kurbel des Leitfähigkeitsapparates zu drehen und gleichzeitig mit der linken Hand den Aspirator des Ionenzählers von Minute zu Minute neu aufzuziehen. Eine besondere Erdung der Apparate war überflüssig, da sie durch den Körper des Beobachters in dauernder Verbindung mit der Erde standen.

Die Angaben über Lufttemperatur, Luftfeuchtigkeit und Luftdruck sind den Registrierungen eines Assmann-Fueß'schen Aspirations-Meteorographen entnommen, der auf der „meteorologischen

---

H. Gerdien, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1904.

Wiese“ in 2,2 m Höhe über dem Boden in Gang gehalten wird; die Korrektionen des Meteorographen wurden täglich einmal mittels des Aspirationspsychrometers und des Stationsbarometers (Fueß) bestimmt.

Die Daten über Windgeschwindigkeit und Windrichtung sind den Angaben eines Fueß'schen Schalenkranz-anemographen entnommen, der auf dem Dache des Hauptgebäudes in 22 m Höhe über dem Boden arbeitet.

Die Bewölkung wurde in der üblichen Weise nach einer 11 teiligen Skala geschätzt.

Die Lufttrübung ist in einer willkürlichen Skala nach der Sichtbarkeit entfernter Objekte angegeben. Und zwar bedeutet:

Lufttrübung.

I. (sehr klar). Das 36 km entfernte Meißnergebirge ist mit scharfen Konturen sichtbar, mittels des Zeißfeldstechers von 12 facher Vergrößerung sind einzelne Baumgruppen darauf gut zu unterscheiden.

II. (klar). Das Meißnergebirge ist sichtbar, jedoch lassen sich mittels des Feldstechers keine Einzelheiten mehr erkennen.

III. (wenig Dunst). Das Meißnergebirge ist nicht sichtbar, dagegen sind die 13 km entfernten „falschen Gleichen“, der 16,4 km entfernte „Hohe Hagen“ noch deutlich erkennbar.

IV. (Dunst). Die unter III genannten Berge sind nicht mehr erkennbar; Die Stadt Göttingen ist, wenn auch in starker Trübung, sichtbar.

V. (starker Dunst, Nebel). Die Stadt Göttingen ist nicht sichtbar, nur noch nahe gelegene Baumgruppen sind zu erkennen.

Die Angaben üker die allgemeine Wetterlage sind nach den von der deutschen Seewarte herausgegebenen Wetterkarten zusammengestellt.

Resultate.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der luftelektrischen und der meteorologischen Beobachtungen zusammengestellt. Es bezeichnet $\lambda_p = \varepsilon \sum n_p v_p$ den Anteil der positiven Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit $\lambda_n = \varepsilon \sum n_n v_n$ den entsprechenden Anteil der negativen Ionen [ε Ladung der Ionen in elektrostat. Maß, n_p bezw. n_n Zahl der positiven bezw. negativen Ionen im ccm, v_p bezw. v_n

die spezifische Geschwindigkeit der positiven bezw. negativen Ionen (die Maßeinheiten sind besonders bezeichnet), E_p bezw. E_n die vom Ionenzähler angezeigte Ionenladung in elektrostatischen Einheiten/ccm. Dabei ist v_p bezw. v_n einfach als Quotient $\frac{\lambda_p}{E_p}$ bezw. $\frac{\lambda_n}{E_n}$ berechnet, unter der noch zu erörternden Annahme, daß der Ionenzähler quantitativ alle in der Luft enthaltenen Ionen wirklich zur Messung bringt. $\frac{dV}{dh}$ bezeichnet das Potentialgefälle (in besonders angegebenen Einheiten) j_h die Dichte des vertikalen Leitungsstromes in elektrostatischem Maße.

Diskussion der Resultate.

Bezeichnet q die Zahl der in der Zeiteinheit und Volumeneinheit durch die vorhandenen Ionisatoren erzeugten Ionen jedes Vorzeichens, α den Koefficienten der Wiedervereinigung der Ionen, so gelten, wenn man die Diffusion der Ionen außer acht läßt für die Strömung in der Luft die folgenden Gleichungen

$$1)\qquad \frac{\partial n_p}{\partial t} = q - \alpha . n_p . n_n - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j_{ph}}{\partial h}$$

$$2)\qquad \frac{\partial n_n}{\partial t} = q - \alpha\ n_p\ n_n + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j_{nh}}{\partial h}$$

$$3)\qquad j_{ph} + j_{nh} = j_h = -\frac{\partial V}{\partial h}\cdot(\lambda_p + \lambda_n) = -\frac{\partial V}{\partial h}\varepsilon\,(n_p v_p + n_n v\,)$$

$$4)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = -4\pi\varepsilon\,(n_p - n_n) = -4\pi\varrho,$$

worin ϱ die räumliche Ladungsdichte bezeichnet. Dabei sind die horizontalen Feldkomponenten und Strömungskomponenten, sowie ihre Aenderungen nach der Horizontalen außer acht gelassen; es ist hier eine Atmosphäre in Betracht gezogen, deren Eigenschaften sich in horizontalen Schichten nur unmerklich ändern, ein Fall der eine weitgehende Annäherung an die häufig vorliegende Verteilung der luftelektrischen Elemente unter den als „normal" bezeichneten Verhältnissen darstellen dürfte. Es ist dabei vorläufig auch die Konvektion von Ladungen völlig außer acht gelassen.

Durch Subtraktion der Gleichungen 1 und 2 erhält man:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} - \frac{\partial n_n}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial j_{ph}}{\partial h} + \frac{\partial j_{nh}}{\partial h}\right)$$

oder

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial j_h}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial V}{\partial h}\ (\lambda_p + \lambda_n)\ \right]$$

Fasst man die Anteile der positiven und der negativen Ionen an der Leitfähigkeit unter dem Zeichen λ zusammen, so beschreibt die Gleichung

$$-\frac{\partial j_h}{\partial h} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial V}{\partial h}\cdot \lambda\right].$$

unabhängig von jeder speziellen hypothetischen Annnahme über die Natur der Strömung in allgemeinster Form die Eigenschaften der stationären und der nicht stationären Strömung.

Soll die räumliche Ladungsdichte ϱ erhalten bleiben, so ergibt sich unmittelbar

$$-\frac{\partial j_h}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial V}{\partial h}\cdot \lambda\right] = 0$$

d. h. die Dichte des vertikalen Leitungsstromes oder das Produkt von Potentialgefälle und Leitfähigkeit ist überall da, wo eine zeitliche Änderung der räumlichen Ladungsdichte nicht eintritt, unabhängig vom Orte konstant.

Dieses Resultat habe ich bei der Diskussion meiner Messungen der Dichte des vertikalen Leitungsstromes in der freien Atmosphäre zur Feststellung derjenigen Schichten benutzt, in denen stationäre Strömung herrscht. Die geringe Veränderlichkeit des vertikalen Leitungsstromes mit der Höhe, die ich bei diesen Messungen vorfand, zeigt unmittelbar, dass die vertikale Leitungsströmung nahezu den stationären Zustand einhält. Die tatsächlich vorkommenden Werte der zeitlichen Änderungen der räumlichen Ladungsdichte sind immerhin merklich, so berechnet sich z.B. aus dem größten bei der Fahrt vom 30. VIII. 1905 vorgefundenen Wert von $\frac{\partial j_h}{\partial h}$ in der Höhe von 4100 bis 4300 m $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ zu $10^{-11}\ \frac{\text{elektrost. Einheiten}}{\text{cm}^3\ \text{sec.}}$; da nun die räumliche Ladungsdichte in jener Höhe rund $7{,}6 \cdot 10^{-9}$ $\frac{\text{elektrost. Einheiten}}{\text{cm}^3}$ betrug, würde bei konstantem $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ die räumliche Ladungsdichte schon in 760 sec. auf 0 herabgesunken sein. Es liegt nahe, dieser Folgerung gegenüber auf die Unzulänglichkeit dieser Betrachtungsweise, die ja die Konvektion von Ladungen

außer acht läßt, hinzuweisen und zugleich die Annahme als wahrscheinlich zu erkennen, die ich an der angegebenen Stelle bezüglich des horizontalen Konvektionsstromes gemacht habe.

Die Bedingung für das stationäre Verhalten von ϱ:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \lambda\right]$$

enthält zunächst nur eine Beschränkung für das Produkt von Potentialgefälle und Leitfähigkeit, nicht unmittelbar für die einzelnen Faktoren. Es ist der Fall denkbar, daß sich stets $\frac{\partial V}{\partial h}$ und λ so ändern, daß einerseits das Produkt konstant erhalten wird, andererseits aber auch $\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = -4\pi\varrho$ konstant ist — ein Fall, der nicht selten in der Atmosphäre realisiert zu sein scheint.

Die Addition der Gleichungen 1) und 2) ergibt:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial n_n}{\partial t} = 2q - 2\alpha n_p n_n - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j_{ph}}{\partial h} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial j_{nh}}{\partial h}$$

oder

$$\frac{\partial (n_p + n_n)}{\partial t} = 2q - 2\alpha n_p n_n - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\partial V}{\partial h}(\lambda_p - \lambda_n)\right].$$

Diese Beziehung zwischen den durch spezielle ionenhypothetische Annahmen definierten Grössen n_p, n_n, q, α, λ_p und λ_n läßt einige für die atmosphärische Elektrizität nicht unwichtige Folgerungen zu. Ich habe in der freien Atmosphäre mehrfach oberhalb und unterhalb einer Stabilitätsschicht die Differenz $\lambda_p - \lambda_n$ von entgesetztem Vorzeichen gefunden, ohne bei dem Potentialgefälle eine erhebliche Änderung mit der Höhe feststellen zu können. Es besass also das letzte Glied auf der rechten Seite einen merklichen Wert; man durfte also eine etwa vorhandene zeitliche Änderung der spezif. Ionenzahlen nicht auf Rechnung einer Verschiebung des Gleichgewichts zwischen Ionisierungsstärke und Molisierungsstärke setzen. Andererseits lehren die in der oben wiedergegebenen Tabelle enthaltenen Werte der kurz nacheinander bestimmten λ_p und λ_n, daß häufig am Boden die Differenz $\lambda_p - \lambda_n$ nahezu $= 0$ ist (eine Tatsache, die schon H. Schering[1]) aufgefallen ist). In allen diesen Fällen wird auch die Änderung des Produktes $\frac{\partial V}{dh}(\lambda_p - \lambda_n)$ mit der Höhe sehr klein sein; d. h. wir werden die etwa bei dieser

1) H. Schering, Dissertation, Göttingen 1904.

Lage eintretenden zeitlichen Änderungen der spezifischen Ionenzahlen auf Rechnung einer Verschiebung des Gleichgewichts zwischen Ionisierungsstärke und Molisierungsstärke setzen müssen.

Bei dem Versuch, die zeitlichen Änderungen der luftelektrischen Elemente in ihrer Abhängigkeit von den zeitlichen Änderungen der meteorologischen Faktoren zu verstehen, stößt man auf die Schwierigkeit, den Einfluß der Konvektion von Ladungen abschätzen zu müssen. Mir schien es daher geboten, bei der Sammlung von Beobachtungsmaterial zunächst diejenigen Wetterlagen zu bevorzugen, bei denen der Einfluss des Konvektionsstromes möglichst zurücktritt hinter demjenigen des Leitungsstromes. Wie aus dem oben reproduzierten Material hervorgeht, fallen die Messungen in überwiegender Anzahl in die Herrschaft von Hochdruckgebieten, die durch geringe Luftbewegung nicht nur in geringen Höhen, sondern herauf bis zu mittleren Höhen ausgezeichnet sind. Es wird somit den Messungen des vertikalen Leitungsstromes eine besondere Bedeutung zukommen, als sie unter den vorliegenden Umständen im wesentlichen über den gesamten Elektricitätsaustausch zwischen Erde und Atmosphäre Auskunft geben. Bemerkenswert ist die geringe zeitliche Änderung der Dichte des vertikalen Leitungsstromes an mehreren Beobachtungstagen, die namentlich überall da als auffällig gelten muß, wo das Potentialgefälle und die Leitfähigkeit für sich allein starken Änderungen unterliegen. Es hat somit den Anschein, als ob die schon früher von mir verwendete Erklärung der Änderungen des Potentialgefälles aus den Änderungen der Leitfähigkeit unter Aufrechterhaltung des stationären Strömungszustandes in vielen Fällen zutreffend ist; andererseits läßt es sich nicht verkennen, daß in anderen Fällen durchaus nicht die stationäre Strömung erhalten wird, vielleicht weil in diesen Fällen die Änderungen der Leitfähigkeit zu schnell erfolgen, als daß sich der stationäre Zustand merklich wieder einstellen könnte. Der andere Weg, die Änderungen des Potentialgefälles durch zeitlich veränderliche Zufuhr von positiver Ladung in der Höhe zu erklären, scheint mir bei diesen Messungen, die unter möglichstem Ausschluß der Konvektion stattfanden, nicht beschritten werden zu dürfen.

Der Mittelwert für die Dichte des vertikalen Leitungsstromes, den man ohne Berücksichtigung der gestörten Werte vom 8. IV. erhält, ergibt sich zu $8{,}000 \cdot 10^{-7}$ elektrostat. (aus 49 Messungen). — Von Interesse dürften auch die Werte des gestörten Vertikalstromes vom 8. IV. sein.

Eine statistische Bearbeitung des erhaltenenen Materials habe

ich wegen der verhältnismäßig geringen Anzahl der Beobachtungen unterlassen, doch wird man unschwer auch aus meinen Messungen eine Bestätigung der allgemein anerkannten Beziehungen z. B. zwischen Lufttrübung und Leitfähigkeit entnehmen.

Die Leitfähigkeitsmessungen ergeben als Mittel für

$$\lambda_p = 1{,}155 \cdot 10^{-4} \text{ elektrostat. (aus 51 Messungen)}$$

und für

$$\lambda_n = 1{,}120 \cdot 10^{-4} \text{ elektrostat. (aus 50 Messungen).}$$

Bemerkenswert ist der geringe Wert der Differenz $\lambda_p - \lambda_n$ der sich auch in den Mittelwerten zeigt.

Auf die Messungen der spezifischen Ionenzahlen und Ionengeschwindigkeiten lege ich keinen größeren Wert, da zweifellos der Ionenzähler nur einen kleinen Bruchteil aller in der Luft vorhandenen Ionen angibt. Dabei werden die Werte für E_p und E_n meines Erachtens weniger der Wirklichkeit entsprechen als die Werte der v_p und v_n, der mittleren spezifischen Ionengeschwindigkeiten, da diese nur wenig durch das Vorhandensein oder Fehlen der schwer beweglichen Ionen beeinflußt werden können. Die Mittelwerte für diese Größen sind:

$$E_p = 0{,}354 \cdot 10^{-6} \text{ (aus 51 Messungen) elektrostat.}$$

$$E_n = 0{,}287 \cdot 10^{-6} \text{ (aus 49 Messungen) elektrostat.}$$

$$v_p = 326 \text{ elektrostat.} = 1{,}09 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec.}} \Big/ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}} \text{ (aus 51 Messungen)}$$

$$v_n = 394 \text{ elektrostat.} = 1{,}31 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec.}} \Big/ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}} \text{ (aus 49 Messungen)}$$

Ebensowenig wie den Werten E_p und E_n selbst lege ich der Differenz $E_p - E_n$ eine größere Bedeutung bei. Von Wichtigkeit scheint mir an den vorliegenden Resultaten in erster Linie der zeitliche Verlauf des Vertikalstromes zu sein, in zweiter Linie die Bestätigung der Erfahrung, daß häufig die Anteile der beiden Ionenarten an der Leitfähigkeit einander sehr nahe gleich sind. Weitere Folgerungen theoretischer Art, die sich aus diesen Resultaten ziehen lassen, sollen in einer späteren Arbeit gegeben werden.

Über die Komposition der quadratischen Formen.

Von

H. Weber.

Vorgelegt von Herrn H. Minkowski in der Sitzung am 9. Februar 1907.

§ 1. Die Gauss'sche Theorie der Komposition.

Im Artikel 235 der „Disquisitiones arithmeticae" gibt Gauss folgende Erklärung der Komposition der quadratischen Formen:

1. Wenn drei binäre quadratische Formen F, f, f' mit ganzzahligen Koeffizienten in der Beziehung zu einander stehen, daß durch eine bilineare Substitution mit ganzzahligen Koefficienten p, q

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= pxx'+p'xy'+p''yx'+p'''yy', \\ Y &= qxx'+q'xy'+q''yx'+q'''yy' \end{aligned}$$

die Gleichung

$$(2) \qquad F(X, Y) = f(x, y)f'(x', y')$$

identisch in Bezug auf (x, y), (x', y') befriedigt wird, so heißt F in das Produkt ff' transformierbar.

Um die weitere Erklärung der Komposition zu verstehen und kurz zu formulieren, mache ich folgende Bemerkung:

Wenn für irgend eine Primzahl $\varkappa$ die Kongruenz

$$(3) \qquad lX+mY \equiv 0 \pmod{\varkappa}$$

durch zwei Zahlen l, m, die nicht beide durch $\varkappa$ teilbar sind, identisch befriedigt werden kann, wenn also die vier Kongruenzen

$$(4) \qquad \begin{aligned} lp+mq &\equiv 0, \quad lp'+mq' \equiv 0, \\ lp''+mq'' &\equiv 0, \quad lp'''+mq''' \equiv 0 \end{aligned} \pmod{\varkappa}$$

zugleich bestehen, so müssen die sechs Determinanten

$$(5)\qquad \begin{array}{lll} pq'-qp', & pq''-qp'', & pq'''-qp''', \\ p'q''-q'p'', & p'q'''-q'p''', & p''q'''-q''p''', \end{array}$$

die bei Gauss mit P, Q, R, S, T, U bezeichnet sind, durch $\varkappa$ teilbar sein; und wenn umgekehrt dies zutrifft, so sind die Kongruenzen (4) in der angegebenen Weise zu befriedigen. Dies ist evident, wenn alle p durch $\varkappa$ teilbar sind. Ist aber z. B. p nicht durch $\varkappa$ teilbar, so braucht man nur $m = -p$, $l = q$ zu setzen, um diesen Kongruenzen zu genügen.

Wenn die Kongruenz (3) möglich ist, ohne daß l und m durch $\varkappa$ teilbar sind, so will ich die Funktionen X, Y nach dem Modul $\varkappa$ linear abhängig, im entgegengesetzten Fall linear unabhängig nennen, und wenn X, Y in Bezug auf jeden Primzahl-Modul linear unabhängig sind, so will ich sie schlechtweg linear unabhängig nennen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für linear unabhängige bilineare Funktionen X, Y ist also die, daß die sechs Determinanten (5) keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Hiernach lautet die zweite Gauss'sche Definition so:

2. Die Form F heißt aus f und f' komponiert, wenn die Transformation (2) durch linear unabhängige Funktionen X, Y möglich ist.

Die Folgerungen, die sich aus dieser Definition ergeben, hat Gauss in der fünften Sektion der Disq. arith. in voller Allgemeinheit aber nicht ohne weitläufige Rechnungen abgeleitet. Um diese Rechnungen zu vereinfachen, hat schon Dirichlet einen andern Weg eingeschlagen, und neuerdings hat Dedekind mit Hilfe des von ihm ausgebildeten Algorithmus der allgemeinen Differentiation oder Vektorenbildung der Theorie eine sehr elegante Gestalt gegeben. Ich gebe im Folgenden noch eine andere Darstellung, die, wie die Dedekind'sche, von den trilinearen Formen ausgeht, aber die lineare Transformation und die Invariantentheorie mehr in den Vordergrund stellt [1]).

§ 2. Die trilineare Form und ihre Invarianten.

Es sei

$$(6)\qquad \begin{aligned} H = {} & \alpha_0 x_1 x_2 x_3 + \alpha_1 x_1 y_2 y_3 + \alpha_2 y_1 x_2 y_3 + \alpha_3 y_1 y_2 x_3 \\ & + \beta_0 y_1 y_2 y_3 + \beta_1 y_1 x_2 x_3 + \beta_2 x_1 y_2 x_3 + \beta_3 x_1 x_2 y_3 \end{aligned}$$

1) Dirichlet, de formarum binariarum secundi gradus compositione (1851) Werke, Bd. II, S. 105. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., § 145 f. Dedekind, Crelle, Bd. 129 (Dirichlet-Band).

eine trilineare Form der drei Variablenpaare

$$(7) \qquad (x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ (x_3 y_3).$$

Die Koeffizienten mögen vorläufig gleichfalls als unabhängige Variable betrachtet werden.

Eine lineare Substitution

$$x = \lambda x' + \mu y',$$
$$y = \nu x' + \varrho y',$$

deren Determinante

$$\delta = \lambda\varrho - \mu\nu$$

von Null verschieden ist, bezeichne ich in üblicher Weise durch

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix}(x', y') = (L)(x', y')$$

und ihre Auflösung mit

$$(\delta x', \delta y') = \begin{pmatrix} \varrho, & -\mu \\ -\nu, & \lambda \end{pmatrix}(x, y) = (L)^{-1}(x, y).$$

Ferner soll r, s, t irgend eine Permutation der drei Indizes 1, 2, 3 bedeuten.

Ich transformiere nun die Form H durch drei gleichzeitig ausgeführte von einander unabhängige lineare Substitutionen L_1, L_2, L_3 mit den Determinanten δ_1, δ_2, δ_3. Alle entsprechenden Größen in den transformierten Formen sollen durch Akzente unterschieden werden. Wir haben also zunächst

$$\text{I} \qquad H = H'.$$

Die partiellen Ableitungen

$$(8) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_r} = -Y_r, \quad \frac{\partial H}{\partial y_r} = X_r$$

sind bilineare Formen der Variablenpaare (x_s, y_s), (x_t, y_t), und wenn man auf sie die Substitutionen L_1, L_2, L_3 anwendet, so ergibt sich, daß $\delta_r X_r$, $\delta_r Y_r$ mit x_r, y_r kongredient transformiert werden:

$$\text{II} \qquad (\delta_r X_r, \delta_r Y_r) = L_r(X'_r, Y'_r).$$

Wir führen weiter die drei quadratischen Formen ein:

$$(9) \qquad f_t = -\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\frac{\partial^2 H}{\partial y_r \partial y_s} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial y_s}\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial y_r} = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_r}{\partial x_s} & \dfrac{\partial X_r}{\partial y_s} \\ \dfrac{\partial Y_r}{\partial x_s} & \dfrac{\partial Y_r}{\partial y_s} \end{vmatrix},$$

die nur von je einem Variablenpaar x_t, y_t abhängen. Aus II

ergibt sich für diese Funktionen die Invarianten-Eigenschaft

III $$f'_t = \delta_r \delta_s f_t.$$

Die Diskriminanten der f_t

$$D_t = \left(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x_t \partial y_t}\right)^2 - \frac{\partial^2 f_t}{\partial x_t^2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial y_t^2} \tag{10}$$

hängen nur von den Koeffizienten α, β ab und genügen der Relation

IV $$D'_t = \delta_r^2 \delta_s^2 \delta_t^2 D_t.$$

Die Relation III ist vermöge L_t eine Identität in x'_t, y'_t. Ersetzt man darin x'_t, y'_t durch X'_t, Y'_t, so hat man nach II x_t, y_t durch $\delta_t X_t, \delta_t Y_t$ zu ersetzen und wenn man also

$$f_t(X_t, Y_t) = F_t \tag{11}$$

setzt, so folgt:

V $$F'_t = \delta_r \delta_s \delta_t^2 F_t.$$

Endlich bilden wir noch eine trilineare Invariante

$$\Theta_t = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} X_t + \frac{\partial f_t}{\partial y_t} Y_t, \tag{12}$$

für die man aus II und III die Relation erhält:

VI $$\Theta'_t = \delta_r \delta_s \delta_t \Theta_t.$$

§ 3. Normalform von H.

Die Funktionen X_r, Y_r erhalten nach (6) und (8) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} X_r &= \beta_r x_s x_t + \alpha_s x_s y_t + \alpha_t x_t y_s + \beta_0 y_s y_t, \\ Y_r &= -\alpha_0 x_s x_t - \beta_t x_s y_t - \beta_s x_t y_s - \alpha_r y_s y_t, \end{aligned} \tag{13}$$

und darnach:

$$\begin{aligned} f_t &= (\beta_r x_t + \alpha_s y_t)(\beta_s x_t + \alpha_r y_t) - (\alpha_0 x_t + \beta_t y_t)(\alpha_t x_t + \beta_0 y_t) \\ &= a_t x_t^2 + b_t x_t y_t + c_t y_t^2, \end{aligned} \tag{14}$$

wenn

$$\begin{aligned} a_t &= \beta_r \beta_s - \alpha_0 \alpha_t, \\ b_t &= \alpha_r \beta_r + \alpha_s \beta_s - \alpha_t \beta_t - \alpha_0 \beta_0, \\ c_t &= \alpha_r \alpha_s - \beta_0 \beta_t. \end{aligned} \tag{15}$$

Sodann ist

$$D_t = b_t^2 - 4 a_t c_t. \tag{16}$$

Werden nun für die Koeffizienten α, β solche Zahlenwerthe gesetzt, daß die Diskriminanten D nicht verschwinden, so zerfällt

jede der Funktionen f_ι in zwei von einander verschiedene lineare Faktoren, die als Variable in H eingeführt werden können. Sind die Variablen x_ν, y_ν so gewählt, so müssen die sechs Größen a_ι, c_ι verschwinden, während von den drei Größen b_ι keine verschwindet. Es bestehen dann die sechs Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} \alpha_0\alpha_1 &= \beta_2\beta_3, & \beta_0\beta_1 &= \alpha_2\alpha_3,\\ \alpha_0\alpha_2 &= \beta_3\beta_1, & \beta_0\beta_2 &= \alpha_3\alpha_1,\\ \alpha_0\alpha_3 &= \beta_1\beta_2, & \beta_0\beta_3 &= \alpha_1\alpha_2. \end{aligned}$$

Und daraus:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \alpha_0\beta_0\cdot\alpha_1\beta_1 &= \alpha_2\beta_2\cdot\alpha_3\beta_3,\\ \alpha_0\beta_0\cdot\alpha_2\beta_2 &= \alpha_3\beta_3\cdot\alpha_1\beta_1,\\ \alpha_0\beta_0\cdot\alpha_3\beta_3 &= \alpha_1\beta_1\cdot\alpha_2\beta_2. \end{aligned}$$

Wenn keine der Größen α, β verschwindet, so ergibt sich hieraus:

$$(\alpha_0\beta_0)^3 = \alpha_1\beta_1\cdot\alpha_2\beta_2\cdot\alpha_3\beta_3$$

und daraus nach (18):

$$\alpha_0\beta_0 = \pm\alpha_1\beta_1 = \pm\alpha_2\beta_2 = \pm\alpha_3\beta_3$$

und zwar so, daß das Produkt der drei Vorzeichen positiv ist. Dann aber verschwinden mindestens zwei der Größen b_1, b_2, b_3, gegen die Voraussetzung. Es muß also mindestens eine der acht Größen α, β verschwinden. Nun können aber auch nicht alle vier Produkte $\alpha_0\beta_0$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ verschwinden, weil sonst $b_1, b_2, b_3 = 0$ wären, und wir beschränken die Allgemeinheit nicht, wenn wir annehmen, $\alpha_0\beta_0$ sei von Null verschieden, da wir, wenn etwa $\alpha_\nu\beta_\nu$ nicht Null wäre, nur y_ν mit x_ν zu vertauschen brauchten um $\alpha_\nu\beta_\nu$ in $\alpha_0\beta_0$ überzuführen. Sei also etwa $\alpha_1 = 0$, so folgt aus (17)

$$\beta_2 = 0,\quad \beta_3 = 0,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 0,\quad \beta_1 = 0.$$

Demnach hat H die Normalform

$$(19)\qquad H = \alpha_0 x_1 x_2 x_3 + \beta_0 y_1 y_2 y_3,$$

und wir erhalten:

$$(20)\qquad X_\iota = \beta_0 y_\varkappa y_\lambda,\quad Y_\iota = -\alpha_0 x_\varkappa x_\lambda,$$

$$(21)\qquad f_\iota = -\alpha_0\beta_0 x_\iota y_\iota,$$

$$(22)\qquad D_\iota = \alpha_0^2\beta_0^2,$$

$$(23)\qquad F_\iota = \alpha_0^2\beta_0^2 x_\varkappa y_\varkappa x_\lambda y_\lambda,$$

$$(24)\qquad \Theta_\iota = \alpha_0\beta_0(\alpha_0 x_1 x_2 x_3 - \beta_0 y_1 y_2 y_3).$$

Man sieht hieraus, daß die drei Diskriminanten D_1, D_2, D_3 und ebenso die drei Funktionen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ je unter einander identisch sind und daher mit D und Θ bezeichnet werden können, und wir erhalten überhaupt aus (19)—(24) die folgenden Relationen:

$$\text{VII} \qquad D_1 = D_2 = D_3 = D,$$

$$\text{VIII} \qquad F_t = f_r f_s,$$

$$\text{IX} \qquad \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta.$$

Diese Formeln sind zunächst nur für die Normalform abgeleitet; aber die Invarianten-Relationen I, III, IV, V, VI zeigen sofort, daß sie allgemeine Gültigkeit haben[1]).

Wir setzen jetzt

$$(25) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial y_r} - x_r \sqrt{D} &= u_r, & \frac{\partial f_r}{\partial y_r} + x_r \sqrt{D} &= \bar{u}_r, \\ -\frac{\partial f_r}{\partial x_r} - y_r \sqrt{D} &= v_r, & -\frac{\partial f_r}{\partial x_r} + y_r \sqrt{D} &= \bar{v}_r \end{aligned}$$

und geben der $\sqrt{D}$ ein beliebiges aber festes Vorzeichen.

Es sind dann $u_r, \bar{u}_r$ oder $v_r, \bar{v}_r$ die linearen Faktoren von f_r und die Verhältnisse $u_r : v_r$ und $\bar{u}_r : \bar{v}_r$ sind konstant. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn eine dieser Linearformen identisch verschwindet, was aber nur eintritt, wenn eine der Größen a_r, c_r gleich Null ist.

Wendet man die linearen Substitutionen (L_1), (L_2), (L_3) an, und definiert $\sqrt{D'}$ durch

$$(26) \qquad \sqrt{D'} = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \sqrt{D},$$

so ergibt sich

$$(27) \qquad \begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \delta_3 (u_r, v_r) &= (L_r)(u'_r, v'_r), \\ \delta_1 \delta_2 \delta_3 (\bar{u}_r, \bar{v}_r) &= (L_r)(\bar{u}'_r, \bar{v}'_r), \end{aligned}$$

---

1) Einfache Rechnung gibt für D den Ausdruck:

$$\begin{aligned} D = \alpha_0^2 \beta_0^2 + \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 + 4\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 4\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\ - 2\alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 - 2\alpha_0 \beta_0 \alpha_2 \beta_2 - 2\alpha_0 \beta_0 \alpha_3 \beta_3 \\ - 2\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 - 2\alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \beta_3 - 2\alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3, \end{aligned}$$

und wenn man die Koeffizienten von Θ mit A, B bezeichnet:

$$A_0 = \quad 2\beta_1 \beta_2 \beta_3 - \alpha_0(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 - \alpha_0 \beta_0) = \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \beta_0},$$

$$B_0 = -2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_0(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 - \alpha_0 \beta_0) = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \alpha_0},$$

und daraus erhält man die übrigen Koeffizienten durch zyklische Vertauschung von 0, 1, 2, 3.

wo auf der linken Seite der gemeinsame Faktor $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ von u_r, v_r vor die Klammern gezogen ist.

Wenn in (25) x_r, y_r durch X_r, Y_r ersetzt wird, so möge u_r, v_r in U_r, V_r übergehen, und dann ergibt sich nach II und (27):

$$(28)\qquad \begin{aligned} \delta_r^2 \delta_s \delta_t (U_r, V_r) &= (L_r)(U'_r, V'_r), \\ \delta_r^2 \delta_s \delta_t (\overline{U}_r, \overline{V}_r) &= (L_r)(\overline{U}'_r, \overline{V}'_r). \end{aligned}$$

Für die Normalform erhält man

$$\begin{aligned} H' &= \alpha'_0 x'_1 x'_2 x'_3 + \beta'_0 y'_1 y'_2 y'_3, \\ f'_r &= -\alpha'_0 \beta'_0 x'_r y'_r, \\ \sqrt{D'} &= \alpha'_0 \beta'_0, \\ X'_r &= \beta'_0 y'_s y'_t, \quad Y'_r = -\alpha'_0 x'_s x'_t, \\ u'_r &= -2\alpha'_0 \beta'_0 x'_r, \quad \overline{u}'_r = 0, \\ v'_r &= 0, \quad \overline{v}'_r = 2\alpha'_0 \beta'_0 y'_r, \\ U'_r &= -2\alpha'_0 \beta'^2_0 y'_s y'_t, \quad \overline{U}'_r = 0, \\ V'_r &= 0, \quad \overline{V}'_r = -2\alpha'^2_0 \beta'_0 x'_s x'_t, \end{aligned}$$

$$(29)\qquad U'_r = \text{const.}\, \overline{v}'_s \overline{v}'_t, \quad \overline{V}'_r = \text{const.}\, u'_s u'_t.$$

Daß wir $\sqrt{D'} = \alpha'_0 \beta'_0$ und nicht, was auch erlaubt wäre, $= -\alpha'_0 \beta'_0$ gesetzt haben, ist dadurch gerechtfertigt, daß wir das eine Zeichen auf das andere durch eine Substitution mit der Determinante -1 zurückführen können. Die entgegengesetzte Annahme würde kein anderes Resultat ergeben. Durch Anwendung von (29) folgt aber aus (27) und (28):

$$\text{XI}\qquad \begin{aligned} V_r &= \omega_r \overline{v}_s \overline{v}_t, \\ \overline{V}_r &= \overline{\omega}_r v_s v_t, \end{aligned}$$

worin ω_r, $\overline{\omega}_r$ Konstanten sind, die sich durch Vergleichung eines Koeffizienten leicht bestimmen lassen[1]). Durch Multiplikation ergibt sich nach VIII

$$(30)\qquad a_r = 4\omega_r \overline{\omega}_r a_s a_t.$$

§ 4. Komposition der quadratischen Formen.

Es seinen jetzt φ_2, φ_3 zwei primitive quadratische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten von der gleichen nicht verschwin-

1) Man findet durch Rechnung:

$$\begin{aligned} 4 a_s a_t \omega_r &= -2 a_r \beta_r + (b_r + \sqrt{D}) \alpha_0, \\ 4 a_s a_t \overline{\omega}_r &= -2 a_r \beta_r + (b_r - \sqrt{D}) \alpha_0. \end{aligned}$$

denden Diskriminante ∂ [1]), und φ_1 sei eine aus diesen komponierte ganzzahligen Form.

Nach der Definition muß es dann zwei linear unabhängige bilineare Formen X_1, Y_1 geben, die wir (anders wie in § 1) so bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \beta_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_2 y_3 + \alpha_3 x_3 y_2 + \beta_0 y_2 y_3, \\
Y_1 &= -\alpha_0 x_2 x_3 - \beta_3 x_2 y_3 - \beta_2 x_3 y_2 - \alpha_1 y_2 y_3,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

durch die die Gleichung

$$
\varphi_1(X_1, Y_1) = \varphi_2(x_2, y_2)\,\varphi_3(x_3, y_3)
\tag{32}
$$

identisch befriedigt wird.

Um aber zugleich die Frage zu beantworten, ob, wenn $X_1, Y_1, \varphi_2, \varphi_3$ ganzzahlige Koeffizienten haben, φ_1 gebrochene Koeffizienten haben könne, multiplizieren wir (32) mit dem Hauptnenner k der Koeffizienten von φ_1 und schreiben also

$$
\varphi_1(X_1, Y_1) = k\varphi_2(x_2, y_2)\,\varphi_3(x_3, y_3),
\tag{33}
$$

worin jetzt φ_1 als ganzzahlig und k relativ prim zum Teiler von φ_1 vorausgesetzt ist.

Wir bilden zunächst aus (31) die trilineare Form

$$
H = X_1 y_1 - Y_1 x_1,
\tag{34}
$$

die dann, auch in der Bezeichnung, mit (6) übereinstimmt, und leiten daraus nach (9) die Funktionen f_1, f_2, f_3 und nach (11) F_1 her.

Es kommt noch die Bedingung hinzu, daß X_1, Y_1 linear unabhängig sein sollen. Diese bestehen nach § 1 darin, daß die sechs Zahlen

$$
\begin{gathered}
\beta_1\beta_3 - \alpha_0\alpha_2, \quad \beta_1\beta_2 - \alpha_0\alpha_3, \quad \alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0, \\
\alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3, \quad \alpha_1\alpha_2 - \beta_0\beta_3, \quad \alpha_1\alpha_3 - \beta_0\beta_2
\end{gathered}
\tag{35}
$$

keinen gemeinsamen Teiler haben. Diese Zahlen stimmen aber nach (15) überein mit

$$
\begin{gathered}
a_2, \quad a_3, \quad \tfrac{1}{2}(b_2 + b_3), \\
\tfrac{1}{2}(b_2 - b_3), \quad c_3, \quad c_2,
\end{gathered}
\tag{36}
$$

---

1) Ich wende an Stelle der Gaussschen Bezeichnung

$$(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

die jetzt gebräuchlichere und zweckmäßigere an, nach der

$$(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$$

ist und nenne die Form primitiv, wenn a, b, c keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Es tritt dann an Stelle der Gaussschen Determinante $b^2 - ac$ die Discriminante $b^2 - 4ac$. Die Unterscheidung von eigentlich und uneigentlich primitiven Formen ist dann nicht mehr nötig. Vgl. diese Nachrichten vom 18. Januar 1898.

und wenn diese einen gemeinsamen Teiler haben, so haben ihn auch die daraus zusammengesetzten

$$(37) \qquad a_2,\ a_3,\quad b_2,\ b_3,\quad c_2,\ c_3.$$

Sind umgekehrt die Zahlen (37) durch eine Primzahl π teilbar, so sind die Zahlen (36) durch π teilbar. Dies ist zunächst evident wenn π ungerade ist, und für $\pi = 2$ folgt es aus der Gleichheit der Diskriminanten $b_3^2 - 4a_3c_3 = b_2^2 - 4a_2c_2$, wonach, wenn die sechs Zahlen (37) gerade Zahlen sind, $\frac{1}{2}b_3 \equiv \frac{1}{2}b_2 \pmod{2}$ ist. Wir haben also

3. **Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktionen X_1, Y_1 linear unabhängig sind, besteht darin, daß die Teiler m_2, m_3 von f_2, f_3 zu einander teilerfremd sind.**

Setzen wir

$$(38) \qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial X_1}{\partial y_2} y_2, \\ Y_1 &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial Y_1}{\partial y_2} y_2, \end{aligned}$$

so haben wir eine lineare Substitution für X_1, Y_1, durch die die quadratische Form φ_1 nach (33) in die mit $k\varphi_3$ multiplizierte Form φ_2 übergeht und wir können den Satz anwenden, nach dem die Diskriminante der transformierten Form, also hier $k^2\varphi_3^2\partial$ gleich ist der Diskriminante der ursprünglichen Form, multipliziert mit dem Quadrat der Substitutions-Determinante. Die Substitutions-Determinante von (38) ist aber nach (9) gleich $-f_3$, und folglich ist, wenn ∂_1 die Diskriminante von φ_1 ist:

$$(39) \qquad \partial_1 f_3^2 = k^2 \varphi_3^2 \partial,$$

und ebenso:

$$(40) \qquad \partial_1 f_2^2 = k^2 \varphi_2^2 \partial.$$

Sind nun m_2 und m_3 die Teiler von f_2 und f_3, so folgt, da φ_2 und φ_3 primitiv vorausgesetzt sind:

$$(41) \qquad \partial_1 m_2^2 = \partial_1 m_3^2 = k^2 \partial.$$

Es ist daher ∂_1 von Null verschieden und $m_2 = m_3$. Andererseits ist m_2 zu m_3 relativ prim und es muß also $m_2 = m_3 = 1$ sein. Mithin ist

$$(42) \qquad k^2 \partial = \partial_1$$

und folglich nach (39), (40):

$$(43) \qquad f_2 = \pm \varphi_2,\quad f_3 = \pm \varphi_3.$$

Ferner ergibt sich aus (33) und VIII:

$$\varphi_1(X_1, Y_1) = \pm k f_2 f_3 = \pm k f_1(X_1, Y_1),$$

also $\varphi_1 = \pm k f_1$ und da k relativ prim zum Teiler von φ_1 sein sollte, so muß $k = 1$ sein. Es folgt also $f_1 = \pm \varphi_1$, und wir setzen:

$$(45) \qquad \varphi_1 = \varepsilon_1 f_1, \quad \varphi_2 = \varepsilon_2 f_2, \quad \varphi_3 = \varepsilon_3 f_3,$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ gleich ± 1 sind und nach (32) und VIII der Bedingung genügen:

$$(46) \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1,$$

und es ergibt sich aus (41), daß $\partial_1 = \partial$ ist, daß also φ_1 dieselbe Diskriminante hat, wie φ_2 und φ_3. Ferner folgt aus (32), daß der Teiler von φ_1 in dem Produkt der Teiler von φ_2, φ_3 enthalten sein müßte (nach dem Satze der Algebra, daß der Teiler eines Produktes gleich dem Produkt der Teiler der Faktoren ist) und folglich ist der Teiler von φ_1 gleich 1, d. h. φ_1 ist gleichfalls primitiv. Außerdem folgt noch aus (VIII), daß jede der drei Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus den beiden andern zusammengesetzt ist.

Drei Formen, die in dieser Beziehung zu einander stehen, nennen wir ein Formentripel und nach den Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ haben wir vier Arten solcher Tripel zu unterscheiden: $(+1, +1, +1)$, $(+1, -1, -1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, -1, +1)$. Die erste dieser Arten, in der die Vorzeichen in (45) alle positiv sind, wollen wir die Hauptart nennen.

Unterwerfen wir die Variablen (x_r, y_r) einer ganzzahligen linearen Transformation (L_r) mit der Determinante $\delta_r = \pm 1$, so gehen die drei Formen φ_r in eigentlich oder uneigentlich aequivalente Formen φ'_r über, und wegen II geht auch $\varphi_r(X_r, Y_r)$ in $\varphi'_r(X'_r, Y'_r)$ über, während f_r nach III in $\delta_s \delta_t f'_r$ übergeht. Es bleibt also (32) bestehen, während (45) in

$$\varphi'_r = \varepsilon_r \delta_s \delta_t f'_r$$

übergeht. Nimmt man also $\delta_r = \varepsilon_r$, so erhält man $\varphi'_r = f'_r$ und die φ'_r bilden ein Tripel der Hauptart. Es ergibt sich hieraus der Satz

4. Ersetzt man die Formen eines Tripels durch eigentlich aequivalente Formen, so erhält man ein Tripel derselben Art. Durch den Uebergang zu uneigentlich aequivalenten Formen kann man aus jedem Tripel ein Tripel der Hauptart erhalten.

Hiernach wollen wir uns in der Folge auf die Tripel der Hauptart beschränken und vereinigen alle eigentlich aequivalenten

Formen in eine Klasse. Wir nennen dann drei Klassen A_1, A_2, A_3 ein Klassentripel, wenn drei Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, aus jeder Klasse eine, ein Formentripel der Hauptart ergeben. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß in einem Tripel dieselbe Klasse mehrmals vorkommt.

Es ist noch folgender Satz zu beweisen:

5. Durch zwei Klassen eines Tripels ist die dritte eindeutig bestimmt.

Er wird bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß zwei Formen φ_1 und φ_1', die aus denselben beiden Formen φ_2, φ_3 in derselben Art komponiert sind, mit einander aequivalent sind.

Ist aber φ_1 und φ_1' in der gleichen Art aus φ_2 und φ_3 komponiert, so folgt nach (32)

$$\varphi_1(X_1, Y_1) = \varphi_1'(X_1', Y_1'), \tag{47}$$

da beide Seiten $= \varphi_2 \varphi_3$ sind, und nach XI:

$$\begin{aligned} \omega_1' V_1 &= \omega_1 V_1', \\ \overline{\omega}_1' \overline{V}_1 &= \overline{\omega}_1 \overline{V}_1'. \end{aligned} \tag{48}$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen zwischen den X_1, Y_1, X_1', Y_1', die nach X_1, Y_1 aufgelöst werden können; denn die Determinante von $V_1, \overline{V}_1$ ist von Null verschieden $(= -4a_1\sqrt{D})$; und wir erhalten zwei Relationen

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda X_1' + \mu Y_1', \\ Y_1 &= \nu X_1' + \varrho Y_1'. \end{aligned} \tag{49}$$

Hierin sind $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ rationale Zahlen; denn verbindet man die beiden Gleichungen (48) durch Addition und Subtraktion, so fällt das irrationale $\sqrt{D}$ heraus.

Es sind aber $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ganze Zahlen. Denn wäre ihr Hauptnenner durch irgend eine Primzahl π teilbar, die nicht in allen vier Zählern aufgeht, so würde aus (49) eine Kongruenz

$$l X_1' + m Y_1' \equiv 0 \pmod{\pi}$$

folgen, in der l, m nicht beide durch π teilbar sind. Dies aber widerspricht der Annahme, nach der X_1', Y_1' linear unabhängig sein sollen.

Endlich ist auch die Determinante

$$\delta = \lambda\varrho - \mu\nu = 1. \tag{50}$$

Denn die Funktional-Determinanten von (X_1, Y_1) und von (X_1', Y_1') nach (x_2, y_2) sind einander gleich, nämlich $= -f_3(x_3, y_3)$.

Nach alle dem bleiben die Gleichungen (48) bestehen, wenn für (X_1, Y_1), (X_1', Y_1') zwei Variablenpaare x_1, y_1; x_1', y_1' gesetzt werden, die durch die Substitution (49):

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \varrho \end{pmatrix} (x_1', y_1') \tag{51}$$

mit einander verbunden sind, und durch Multiplikation dieser beiden Relationen ergibt sich dann nach (26), (30):

$$\varphi_1(x_1 y_1) = \varphi_1'(x_1' y_1').$$

Dadurch ist aber die Aequivalenz von φ_1 und φ_1' ausgedrückt und der Satz 5. bewiesen.

§ 5. Die Gruppe der Formenklassen.

Ich will jetzt eine spezielle trilineare Form betrachten:

$$H = x_1 x_2 x_3 - a_1 x_1 y_2 y_3 - a_2 x_2 y_3 y_1 - a_3 x_3 y_1 y_2 - b y_1 y_2 y_3. \tag{52}$$

Hierfür ergibt sich nach (8) und (9)

$$\begin{aligned} X_r &= -a_s x_s y_t - a_t x_t y_s - b y_s y_t, \\ Y_r &= -x_s x_t \quad + a_r y_s y_t. \end{aligned} \tag{53}$$

$$f_r = (a_r, b, a_s a_t), \tag{54}$$

$$D = b^2 - 4 a_1 a_2 a_3. \tag{55}$$

Wir haben also das Ergebnis:

6. Die drei Formen

$$(a_1, b, a_2 a_3),\ (a_2, b, a_3 a_1),\ (a_3, b, a_1 a_2)$$

bilden ein Tripel mit der Diskriminante $D = b^2 - 4a_1 a_2 a_3$.

Um hieraus Folgerungen für die Komposition zu ziehen, schicke ich folgende Bemerkungen voraus, die sich auf primitive Formen beziehen.

a) Man kann in jeder Formenklasse A eine repräsentierende Form (a, b, c) so wählen, daß a eine beliebige, durch die Formen der Klasse A eigentlich darstellbare Zahl ist, man kann also a relativ prim zu einer beliebig gegebenen Zahl Q annehmen.

b) Man kann, ohne aus der Klasse herauszukommen, den zweiten Koeffizienten b durch jede nach dem Modul $2a$ mit b kongruente Zahl ersetzen. Man kann also b aus einem beliebigen Restsystem nach dem Modul $2a$ entnehmen.

c) Es gibt nur eine Formenklasse, durch deren Formen die Zahl 1 darstellbar ist; diese Klasse heißt die Hauptklasse. Sie wird

repräsentiert durch die Hauptform:

$$\left(1, 1, \frac{1-D}{4}\right) \text{ oder } \left(1, 0, \frac{D}{4}\right),$$

je nachdem $D \equiv 1$ oder $\equiv 0 \pmod{4}$ ist.

d) Die beiden Formen (c, b, a), $(a, -b, c)$ gehören der zu A entgegengesetzten Klasse A^{-1} an. Eine Klasse, die mit ihrer entgegengesetzten identisch ist, heißt anceps oder zweiseitig (auch ambig).

Daraus ergeben sich die Hauptsätze über die Komposition sehr einfach:

7. Sind A_2 und A_3 zwei beliebige Klassen der Diskriminante D, so gibt es eine (und nach 5. nur eine) Klasse A_1, die mit A_2 und A_3 ein Tripel bildet.

Man ermittle in A_2, A_3 zwei Formen (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), in denen a_2 und a_3 zu einander relativ prim sind, und bestimme b aus den Kongruenzen

$$b \equiv b_2 \pmod{2a_2}, \quad b \equiv b_3 \pmod{2a_3}.$$

Dann ist $b^2 - D$ durch $4a_2 a_3$ teilbar und wir setzen

$$D = b^2 - 4a_1 a_2 a_3.$$

Nach 6. bilden dann

$$(a_1, b, a_2 a_3), \ (a_2, b, a_3 a_1), \ (a_3, b, a_1 a_2)$$

ein Formentripel.

Um die Klasse A mit ihrer entgegengesetzte A^{-1} zu komponieren, betrachte man die beiden Formen (a_2, b, a_3), (a_3, b, a_2), wo $D = b^2 - 4a_2 a_3$. Nimmt man dann in 6. $a_1 = 1$, so folgt:

8. Zwei entgegengesetzte Klassen bilden mit der Hauptklasse zusammen ein Tripel.

Ist (a, b_1, c_1) eine Form der Klasse A, in der a zu $D = b^2 - 4ac$ und folglich auch zu b relativ prim ist, so kann man für jeden Exponenten n eine Zahl b durch die Kongruenz

$$b \equiv b_1 \pmod{2a}, \quad b^2 \equiv D \pmod{4a^n}$$

bestimmen (Schluß von n auf $(n+1)$), und wenn man $D = b^2 - 4a^n c$ setzt, so erhält man nach 6. ein Tripel:

$$(56) \qquad (a, b, a^{n-1} c), \ (a^{n-1}, b, c), \ (c, b, a^n).$$

Dies gibt die wiederholte Komposition einer Form mit sich selbst.

Endlich beweisen wir noch einen Satz, der das assoziative Gesetz der Komposition der Formen enthält:

9. Es seien

$$A_1,\ A_2,\ A_3$$

irgend drei Klassen der Diskriminante D,

$$B_1,\ B_2,\ B_3$$

drei weitere Klassen von der Art, daß

$$(B_1, A_2, A_3),\ (B_2, A_3, A_1),\ (B_3, A_1, A_2)$$

je ein Tripel bilden, dann bilden die drei Paare

$$A_1 B_1^{-1},\ A_2 B_2^{-1},\ A_3 B_3^{-1}$$

mit einer und derselben Klasse C je ein Tripel.

Um ihn zu beweisen, wählen wir aus A_1, A_2, A_3 drei repräsentierende Formen (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), in denen a_1, a_2, a_3 je zu zweien relativ prim sind, und bestimmen b aus den Kongruenzen

$$b \equiv b_1 \pmod{2a_1}, \quad b \equiv b_2 \pmod{2a_2}, \quad b \equiv b_3 \pmod{2a_3}.$$

Dann ist $b^2 - D$ teilbar durch $4a_1 a_2 a_3$, und wir setzen

$$D = b^2 - 4a_1 a_2 a_3 c.$$

Dann können die Klassen A_1, A_2, A_3 repräsentiert werden durch

$$(a_1, b, a_2 a_3 c),\ (a_2, b, a_3 a_1 c),\ (a_3, b, a_1 a_2 c)$$

und B_1, B_2, B_3 nach 6. durch

$$(a_1 c, b, a_2 a_3),\ (a_2 c, b, a_3 a_1),\ (a_3 c, b, a_1 a_2),$$

und wir haben das Tripel

$$(a_1, b, a_2 a_3 c),\ (a_2 a_3, b, a_1 c),\ (c, b, a_1 a_2 a_3).$$

Ist also C durch $(c, b, a_1 a_2 a_3)$ repräsentiert, so bildet A_1, B_1^{-1}, C ein Tripel. C ändert sich aber nicht, wenn die Indizes 1, 2, 3 permutiert werden.

Wollen wir auf Grund dieser Sätze die Formenklassen der Diskriminante D zu einer Abelschen Gruppe vereinigen, so müssen wir das Kompositionsgesetz so formulieren, daß, wenn A_1, A_2, A_3 ein Tripel bilden, nicht A_1 sondern A_1^{-1} aus A_2, A_3 komponiert genannt wird. Ebenso ist dann A_2^{-1} aus A_1, A_3 und A_3^{-1} aus A_1, A_2 komponiert. Der Satz 9 enthält das assoziative Gesetz dieser Komposition. Denn darnach ist $B_1^{-1} = A_2 A_3$ und folglich

$$C = A_1(A_2 A_3) = A_2(A_3 A_1) = A_3(A_1 A_2) = A_1 A_2 A_3.$$

Die Einheit dieser Gruppe ist die Hauptklasse E, und ein Tripel A_1, A_2, A_3 ist durch

$$E = A_1 A_2 A_3$$

charakterisiert.

Ohne Benutzung der speziellen Repräsentanten der Klassen kann man das assoziative Gesetz auch auf folgende Weise ableiten:

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Formen der Diskriminante D, und ψ_1, ψ_2, ψ_3 drei Formen von der Art, daß $(\psi_1^{-1}, \varphi_2, \varphi_3)$, $(\varphi_1, \psi_2^{-1}, \varphi_3)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_3^{-1})$ je ein Tripel bilden (wenn ψ, ψ^{-1} zwei entgegengesetzte Formen (a, b, c), $(a, -b, c)$ bedeuten).

Bilden dann $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$, $(\varphi_2, \psi_2, \chi_2)$, $(\varphi_3, \psi_3, \chi_3)$ wieder je ein Tripel, so ist zu beweisen, daß χ_1, χ_2, χ_3 aequivalent sind. Man zerlege die Formen nach (25) in lineare Faktoren:

$$(57) \qquad \varphi = u\bar{u}, \quad \psi = v\bar{v}, \quad \chi = w\bar{w},$$

$$-u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\sqrt{D}, \quad -v = \frac{\partial\psi}{\partial x} + y\sqrt{D}, \quad -w = \frac{\partial\chi}{\partial x} + y\sqrt{D}.$$

Dann sind $\bar{v}(x, -y)$, $v(x, -y)$ die entsprechenden Faktoren von ψ^{-1}, und es ergibt sich aus XI, von konstanten Faktoren abgesehen:

$$(58) \qquad v_1(X_1, -Y_1) = u_2 u_3,$$

$$(59) \qquad \bar{w}_1 = u_1 v_1,$$

Substituiert man in (59) $X_1, -Y_1$ für die Variablen in v_1, so gehen die Variablen in w_1 in trilineare Formen Ξ_1, H_1 der ursprünglichen Variablen von v_1, v_2, v_3 über und man erhält aus (58) und (59):

$$w_1(\Xi_1, H_1) = u_1 u_2 u_3,$$

und es ergibt sich also

$$w_1(\Xi_1, H_1) = w_2(\Xi_2, H_2) = w_3(\Xi_3, H_3),$$

woraus die Aequivalenz von χ_1, χ_2, χ_3 ebenso wie in § 4, 5. folgt.

Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von

Otto Toeplitz in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Februar 1907.

Im folgenden soll die sog. Jacobische Transformation der quadratischen Formen auf eine Summe von Quadraten dazu benutzt werden, einige Resultate der vierten Mitteilung von Hilbert „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“ [1]) kurz abzuleiten und zu ergänzen. Und zwar handelt es sich um die Resultate des ersten, allgemeinen Teiles dieser Mitteilung (bis pag. 199), soweit sie die Existenz einer beschränkten Resolvente (= „Reziproke“ in der Sprache des Matrizenkalküls), aber nicht die Spektren und die orthogonale Transformation auf eine Summe von Quadraten und Integralen betreffen. Dabei soll der Schwerpunkt der Beweisführung noch um einiges nach der algebraischen Seite verschoben werden; alle Convergenzsätze werden entbehrlich bis auf einen einzigen, sehr einfachen (§ 2, a), der aus Hilberts 4. Mitteilung übernommen wird.

§ 1. Die Jacobische Transformation.

Sei eine quadratische Form von n Veränderlichen vorgelegt

$$S_n = \sum_{\iota,\kappa=1}^{n} a_{\iota\kappa} x_\iota x_\kappa \qquad (a_{\iota\kappa} = a_{\kappa\iota})$$

seien $S_1, S_2, \ldots$ die successiven Abschnitte von S_n, d. h.

1) Diese Nachr. 1906, pag. 157 ff.

$$S_\alpha = \sum_{i,k=1}^{\alpha} a_{ik} x_i x_k,$$

und seien $A_{ik}^{(\alpha)}$ die ersten Minoren von S_α, $A^{(\alpha)}$ die Determinante von S_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$). Sind nun diese Determinanten

$$A^{(1)} = a_{11}, \; A^{(2)} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \ldots\ldots, A^{(n)}$$

sämtlich von 0 verschieden und setzt man [1])

$$
\begin{aligned}
v_1 \sqrt{1 . A^{(1)}} &= u_1 \\
v_2 \sqrt{A^{(1)} A^{(2)}} &= A_{21}^{(2)} u_1 + A_{22}^{(2)} u_2 \\
v_3 \sqrt{A^{(2)} A^{(3)}} &= A_{31}^{(3)} u_1 + A_{32}^{(3)} u_2 + A_{33}^{(3)} u_3 \\
v_4 \sqrt{A^{(3)} A^{(4)}} &= A_{41}^{(4)} u_1 + A_{42}^{(4)} u_2 + A_{43}^{(4)} u_3 + A_{44}^{(4)} u_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{1}
$$

so gilt die Identität:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \frac{1}{A^{(n)}} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}^{(n)} u_i u_k$$

oder

$$U'_n U_n = S_n^{-1}, \tag{1a}$$

wenn man sich der Symbolik des Matrizen-Calcüls [2]) bedient und die lineare Substitution (1) mit U_n und ihre Transponierte mit U'_n bezeichnet. Es folgt

$$U_n^{-1} U_n'^{-1} = S_n \tag{1b}$$

und damit die Darstellung von S_n als Summe von n Quadraten.

§ 2. Hilfssätze und Konvergenzen.

a) Eine Bilinearform von unendlichvielen Variabeln und mit reellen Coefficienten

$$A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k$$

heiße, in genauer Uebereinstimmung mit Hilbert [3]), beschränkt, wenn eine positive Größe M existiert, sodaß der $n$te Abschnitt

---

1) Allgemein für Bilinearformen wird diese Transformation von Jacobi (Crelle Bd. 53, pag. 265 ff.) aufgestellt; für quadratische Formen wird sie schon von Lagrange und Gauß verwendet.

2) Vgl. etwa Frobenius, Crelle Bd. 84, pag. 1 ff. oder Kronecker Vorlesungen über Determinanten (Hensel) Leipzig 1903.

3) l. c. pag. 176.

$$A_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$$

für jedes n dem Betrage nach unter M bleibt für alle reellen x_i, y_k, für die

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1. \tag{2}$$

Der einzige für das folgende nötige **Convergenzsatz** ist der von Hilbert bewiesene, einfache Satz, daß das Produkt (Hilbert nennt es „Faltung") zweier beschränkter Bilinearformen existiert und wieder beschränkt ist, und daß für das Produkt dreier beschränkter Bilinearformen das associative Gesetz gilt, kurz, daß man mit ihnen rechnen kann wie mit Bilinearformen von n Variabeln [1]).

b) Aus der Lagrangeschen Determinantenidentität folgt für beliebige reelle Größen die auch von Hilbert [2]) vielfach benutzte, der Schwarzschen Ungleichung analoge Ungleichheit:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right| \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}. \tag{3}$$

Sei ferner $A_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k$ irgend eine reelle Bilinearform, und seien die Größen x_i, y_k an die Relationen (2) gebunden, so ergibt die Anwendung von (3):

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \right| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \right)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$
$$\leqq \sqrt{\sum_{k,\alpha,\beta} a_{\alpha k} a_{\beta k} x_\alpha x_\beta};$$

wiederholt man noch dieselbe Schlußweise unter Bevorzugung der Variabeln x_i, so erhält man:

Das Maximum des Betrages einer reellen Bilinearform A von $2n$ reellen Veränderlichen x_i, y_k mit den

---

1) l. c. pag. 179f. Bei Gelegenheit des Beweises dieses Faltungssatzes zeigt Hilbert auch, daß eine beschränkte Bilinearform für alle Variabelnwerte von konvergenter Quadratsumme konvergiert im Sinne der Convergenz von Doppelreihen und auch im Sinne zeilenweiser oder kolonnenweiser Summation von Doppelreihen. Daher soll, obgleich es leicht wäre, im folgenden diese Sätze bis auf den Faltungssatz selbst zu entbehren, doch von ihnen Gebrauch gemacht werden, weil dadurch der Gedankengang vielleicht klarer hervortritt.

2) l. c. pag. 176.

Quadratsummen $\sum_i x_i^2 = 1$, $\sum_k y_k^2 = 1$ übersteigt sicher nicht die Quadratwurzel aus dem Maximum des Betrages der beiden zugehörigen quadratischen Formen $A_n A_n'$ und $A_n' A_n$.

c) Das Maximum des Betrages einer reellen quadratischen Form

$$S_n = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right)$$

ist gleich dem reziproken Betrage der absolut kleinsten Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$| E_n - \lambda S_n | \equiv | \delta_{ik} - \lambda a_{ik} | = 0,$$

und das Maximum der Reziproken S_n^{-1} gleich dem Betrage der absolut größten Wurzel eben dieser Gleichung, deren sämtliche Wurzeln bekanntlich reell sind.

Bei einer positiv-definiten quadratischen Form sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung positiv, und umgekehrt. Ueberhaupt nimmt eine reelle quadratische Form den reziproken Wert jeder Wurzel ihrer charakteristischen Gleichung wirklich für ein Wertsystem von der Quadratsumme 1 an.

§ 3. Die Resolvente (Reziproke) einer positiv-definiten unendlichen quadratischen Form.

Sei

$$S = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k$$

eine reelle quadratische Form der unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$, S_n ihr $n$ter Abschnitt, $A^{(n)}$ dessen Determinante, $A_{ik}^{(n)}$ dessen Minoren.

Es mögen die folgenden Annahmen gemacht werden:

I. S ist positiv-definit, d. h. für reelle Argumentwerte von convergenter Quadratsumme nie negativ.

II. Die Wurzeln der successiven charakteristischen Abschnittsgleichungen $| E_n - \lambda S_n | = 0$ haben ∞ nicht zur Häufungsstelle (∞ ist nicht „Verdichtungswert", wie Hilbert es ausdrückt).

Alsdann ist wegen I auch jeder Abschnitt S_n von S positiv-definit; denn würde ein solcher für irgend ein reelles Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ negativ sein, so wäre S selbst für das Wertsystem $x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots$ negativ. Also ist $A^{(n)} \geqq 0$ als Produkt der reziproken Wurzeln. Wegen II sind aber auch alle Abschnittsdeter-

minanten $A^{(n)} \neq 0$; denn wäre $A^{(n)} = 0$, so gäbe es Werte $x_1, \ldots, x_n$ von der Quadratsumme 1, die S_n annullieren (wegen § 2, c), und somit auch alle $S_{n+\alpha}$ $(\alpha > 0)$, d. h. ∞ wäre Nullstelle von unendlichvielen der Abschnittsgleichungen, wäre Verdichtungswert. Hält man beides zusammen, so folgt aus I und II gemeinsam, daß alle $A^{(n)} > 0$ sind.

Auf Grund dieser Bemerkung ist es zunächst möglich, aus S nach dem Muster der Substitution U_n (§ 1 Formel 1) eine Substitution (Matrix) U zu construieren, deren Zeilen sich nach unten unbegrenzt fortsetzen. Ihre bemerkenswerteste Eigenschaft ist die successive Art ihrer Bildung: ihr $n$ter Abschnitt U_n hängt nur von denjenigen Koeffizienten von S ab, die dem $n$ten Abschnitt S_n von S angehören, und genügt für jedes n einzeln der Relation (1a).

Weiter sind auf Grund der vorangeschickten Bemerkung die in U auftretenden Radicanden alle positiv, also U_n eine reelle Matrix; daher ist der Satz § 2, b anwendbar und besagt, daß

$$\text{Max. } U_n \leq \sqrt{\text{Max. } U_n' U_n} = \sqrt{\text{Max. } S_n^{-1}}$$

ist, unter Max. P allgemein das Maximum des Betrages der reellen Bilinearform P für alle ihre Variabelnwerte von der Quadratsumme 1 verstanden.

Endlich ergibt II unter Berücksichtigung von § 2, c, daß Max. S_n^{-1} unter einer von n unabhängigen Grenze M^2 bleibt, also

$$\text{Max. } U_n \leq M;$$

das besagt aber, ex definitione, daß die zur Matrix U gehörige Bilinearform beschränkt ist. Da mit U auch die transponierte Matrix U' beschränkt ist, existiert nach dem Hilbertschen Faltungssatz (§ 2, a) $U'U$ und ist wiederum beschränkt. Heiße diese quadratische Form von unendlich vielen Variabeln S^{-1}. (Vgl. Hilbert, l. c. Satz I).

Fügt man jetzt die weitere Voraussetzung hinzu

III. daß S selbst beschränkt ist,

so ergibt in analoger Weise die Anwendung von Satz § 2, b auf Formel (1b) im § 1, daß auch U_n^{-1} unter einer von n unabhängigen Grenze bleibt. Bildet man nun durch successive Auflösung die (eindeutig bestimmte) zu U inverse Substitution U^{-1}, die dasselbe treppenartige Aussehen erhält, so ersieht man aus der successiven Art ihrer Bildung, daß ihr $n$ter Abschnitt für sich die Reziproke U_n^{-1} des $n$ten Abschnitts U_n von U ist. Danach besagt III in Verbindung mit (1b), daß alle Abschnitte von U^{-1} dem Betrage nach unter einer festen Größe liegen, daß also U^{-1} be-

schränkt ist; genau ebenso ist $U'^{-1} = U^{-1'}$ beschränkt. Mithin ist es (§ 2,a) gestattet, mit den vier Formen U, U', U^{-1}, U'^{-1} nach Belieben zu rechnen wie mit endlichen Matrizen. Endlich folgert man aus der successiven Bildung von U^{-1} und aus (1b): $U^{-1}\,U'^{-1} = S$. So ergibt sich, daß

$$S.S^{-1} = U^{-1}\,U'^{-1}\,U'\,U = E$$
$$S^{-1}\,S = U'\,U\,U^{-1}\,U'^{-1} = E$$

ist, d. h. daß S^{-1} nicht nur existiert und beschränkt ist, sondern auch eine Resolvente von S (vgl. Hilbert l. c. Satz II).

§ 4. Formales über Reziproke (Resolventen).

Anders wie bei endlichen Matrizen (Bilinearformen, Substitutionen) kann bei unendlichen, beschränkten, reellen Bilinearformen mehr als eine Reziproke existieren, $AX = E$, $AY = E$, oder es kann A eine hintere (beschränkte) Reziproke haben ($AX = E$), aber keine vordere ($YA = E$ unlösbar); $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\,y_{i+1}$ gibt ein Beispiel dafür. Immerhin gelten folgende Sätze, unter Bilinearform immer eine reelle, beschränkte verstanden.

Formalsatz. Besitzt eine unendliche Bilinearform sowohl eine vordere als eine hintere Reziproke, so sind beide einander gleich und also beide die einzigen.

Denn aus $AX = E$, $YA = E$ folgt durch vordere Multiplication mit Y und hintere mit X

$$YAX = Y = X.$$

Eindeutigkeitssatz für symmetrische Formen. Eine symmetrische Bilinearform besitzt entweder gar keine Reziproke oder eine einzige ebenfalls symmetrische, vorn und hinten dieselbe.

Denn aus $SX = E$ folgt $X'\,S' = E$ oder wegen $S' = S$ (Symmetrie) $X'S = E$; der obige Formalsatz ergibt das übrige.

Resolvente soll eine Reziproke immer nur genannt werden, wenn sie zugleich vordere und hintere Reziproke ist.

§ 5. Die Resolvente einer beliebigen reellen Bilinearform.

Die Resultate von § 3 stehen hinter den daneben notierten von Hilbert vor der Hand noch hinsichtlich der Annahme I, daß S definit sei, zurück. Es soll jetzt der Grund angegeben werden,

weshalb diese Annahme es gerade bewirkt, daß man die Existenz der Resolvente mit so geringen Convergenzhilfsmitteln beweisen kann, und sodann gezeigt werden, wie die Existenz der Resolvente einer indefiniten quadratischen oder bald allgemeiner einer beliebigen reellen, unsymmetrischen Bilinearform auf die Sätze von § 3 ohne Schwierigkeit zurückgeführt werden kann.

Hilberts Verfahren läuft darauf hinaus, daß er die Abschnittsresolventen S_n^{-1} betrachtet und darauf ausgeht, zu zeigen, daß diese gegen eine Grenzresolvente S^{-1} convergieren. Das ist nun aber, wie bei dieser Gelegenheit hervorgehoben sei, nicht immer, wenn eine beschränkte Resolvente existiert, möglich; es gibt Fälle, wo unendlich viele Abschnittsdeterminanten verschwinden („∞ Verdichtungswert ist") und trotzdem eine beschränkte Resolvente vorhanden ist. Das Beispiel der Form

$$2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 + 2x_5 x_6 + \cdots,$$

die ihre eigene Resolvente ist, belegt dies. Dies ist der Grund, weshalb Hilbert erst aus der Gesamtheit aller Abschnittsresolventen einen Teil herausgreifen muß, und von da entspringen die Schwierigkeiten seines Existenzbeweises, die freilich für seine viel weitergehenden Sätze über Streckenspektren nicht zu umgehen sind.

Bei definiten Formen sind nun diese Schwierigkeiten nicht vorhanden. Denn wenn nur eine Abschnittsdeterminante einer definiten Form verschwindet, so tun es nach einer Bemerkung im § 3 auch alle folgenden, es existiert sicher keine Grenzresolvente der Abschnittsresolventen; daß in diesem Falle überhaupt keine beschränkte Resolvente existiert, wird unten gezeigt werden (§ 6). —

Es wird also ganz naturgemäß sein, den allgemeinen Fall auf den definiten zurückzuführen. Zu diesem Ende bilde man, wenn A eine gegebene beschränkte, reelle Bilinearform ist, die symmetrische Form

$$AA' = \sum_{i,k,\alpha} a_{i\alpha} a_{k\alpha} x_i x_k = \sum_i \left(\sum_\alpha a_{i\alpha} x_i\right)^2,$$

die, ihrer zweiten Schreibweise gemäß, positiv-definit ist. Erfüllt diese nun die Voraussetzung II (III war von vornherein hier notwendig anzunehmen, damit die Faltung AA' gebildet werden kann), so existiert eine Resolvente R, sodaß $AA'R = E$. In $A'R$ hat man somit auch eine hintere Reziproke von A.

Ist A symmetrisch, so ist damit nach dem Eindeutigkeitssatz von § 4 die Existenz der beschränkten Resolvente

erwiesen. Ist A nicht symmetrisch, und erfüllt $A'A$ ebenfalls die Annahme II, so erhält man zugleich eine vordere beschränkte Reziproke und hat damit eine hinreichende Bedingung auch für die Existenz einer eindeutigen Resolvente einer nicht symmetrischen Bilinearform.

§ 6. Notwendigkeit der gefundenen Bedingungen für die Existenz von Reziproken (Resolventen).

Die gefundenen hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Reziproken sind nun auch, im Gegensatz zu denen Hilberts, die notwendigen. A sei irgend eine reelle, beschränkte Bilinearform und besitze eine beschränkte hintere Reziproke P, sei also $AP = E$, d. h.

$$\sum_i x_i y_i = \sum_\alpha \left(\sum_i a_{i\alpha} x_i \cdot \sum_k p_{\alpha k} y_k\right).$$

In Rücksicht auf § 2, b ist daher[1]):

$$\left\{\sum x_i y_i\right\}^2 \leqq \sum_\alpha \left(\sum_i a_{i\alpha} x_i\right)^2 \cdot \sum_\alpha \left(\sum_k p_{\alpha k} y_k\right)^2,$$

mithin für $x_i = y_i$ $(\sum x_i^2 = 1)$:

$$1 \leqq AA' \,\text{Max.}\,(P'P).$$

Aus der Beschränktheit von P folgt, daß Max. $(P'P)$ eine bestimmte positive Größe ist; also ist für alle x von der Quadratsumme 1 die quadratische Form AA' dem Betrage nach über einer festen positiven, von 0 verschiedenen Größe gelegen, d. h. AA' genügt der Bedingung II (vgl. die Bemerkung am Ende von § 2, c).

Analog folgt aus der Existenz einer vorderen beschränkten Reziproken, daß $A'A$ der Bedingung II genügt.

Gesamtergebnis. Eine reelle, beschränkte Bilinearform A besitzt dann und nur dann eine hintere beschränkte Reziproke, wenn AA' nicht den Verdichtungswert ∞ hat, dann und nur dann eine vordere, wenn $A'A$ derselben Bedingung genügt, und beides zugleich, also eine eindeutige, beschränkte Resolvente dann und nur dann, wenn sowohl AA' als auch $A'A$ in ∞ keinen Verdichtungswert aufweisen.

Speziell besitzt also eine reelle, beschränkte quadratische Form (symmetrische Bilinearform) S dann und nur dann eine beschränkte Resolvente S^{-1}, wenn die definite quadratische Form S^2 ∞ nicht zum Verdichtungswert hat.

---

1) Die hier folgende Schlußweise verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Ernst Hellinger in Göttingen.

In ähnlicher Weise kann die Behandlung bilinearer Formen mit complexen Coeffizienten auf die der definiten Hermiteschen Formen $A\bar{A}'$, $\bar{A}'A$ zurückgeführt werden, unter überstrichenen Größen die conjugiert-complexen verstanden.

Dagegen entstehen Schwierigkeiten, wenn man die Methode der § 3, bezw. die von Jacobi angegebene Verallgemeinerung auf beliebige Bilinearformen benutzen will, um direkt die indefiniten quadratischen oder die bilinearen Formen unendlich vieler Veränderlichen zu behandeln.

Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von

Otto Toeplitz in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Februar 1907.

Nachdem Hilbert[1]) den Nachweis erbracht hat, daß sich eine Theorie der orthogonalen Transformation der reellen quadratischen Formen von abzählbar unendlich vielen Variabeln in einiger Analogie zur entsprechenden algebraischen Theorie der quadratischen Formen von endlich vielen Veränderlichen aufstellen läßt, ist es in den Bereich der Möglichkeit gerückt, eine Übertragung der allgemeineren algebraischen Sätze über die Transformation bilinearer Formen (mit complexen Coefficienten), der sog. Elementarteilertheorie, auf bilineare Formen von abzählbar unendlich vielen Veränderlichen zu versuchen. Die Schwierigkeiten einer solchen Aufgabe vermehren sich naturgemäß gegenüber denjenigen der Hilbertschen Untersuchung in demselben oder noch höherem Maße, als sich die Verhältnisse beim Übergang von der orthogonalen Transformation der reellen quadratischen Formen mit endlicher Variablenzahl zur Elementarteilertheorie komplizieren. Es wird daher vielleicht nicht unangebracht erscheinen, den Hilbertschen Sätzen weiteres orientierendes Material über eine spezielle Klasse von unendlichen Bilinearformen mit complexen Coefficienten an die Seite zu stellen, wie dies die im folgenden mitgeteilten Resultate in erster Reihe bezwecken. Nebenbei dürften diese besonderen Bilinearformen („Laurent-Formen") geeignet sein, Ele-

1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, vierte Mitteilung, diese Nachr. 1906, p. 157—199.

mente einer allgemeineren Theorie (d. h. „irreduzible Bestandteile“ oder „Elementarformen“) abzugeben.

Uebrigens ist das folgende von Hilberts Entwicklungen unabhängig und setzt deren Kenntnis nicht voraus.

1.

Eine bilineare Form

$$A = \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} x_i y_k$$

heiße im folgenden „absolut beschränkt“ oder „beschränkt“,[1] wenn sich eine positive Größe M angeben läßt, sodaß

$$\sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} | a_{ik} | x_i y_k$$

convergiert und unter M liegt für alle positiven x_i, y_k, deren Quadratsummen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k^2$$

convergieren und gleich 1 sind.

Für die Gesamtheit der beschränkten Bilinearformen von unendlich vielen Variabeln kann man ohne Einschränkung den Calcül[2] etablieren, den Cayley und Frobenius für Bilinearformen von endlich vielen Variabeln in Aufnahme gebracht haben.

Eine beschränkte Bilinearform A heiße abgeschlossen, wenn eine andere beschränkte Bilinearform A^{-1} existiert, die den symbolischen Relationen

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i y_i$$

genügt. Es gibt übrigens beschränkte Bilinearformen, für die die eine der beiden Gleichung $A X = E$, $Y A = E$ eine und dann immer bald unendlich viele beschränkte Lösungen besitzt, während die andere garnicht beschränkt gelöst werden kann.

2.

Algebraisches Problem. Zwei Bilinearformen A, B von n Variabeln pflegt man „ähnlich“ zu nennen, wenn sie sich durch

---

1) wie in folgendem der Kürze halber trotz der nicht ganz vollständigen Uebereinstimmung mit dem gleichbenannten Begriffe Hilberts (l. c. pag. 176) gesagt werden soll.

2) Vgl. etwa Frobenius, Crelle 84, pag. 1 ff. oder Kronecker, Vorlesungen über Determinanten, herausgeg. von Hensel, Leipzig 1903.

eine contragrediente Transformation der beiden Variabelnreihen in einander überführen lassen; symbolisch ausgedrückt: wenn sich eine Substitution P von nicht verschwindender Determinante finden läßt, sodaß

$$P^{-1} A P = B.$$

Es ist eines der Hauptresultate der Elementarteilertheorie — und auf dessen Analogisierung soll sich das folgende wesentlich beschränken —, daß zwei Bilinearformen A, B dann und nur dann ähnlich sind, wenn ihre charakteristischen Funktionen, d. h. die Determinanten

$$|A - \lambda E|, \; |B - \lambda E|$$

nicht nur selbst übereinstimmen, sondern auch in ihren Elementarteilern, d. h. in einer gewissen Art der Zerlegung in Faktoren; anders ausgedrückt, müssen also 1) die Nullstellen dieser beiden Funktionen von λ übereinstimmen, 2) deren Vielfachheiten und 3) noch gewisse andere, zu diesen Vielfachheiten hinzutretende ganze Zahlen.

Die Frage, unter welchen Bedingungen man zwei reelle quadratische Formen orthogonal in einander transformieren kann, ordnet sich diesem Aehnlichkeitsproblem unter, wenn man den weiteren Satz der Elementarteilertheorie hinzufügt, daß zwei quadratische Formen stets orthogonal in einander transformierbar sind, wenn dies nur contragredient möglich ist.

Transcendentes Problem. Zwei unendliche, beschränkte Bilinearformen mögen ähnlich heißen, wenn eine abgeschlossene Bilinearform P existiert, sodaß

$$P^{-1} A P = B.$$

Trotzdem bei beschränkten Bilinearformen im allgemeinen von einer Determinante der Form, mithin auch von ihrer chrakteristischen Funktion nicht geredet werden kann, wird es doch möglich, den Begriff der „Nullstellen der charakt. Funktion“ auf beschränkte Bilinearformen zu übertragen, wenn man sie als diejenigen Werte des Parameters λ definiert, für die $A - \lambda E$ bezw. $B - \lambda E$ nicht abgeschlossen ist; die Gesamtheit dieser Werte von λ werde, wesentlich in Übereinstimmung mit Hilberts Benennung, das Spektrum von A bezw. B genannt. Dann ist unmittelbar der Satz evident:

Ähnliche Bilinearformen haben dasselbe Spektrum.

3.

Unter einer Laurent-Form werde eine Bilinearform der besonderen Art

$$\sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} a_{k-i}\, x_i\, y_k$$

verstanden, deren Coefficientenschema also die folgende Struktur hat:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdot \\ \cdot & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdot \\ \cdot & a_{-2} & a_{-1} & \boxed{a_0} & a_1 & a_2 & \cdot \\ \cdot & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdot \\ \cdot & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Jeder Laurent-Form entspricht eindeutig eine Laurent-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

und umgekehrt. Es gelten die Sätze:

Satz 1. Eine Laurent-Form ist dann und nur dann beschränkt, wenn Σa_n absolut convergiert, speziell also immer dann, wenn die zugehörige Laurent-Reihe eine auf dem Einheitskreise eindeutige und reguläre analytische Funktion darstellt.

Satz 2. Summe und Produkt zweier Laurent-Formen entsprechen der Summe und dem Produkt der zugehörigen Laurent-Reihen.

Satz 3. Hat eine beschränkte Laurent-Form eine beschränkte Reziproke, so ist diese wiederum eine Laurent-Form. Eine nicht-abgeschlossene Laurent-Form hat stets weder eine vordere noch eine hintere beschränkte Reziproke.

Die Einheitsform E ist eine Laurentform, die Constante 1 vertritt die zugehörige analytische Funktion.[1])

---

1) Man kann die Gesamtheit der beschränkten Laurent-Formen auch als ein System komplexer Zahlen mit unendlich vielen Einheiten ansehen, in dem die Multiplikation kommutativ ist und ein Produkt nur verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet, also von der Eigenart, die unter allen Zahlensystemen mit endlich vielen Einheiten nur den gemeinen komplexen Größen zukommt.

Eine Laurent-Form, der eine wirkliche auf und in der Umgebung des Einheitskreises reguläre analytische Funktion $f(z)$ entspricht, soll mit $[f(z)]$ bezeichnet werden. Auf solche Laurent-Formen soll sich das folgende beschränken.

4.

Auf Grund dieser Definitionen und Sätze kann man, um es roh zu skizzieren, folgendermaßen schließen: das Spektrum einer Laurent-Form $A = [f(z)]$ ist die Gesamtheit derjenigen Werte des Parameters λ, für die $A - \lambda E = [f(z)] - \lambda E = [f(z) - \lambda]$ keine Reziproke hat, d. h. für die $f(z) - \lambda$ auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ den Wert 0 annimmt:

Das Spektrum einer Laurent-Form ist die Gesamtheit der Werte, die die zugehörige analytische Funktion auf dem Einheitskreise annimmt.

Das Spektrum einer Laurent-Form besteht also aus einer ganzen Linie, und zwar aus einer einzigen analytischen[1]), übrigens ganz willkürlichen Linie. Hilbert ist zu derartigen Streckenspektren bei seiner Theorie der reellen quadratischen Formen gelangt; das Spektrum einer solchen besteht im allgemeinen abgesehen von einer abzählbaren Reihe discreter Stellen noch aus einer oder mehreren (auch unendlich vielen) Strecken der reellen Achse. Laurent-Formen mit reellen Coefficienten $a_n = a_{-n}$ liefern besonders einfache Beispiele hierfür.

5.

Eine Reihe von Sätzen der Elementarteilertheorie gewinnen, auf Laurent-Formen übertragen, eine unmittelbar anschauliche Evidenz. Z. B. die folgenden bekannten Sätze:

Sind A, B zwei vertauschbare Formen ($AB = BA$), $a_1, \ldots, a_n$ bezw. $b_1, \ldots, b_n$ die Nullstellen ihrer charakteristischen Funktionen, so sind bei passender Zuordnung $a_1 b_1, \ldots, a_n b_n$ die Nullstellen der charakteristischen Funktion von AB.

Die Nullstellen der charakteristischen Funktion einer reellen, quadratischen Form sind sämtlich reell. —

Ferner ergibt der Cauchysche Integralsatz, angewandt auf $f(z)$, für die zugehörige Laurent-Form $[f(z)]$ das genaue Analogon der Hilbertschen Integraldarstellung der reellen quadratischen Formen von unendlichvielen Variabeln mit Streckenspektrum. —

1) Diejenigen beschränkten Laurent-Formen, denen keine analytische Funktion $f(z)$ entspricht, haben nicht-analytische stetige Linienzüge zu Spektren.

Auf einige andere Punkte in der Theorie der Laurent-Formen behalte ich mir vor demnächst zurückzukommen, insbesondere auf den Satz, daß für ähnliche Laurent-Formen nicht nur die Spektren übereinstimmen, sondern auch die Häufigkeit, mit der die zugehörige analytische Funktion die einzelnen Spektrumswerte auf dem Einheitskreise annimmt, und daß damit auch die hinreichenden Bedingungen für die Ähnlichkeit zweier Laurent-Formen gewonnen sind.

Ueber orthogonale Funktionensysteme.

Von

Friedrich Riesz in Löcse (Ungarn).

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 9. März 1907.

Für die Lösung von linearen Integralgleichungen hatte Herr Hilbert eine allgemeine Methode angegeben[1]; sie besteht darin, daß die Lösung der linearen Integralgleichung auf die Lösung eines Systems von linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zurückgeführt wird. Der Übergang geschieht mit Hilfe eines orthogonalen Funktionensystems; die Koeffizienten wie auch die Unbekannten des linearen Gleichungssystems sind gewisse bestimmte Integrale, die aus den gegebenen und der gesuchten Funktion der Integralgleichung mit Hilfe jener orthogonalen Funktionen auf eine wohlbekannte Art, analog den Fourierschen Koeffizienten, gebildet werden.

Für die Methode des Herrn Hilbert ist folgende Frage von großer Wichtigkeit:

Man ordne jeder Funktion eines orthogonalen Funktionensystems eine bestimmte reelle Zahl zu. Unter welchen Bedingungen gibt es dann eine Funktion von der Beschaffenheit, daß für jede Funktion des orthogonalen Systems das Integral des Produktes dieser Funktion und der in Frage stehenden Funktion, erstreckt über den Definitionsbereich des orthogonalen Systems, die zugeordnete Zahl ergebe?

Der Satz, den ich in dieser Note mitteile, beantwortet die

1) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. und 5. Note (diese Nachr. 1906, pp. 157 u. 439).

Frage für eine ausgedehnte Klasse von Funktionen. Es sind dies die Funktionen, die samt ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Beschränktheit [1]) der Funktionen wird nicht vorausgesetzt. Wie bekannt, ist dann auch das Produkt zweier solcher Funktionen, wenn sie nur für denselben meßbaren Bereich definiert sind, im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

In den Folgenden werde ich diese Funktionen schlechthin „integrierbare Funktionen von integrierbarem Quadrate" nennen.

Ich bemerke zunächst, daß ein orthogonales System solcher Funktionen, wenn es nur keine Funktion vom Integral 0 enthält, sicher endlich oder abzählbar ist. Der Beweis dieses, für stetige Funktionen zuerst von Herrn Schmidt ausgesprochenen Satzes, den ich unter Voraussetzung der Beschränktheit der betrachteten Funktionen angedeutet habe [2]), kann ohne weiteres von dieser Einschränkung befreit werden.

Ich spreche das Resultat meiner Untersuchungen zunächst in bescheidenem Umfange aus, indem ich annehme, daß die Funtionen, um die es sich handelt, Funktionen einer Veränderlichen und für ein Intervall definiert sind. Die möglichen Verallgemeinerungen, wie auch den hierfür zu befolgenden Weg werde ich nachher andeuten.

Hauptsatz: *Es sei* $\{\varphi_i(x)\}$ *ein normiertes Orthogonalsystem integrierbarer Funktionen von integrierbarem Quadrate, die für ein Intervall* ab *definiert sind; d. h. ein System, für welches*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0 \quad (i \neq j) \text{ und } \int_a^b (\varphi_i(x))^2\,dx = c^2$$

und zwar für jede Funktion des Systems. Ordnen wir jeder Funktion des Systems eine Zahl a_i *zu. Dann ist die Konvergenz von* $\sum_i a_i^2$ *eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, damit es eine integrierbare Funktion* $f(x)$ *von integrierbarem Quadrate gebe, so daß*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = a_i$$

sei für jede Funktion $\varphi_i(x)$ *und jede Zahl* a_i.

---

1) Unter einer beschränkten Funktion verstehe ich eine Funktion, deren sämtliche Werte zwischen endlichen oberen und unteren Grenzen liegen.

2) Sur les ensembles de fonctions, Comptes Rendus, 12 novembre 1906. Der Beweis des Herrn E. Schmidt (Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues, C. R. 10 décembre 1906), der zunächst nur für stetige Funktionen geführt wird, ist ebenfalls verallgemeinerungsfähig.

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt unmittelbar aus der bekannten Besselschen Ungleichung, die zunächst nur für stetige Funktionen aufgestellt wurde, die jedoch für die ganze betrachtete Funktionenklasse zutrifft. Was nun die Behauptung angeht, daß die Bedingung auch hinreichend sei, beschränke ich mich hier statt des Beweises auf einige Andeutungen.[1])

1. Zunächst beweise ich den Satz im klassischen Falle trigonometrischer Orthogonalfunktionen. Es seien dann die Zahlen $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ gegeben deren Quadratsumme konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

für jeden Wert von x gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F(x)$, die zugleich von beschränkter Schwankung ist. *Es gilt nämlich ganz allgemein, für jedes normierte Orthogonalsystem der Satz, daß, wenn nur* $\sum_i a_i^2$ *konvergiert, die Reihe*

$$\sum_i a_i \int_a^x \varphi_i(x)\, dx$$

gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung konvergiert. Der Beweis dieses Satzes wird geführt, indem man einerseits das Restglied, andererseits aber die totale Schwankung der endlichen Teilsummen abschätzt und zeigt, daß das Restglied gleichmäßig gegen 0 konvergiert. während die totale Schwankung der Teilsummen eine leicht angebbare endliche obere Grenze nicht überschreitet.

Ich wende nun auf die Funktion $F(x)$ einen Satz des Herrn Lebesgue an, nach welchem jede Funktion von beschränkter Schwankung an jeder Stelle höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt 0 einen bestimmten endlichen Differentialquotienten hat.[2]) Ich definiere dann eine Funktion $f(x)$, indem ich für jede Stelle x, wo $F'(x)$ existiert,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + F'(x)$$

setze, für die übrigen Stellen aber die Werte von $f(x)$ beliebig, z. B. gleich 0 vorschreibe. Ich behaupte, daß die Funktion $f(x)$ integrierbar und von integrierbarem Quadrate ist,

1) Eine ausführliche Darstellung erscheint in den Math. Annalen.

2) Lebegue, Leçons sur l'intégration, p. 128.

und daß dieselbe die vorgegebenen Zahlen a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... zu Fourierkoeffizienten hat.

Um diese Behauptung zu begründen, gebe ich eine Reihe stetiger Funktionen an, die für jede Stelle x höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt 0 gegen $f(x)$ konvergieren. Ich verwende zu diesem Zwecke die der Funktion $F(x)$ zugeordnete harmonische Funktion $F(r, x)$, die für $r < 1$ an jeder Stelle x stetig differenzierbar ist und die Funktion

$$\frac{\delta F(r, x)}{\delta x} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) r^k$$

zum Differentialquotienten hat. Laut eines Satzes des Herrn Fatou[1]) konvergiert dann die Funktion

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \frac{\delta F(r, x)}{\delta x}$$

für $\lim r = 1$ gegen die Funktion $f(x)$ und zwar an jeder Stelle x höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt 0. Indem ich r eine Reihe von Werten r_1, r_2, ... erteile, die gegen 1 konvergieren, erhalte ich eine Reihe von Funktionen, die im allgemeinen gegen $f(x)$ konvergiert. Die Fourierkoeffizienten dieser Funktionen konvergieren gegen die vorgegebenen Zahlen a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...; außerdem überzeugt man sich leicht, daß die Quadratintegrale jener Funktionen unter einer endlichen oberen Grenze liegen.

Der Beweis wird nun zu Ende geführt, indem ich auf die soeben eingeführte Funktionenreihe folgenden Satz anwende, der auch für sich von Interesse ist:

Wenn eine Reihe von Funktionen $f_\iota(x)$, die für eine meßbare Menge M definiert, integrierbar und von integrierbarem Quadrate ist, für jede Stelle höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt 0 gegen eine Funktion $f(x)$ konvergieren, und wenn dabei die Werte $\int_M (f_\iota(x))^2\, dx$ sämtlich unterhalb einer endlichen oberen Grenze liegen, so ist auch $f(x)$ integrierbar und von integrierbarem Quadrate und es ist

$$\int_M f(x)\, dx = \lim_{\iota=\infty} \int_M f_\iota(x)\, dx.$$

1) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. t. 30, p. 347.

Uebrigens hoffe ich, die Verwendung harmonischer Funktionen, die mir nicht für wesentlich erscheint, durch ein einfaches Approximationsverfahren ersetzen zu können.

2. Der Uebergang von den trigonometrischen Orthogonalfunktionen zu beliebigen Orthogonalsystemen geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes: [1])

Es sei das System linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten

$$\sum_k a_{ik} x_k = y_i \tag{1}$$

vorgelegt, für deren Koeffizienten die Gleichungen

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = 0 \ (i \neq j); \ \sum_k a_{ik}^2 = 1$$

gelten; dann besitzt das System 1) für jedes System der Zahlen y^i, für welches $\sum_i y_i^2$ konvergiert, wenigstens eine Lösung $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme; eine solche Lösung wird durch die Formeln

$$x_k = \sum_i a_{ik} y_i \tag{2}$$

dargestellt.

Hat das mit den Koeffizienten a_{ik} gebildete homogene System

$$\sum_k a_{ik} z_k = 0$$

keine Lösung mit konvergenter, von 0 verschiedener Quadratsumme, so liefern die Formeln 2) die einzige Lösung des Systems 1) mit konvergenter Quadratsumme.

Im letzteren Falle hat man auch

$$\sum_k x_k^2 = \sum_i y_i^2.$$

Um nun mit Hilfe dieses Satzes zum allgemeinen Falle emporsteigen zu können, bemerke ich zunächst, daß es keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn man über die Funktionen, die man heranzieht, auch weiterhin voraussetzt, sie seien im Intervalle $0 2\pi$ definiert.

Man betrachte nun die Funktionen $\varphi_i(x)$ und die denselben zugeordneten Zahlen a_i. Um nun eine Funktion $f(x)$ zu finden, für welche in bezug auf jede Zahl i die Funktionalgleichungen

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, \varphi_i(x)\, dx = a_i \tag{3}$$

erfüllt sind, wendet man den wohlbekannten Satz über die Dar-

1) Dieser Satz, dessen direkter Beweis leicht zu führen ist, folgt auch aus einem Resultate des Herrn Hilbert (l. c. p. 195), wie auch aus gewissen, bisher nicht veröffentlichten Untersuchungen des Herrn E. Schmidt, die sich auf allgemeinere lineare Gleichungssysteme beziehen.

stellung des Produktionsintegrals zweier Funktionen durch ihre Fourierkoeffizienten an, einen Satz, der zunächst unter einschränkenden Bedingungen aufgestellt, neuerdings von Herrn Fatou in voller Allgemeinheit bewiesen wurde.[1]) Auf diese Weise gelangt man zu einem linearen Gleichungssysteme vom Typus des Systems 1); jede Lösung dieses Systems, für welche die Quadratsumme konvergiert, liefert die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(x)$, die integrierbar und von integrierbarem Quadrate ist, und für welche die Gleichungen 3) erfüllt sind.

Ist das Orthogonalsystem der Funktionen $\varphi_i(x)$ vollständig, d. h. gibt es außer den Funktionen vom Integral 0 keine zu sämtlichen Funktionen des Systems orthogonale Funktion, dann besitzt das entsprechende lineare Gleichungssystem nur eine Lösung mit konvergenter Quadratsumme; in diesem Falle ist somit die Funktion $f(x)$ durch die Zahlen a_i *bis auf eine additive willkürliche Funktion vom Integrale 0 bestimmt.*

3. Unser Satz läßt sich ohne weiteres auf orthogonale Systeme von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen ausdehnen, die für irgend eine meßbare Punktmenge definiert sind, wenn nur diese Funktionen unseren anfangs gestellten Integrabilitätsbedingungen genügen. Wenn man nämlich den vorher benützten Satz über lineare Gleichungssysteme heranzieht, so ist die Frage nach der Gültigkeit des Satzes für sämtliche Orthogonalsysteme, die auf der meßbaren Punktmenge definiert werden können, erledigt, wenn nur der Satz für eines derselben, das auch vollständig ist, sich für richtig erwiesen hat, und wenn für jenes System auch der Satz über die Reihendarstellung des Produktintegrals zweier Funktionen gilt. Für jede im Endlichen gelegene meßbare Punktmenge wird nun ein solches System z. B. aus dem Orthogonalsystem der trigonometrischen Funktionen durch ein Verfahren, das im wesentlichen aus Produktenbildung und aus einem bekannten Normierungsverfahren besteht, ohne Schwierigkeit hergeleitet.

4. Aus unseren Untersuchungen folgt unmittelbar *die Ausdehnung des Satzes über die Darstellung des Produktintegrals zweier Funktionen mittels ihrer Fourierkoeffizienten für jedes beliebige vollständige Orthogonalsystem.*[2])

---

1) l. c. p. 379.

2) Herr Hilbert zieht diesen Satz unter dem Namen „Vollständigkeits-Relation" zur Definition des vollständigen Orthogonalsystems heran. Unter den über die betrachtete Funktionenklasse gemachten Voraussetzungen deckt sich somit die hier verwendete Definition der Vollständigkeit mit der Hilbertschen. Würde man dagegen ausschließlich stetige Funktionen zur Konkurrenz zulassen, so ließe

5. Was die Anwendung des Satzes auf die Lösung von Integralgleichungen betrifft, beschränke ich mich hier auf folgende Betrachtungen. Es sei eine inhomogene Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem oder unsymmetrischem Kerne vorgelegt; die gegebenen wie auch die gesuchte Funktion sollen den anfangs gestellten Integrabilitätsbedingungen genügen. Legt man dann irgend ein vollständiges Orthogonalsystem zu Grunde, so übergeht man durch Anwendung des Satzes über das Produktintegral von der Integralgleichung zu einem linearen Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten; auf Grund der Besselschen Ungleichung und des Satzes X. der 4-ten Hilbertschen Note schließt man dann auf die Existenz einer Lösung des zugehörigen homogenen Systems; nach den Untersuchungen des Herrn Schmidt kann man sogar diese Lösungen explicite angeben. Die Lösungen sind von konvergenter Quadratsumme. Auf Grund unseres Hauptsatzes läßt sich dann zu einer solchen Lösung des einen der beiden Gleichungssysteme eine entsprechende Funktion angeben, die bis auf eine additive Funktion vom Integral 0 bestimmt ist. Die eventuelle Korrektur um diese additive Funktion führt die Integralgleichung selbst aus; damit ist dann eine bestimmte Lösung der inhomogenen resp. der zugehörigen homogenen Integralgleichung festgelegt.

Auf eventuelle Stetigkeitseigenschaften der lösenden Funktion kann man aus den Eigenschaften der in der Integralgleichung vorkommenden Funktionen direkt schließen. Wenn z. B. jene Funktionen an einer Stelle stetig sind, wie auch unter allgemeineren Bedingungen, genügt hierfür die Anwendung der Schwarzschen Ungleichung.

sich aus der Unmöglichkeit der weiteren Ergänzung eines Orthogonalsystems noch keineswegs das Bestehen des Satzes über das Produktintegral, also der Vollständigkeits-Relation folgern.

Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen, insbesondere für Kristalle.

Von

W. Voigt und **S. Kinoshita.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. März 1907.

Einleitung. Die Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen für Kristalle ist nur in wenigen Fällen überhaupt in Angriff genommen worden und die hier erhaltenen Resultate ermangeln der Sicherheit. Am zuverlässigsten erscheinen noch die Werte für Kalkspat, die sich aus den Messungen Tyndalls[1]) über das Verhältnis und denjenigen der Herrn Stenger[2]) und König[3]) über die Differenz der Hauptmagnetisierungszahlen dieses Minerales berechnen; aber die Tyndallschen Beobachtungen sind wohl mehr orientierend, als definitiv festlegend, und die sehr sorgfältigen Untersuchungen von Stenger und König weichen in ihren Endresultaten auffällig von einander ab. So kann man auch für dies eine Mineral nur ungefähre absolute Werte angeben.

Bezeichnet man die Magnetisierungszahlen (Suszeptibilitäten) für die Richtungen normal und parallel zur kristallographischen Hauptaxe mit k_1 und k_3 und bevorzugt die Königsche Zahl $k_3 - k_1 = -1{,}135 . 10^{-7}$ vor der Stengerschen, so ergibt deren Kombination mit dem Resultat Tyndalls, das $k_1 : k_3 = 91 : 100$ liefert, die Endwerte

$$k_1 = -11{,}1 . 10^{-7}, \quad k_3 = -12{,}2 . 10^{-7}.$$

Aus dem Stengerschen Resultat $k_3 - k_1 = -0{,}85 . 10^{-7}$ würde da-

1) J. Tyndall, Phil. Mag. (4) **2**, 174, 1851; Pogg. Ann. **83**, 397, 1851.
2) Fr. Stenger, Wied. Ann. **20**, 304, 1883; **35**, 331, 1888.
3) W. König, Wied. Ann. **31**, 273, 1881.

gegen folgen

$$k_1 = -8{,}6 . 10^{-7}, \quad k_2 = -9{,}4 . 10^{-7}.$$

Eine direkte Bestimmung der Größen k_1 und k_2 für Kalkspat und Wismut hat nach einer von Rowland ausgearbeiteten Methode Herr Jacques versucht[1]). Bei dieser Methode wurde das Feld zwischen den Polen eines Magneten als von rotatorischer Symmetrie dadurch nach seiner Gesetzmäßigkeit untersucht, daß die Feldstärke längs seiner Axe mit einer Induktionsspirale bestimmt und aus ihr nach den allgemeinen Gesetzen des Potentiales die Feldstärke in einem größeren Bereich um die Axe berechnet wurde. In diesem nunmehr bekannten Felde brachte man dann Stäbchen aus den zu untersuchenden Kristallen zu Schwingungen um eine vertikale Axe und bestimmte deren Schwingungsdauern bei geeigneten Orientierungen.

Die Darstellung des Feldes erforderte die Bestimmung einer sehr erheblichen Zahl von Konstanten der Kugelfunktionenreihe und die Berechnung der auf die Kristallstäbchen ausgeübten Wirkung (bei der übrigens deren Querschnitt als unendlich klein behandelt ist) kann daher keine große Genauigkeit erreicht haben; aber diese Umstände erklären in keiner Weise die enormen Abweichungen, welche die von Jacques nach der Rowlandschen Methode für Kalkspat erhaltenen Zahlen

$$k_1 = -40 . 10^{-9}, \quad k_2 = -37 . 10^{-9}$$

von den oben angegebenen unterscheiden. In der Tat hat Rowland später[2]) die erhaltenen Resultate als durch einen Fehler entstellt preisgegeben. Herr König[3]) hält für denkbar, daß der Fehler das Verhältnis beider Parameter nicht entstellt, muß aber dann, um die Zahlen benutzen zu können, noch die weitere Annahme machen, daß die Zahlwerte k_1 und k_2 vertauscht sind, um ein Resultat zu erhalten, das mit seinen und Tyndalls Zahlen einigermaßen vereinbar ist.

Dieser unbefriedigende Zustand unserer Kenntnisse über absolute Werte der Magnetisierungszahlen der Kristalle (wie auch anderer schwach para- oder diamagnetischer Körper) legte den Versuch nahe, die Lücke auszufüllen. Im nachstehenden ist über eine erste Beobachtungsreihe berichtet, die unter Benutzung einer der Tyndallschen einigermaßen verwandten Anordnung (die in-

1) H. A. Rowland, Amer. Journ. of Science (3) 18, 360, 1879; Phys. Papers 184.

2) A. v. Ettinghausen, Wied. Ann. 17, 274 (Anmerk.) 1882.

3) W. König, l. c. p. 300.

dessen die Ableitung nicht nur von relativen, sondern von absoluten Werten gestattete) von uns durchgeführt ist. Es wurden dabei außer einigen Jenenser Gläsern mehrere gerade verfügbare Kristalle verschiedener Systeme beobachtet. Die Messungen sind fast alle von Kinoshita ausgeführt. Da die von uns benutzte Methode außerordentlich wenig Material erfordert und sich dabei als recht genau erwiesen hat, so soll sie demnächst auf eine größere Reihe von Körpern angewendet werden. Ein vorläufiger Abschluß gebot sich dadurch, daß Kinoshita demnächst Göttingen verläßt.

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften hier sind wir für die Unterstützung unserer Untersuchungen zu Dank verpflichtet.

Theorie der Beobachtungsmethode. Legen wir die Koordinatenrichtungen in die Hauptmagnetisierungsaxen des Kristalles und bezeichnen die Feldkomponenten mit A, B, C, die Magnetisierungszahl der Luft mit k_0, während wir k_1, k_2, k_3 für die Hauptmagnetisierungszahlen des Kristalles beibehalten, so ergibt sich für die Energie des Kristallpräparates im Magnetfelde bekanntlich der Ausdruck

$$1)\qquad \mathrm{E} = -\tfrac{1}{2}\int((k_1-k_0)A^2+(k_2-k_0)B^2+(k_3-k_0)C^2)\,dv,$$

das Integral über das Volumen v des Präparates erstreckt. Wird der Mittelwert von $A^2, \ldots$ innerhalb des Kristalles durch $\overline{A^2}, \ldots$ bezeichnet, so haben wir auch

$$2)\qquad \mathrm{E} = -\frac{v}{2}\left[(k_1-k_0)\overline{A^2}+(k_2-k_0)\overline{B^2}+(k_3-k_0)\overline{C^2}\right].$$

Die Kraft S, die das Präparat sich selbst parallel in irgend einer Richtung s zu verschieben sucht ist durch

$$3)\qquad S = -\frac{d\mathrm{E}}{ds}$$

gegeben; ihr entgegengesetzt gleich ist die Kraft, welche erforderlich ist, um das Präparat an seiner Stelle zu halten.

Diese Kräfte bestimmen sich durch die lokalen Änderungen von $\overline{A^2}$, $\overline{B^2}$, $\overline{C^2}$, und es wird offenbar auf die Genauigkeit der Resultate günstig einwirken, wenn man die Methode der Feldbestimmung so einrichtet, daß sie direkt $\overline{A^2}, \ldots$ für diejenigen Räume liefert, die nachher von dem im Gleichgewicht gehaltenen Kristallpräparat eingenommen werden.

Hierzu ist die von Rowland angewendete Induktionsspirale nicht geeignet, auch wenn man ihre Form vollständig mit derjenigen der Präparate in Übereinstimmung setzen wollte, denn sie ergibt $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ d. h. die Mittelwerte der Feldkomponenten selbst, aus denen die gewünschten $\overline{A^2}, \overline{B^2}, \overline{C^2}$ als Funktionen des Ortes nur umständlich und ungenau folgen. Dagegen leistet die Widerstandsänderung einer Wismutspirale vollständig das Gewünschte; denn diese Änderung ist nach den Symmetrieverhältnissen notwendig eine Funktion des Quadrates der Feldstärke, wenn auch die bekannten Aichungskurven der im Handel erhältlichen Wismutspiralen auf dem größten Teil ihres Verlaufes von Geraden nur wenig abweichen.

Diese Überlegungen leiten zu der folgenden Anordnung der Messungen, die sich auf das Beste bewährt hat. Die Äquatorialebene $\overline{aa}$ des Feldes eines Elektromagneten wird von den Kraftlinien normal geschnitten. Das Gesetz, dem der Mittelwert des Quadrates der Feldstärke $\overline{R^2}$ für eine kleine Kreisfläche der Äquatorialebene längs eines Radiusvektors s der Äquatorialebene des Magnetfeldes folgt, läßt sich mit einer Wismutspirale bestimmen. Ist dies geschehen, so wird in irgend eine Position der Spirale eine kreisförmige Kristallplatte von mit der Spirale nahe übereinstimmender Größe gebracht; dieselbe erleidet im Felde eine translatorische Kraft parallel $\pm s$, und Gegenstand der Messung ist die Kraft, die erforderlich ist, um die Kristallplatte bei Erregung des Feldes in ihrer Position zu erhalten. In den drei Hauptfällen, daß die Platte normal zur ersten, zweiten, dritten Hauptmagnetisierungsaxe des Kristalles geschliffen ist, ergeben sich für die nötigen Kräfte die Werte

$$4)\qquad S_h = \frac{v}{2}(k_h - k_0)\frac{d\overline{R^2}}{ds}, \qquad h = 1, 2, 3.$$

Die eigentümliche Anordnung, die auf den Kristall ausgeübte Kraft normal zu den Kraftlinien des Feldes in Aktion treten zu lassen, ist zum Teil durch die Eigenschaft der Wismutspirale bedingt, in der Position normal zu den Kraftlinien die kleinste magnetische Selbstinfluenz zu besitzen und demgemäß die sichersten Beobachtungen zu gestatten. Daß dabei die magnetischen Qualitäten in der Richtung der geäußerten Kraft, d. h. parallel zu s, garnicht ins Spiel treten, wurde durch eine besondere Beobachtung gezeigt. Eine Platte Kalkspat, parallel der Hauptaxe geschliffen, wurde einmal mit der Hauptaxe, sodann mit dem dazu normalen

Durchmesser in die Richtung von s gebracht; sie erfuhr in diesen beiden Positionen seitens des Feldes genau die gleiche Kraft.

Die Messungen zerfallen nach dem Gesagten in zwei Teile: die Auswertung von $\bar{R}^2$ längs eines Radius s der Äquatorebene des Feldes und die Messung der von dem Felde auf die Kristallplatte ausgeübten Kraft.

Die Bestimmung des Gesetzes von $\bar{R}^2$. Die benutzte Wismutspirale war von Hartmann und Braun in Frankfurt a. M. geliefert und hatte einen Durchmesser von 5 mm. Die ihr beigegebene Graduierungskurve gestattet bei kleinen Feldstärken überhaupt keine sehr genauen Ablesungen, und da zudem der Gesamtwiderstand der Spirale (vielleicht infolge einer zeitlichen Änderung des Materiales) merklich von dem von der Fabrik angegebenen Werte abwich, so war es nötig, die Spirale für kleine Feldstärken zu aichen.

Diese Aichung geschah durch Ausmessung verschiedener Magnet-Felder mittelst der Spiralen und Auswertung derselben Felder durch die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einer hineingebrachten Quarzplatte. Das Quarzpräparat war in bekannter Weise aus einer rechts und einer links drehenden Platte, normal zur Hauptaxe geschliffen, zusammengesetzt und maß rund 11,5 mm Dicke. Die beiden Platten waren durch eine nur etwa 0.01 mm dicke Schicht von Kanadabalsam verbunden, deren Wirkung auf die magnetische Drehung nicht besonders in Rechnung gesetzt zu werden brauchte. Der Einfluß der Reflexion an den beiden Endflächen auf die Drehung wurde in Rechnung gezogen.

Nach Ausführung der optischen Messungen wurde das Quarzpräparat beseitigt und die Widerstandsänderung der Wismutspirale an dem Orte der Mittelfläche und der beiden Endflächen des Quarzes bestimmt. Diese Beobachtungen wurden durch eine parabolische Kurve verbunden, woraus sich dann die mittlere Widerstandsänderung innerhalb des benutzten Feldteiles bestimmen ließ. Die Kombination dieses Resultates mit der Größe der mittleren Feldstärke, welche die optischen Beobachtungen lieferten, ergab die gesuchte Graduierung.

Allerdings dient hier ein in der Feldstärke lineäres Phänomen (die magnetische Drehung) zur Graduierung der Wismutspirale, und das würde die auf S. 126 hervorgehobenen Vorzüge der Beobachtungsmethode einigermaßen aufheben, wenn es sich bei der Graduierung wirklich um erhebliche Änderungen der Stärke des Feldes innerhalb der Spirale und zwischen ihren ver-

schiedenen Positionen handelte. Dies ist aber nicht der Fall. Da die Feldstärke in der Axe des Feldes ein Maximum oder Minimum hat, so sind ihre Variationen innerhalb des Bereiches der (senkrecht zur Axe gestellten) Spirale als von zweiter Ordnung zu betrachten, und auch längs der Axe variierte bei den für die Graduierung benutzten Umständen die Feldstärke nur um einige Prozente. Demgemäß darf innerhalb der (bei den Beobachtungen im Maximum zu erhoffenden) Genauigkeit von etwa 0,5 % die Methode der Graduierung als unbedenklich betrachtet werden.

Das Resultat der Graduierung war, daß der Zusammenhang zwischen dem Widerstand W_0 außerhalb, W_1 innerhalb des Feldes (in Ohm) und der Feldstärke R (in Gauß) innerhalb des Bereiches von 1500 bis 3500 Gauß bis auf etwa $^1/_2$ % durch die Formel

$$5)\qquad 1000\,(W_1 - W_0) = a + b\,\overline{R}^2$$

dargestellt werden kann, wobei

$$a = 69{,}0, \quad b = 0{,}0000464.$$

$W_1 - W_0$ liegt bei den angegebenen Grenzen von R zwischen 0,2 und 0,6.

Mit der so graduierten Wismutspirale wurde nun gemäß dem S. 126 Gesagten das Feld des benutzten Elektromagneten längs eines Radius s der Äquatorebene abgesucht. Der Magnet, älteres Modell von Keiser und Schmidt war uns für die Beobachtungen seitens des Herrn Dr. Hauswaldt-Magdeburg, der auch in anderer Hinsicht die Arbeiten des Institutes freigebig unterstützt, zur Verfügung gestellt worden. Die Form des Magneten ist die Plückersche mit hohen vertikalen Schenkeln auf kurzer Grundplatte; die Polschuhe tragen verschiebbare zylindrische Einsätze von zirka 3 cm Durchmesser die bei den Beobachtungen einander bis auf etwa 2 cm genähert waren. Das Feld hatte unter diesen Umständen natürlich nicht streng die Symmetrie eines Rotationskörpers um die Axe der Polschuhe; aber die Abweichung kommt bei der benutzten Beobachtungsmethode in keiner Weise störend zur Geltung. Da nur die in horizontaler radialer Richtung auf die Kristallpräparate ausgeübte Kraft gemessen werden sollte, war auch nichts anderes, als nur der Verlauf von $\overline{R}^2$ in dieser Richtung zu bestimmen.

Hierzu war auf dem Tisch, über den die Polschuhe des Magneten emporragten, in der Höhe der Axe der Polschuhe und etwa 2 mm von dem zu untersuchenden Radius $\overline{a}$ entfernt, eine auf

einem dünnen Milchglasstreifen aufgezeichnete Skala pq (von einem Thermometer herrührend) angebracht, die Striche vertikal gestellt; die Ablesungen an der Skala wurden durch ein Prisma P und durch ein in der Richtung $\overline{tt}$ parallel mit sich verschiebbares Fernröhrchen F ermöglicht, deren von oben gesehene Anordnung aus der Fig. 1 zu erkennen ist.

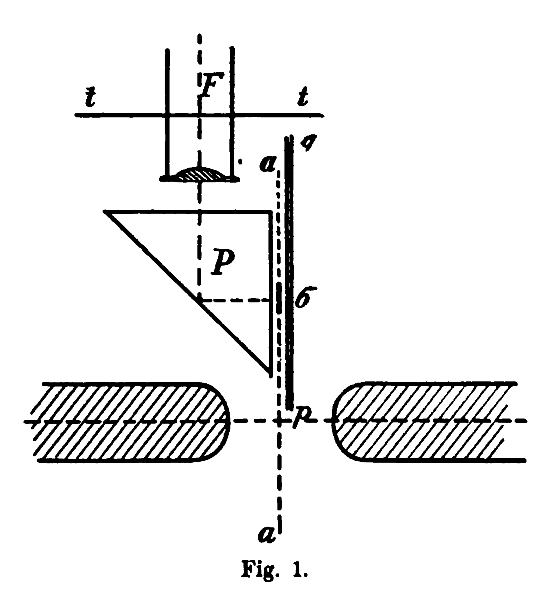


Fig. 1.

Über diesem System war ein Paar horizontaler Schienen angebracht, längs deren sich der Halter der Wismutspirale derart verschieben ließ, daß die Spirale σ längs des Radius $\overline{aa}$ hinwanderte. Ihre Stellung wurde dann mit Hülfe des Fernrohres bestimmt und die Änderung ihres Widerstandes bei dem stets in derselben Weise auf 14,3—14,4 Amp. gehaltenen Strom gemessen. Nachdem dies für eine Reihe (von beiläufig 10) Punkten geschehen war, wurde die Spirale um 180° um die Vertikale gedreht und die Messung wiederholt. Das Mittel aus beiden Bestimmungsreihen, die übrigens nur wenig differierten, ist frei von der natürlichen Asymmetrie der Spirale. Aus dem Mittelwert folgt $\overline{R^2}$ nach Formel (5), und seine Abhängigkeit vom Radiusvektor wurde nun innerhalb eines Bereiches von zirka 5 mm durch eine Interpolationsformel

$$6) \qquad \overline{R^2} = a + b\,(s - s_0) + c\,(s - s_0)^2 + d\,(s - s_0)^3 + e\,(s - s_0)^4$$

dargestellt, wobei $s - s_0$ den radial gemessenen Abstand von einem Punkt in der ungefähren Mitte des Beobachtungsbereiches bezeichnet, und

$$
6) \qquad \begin{aligned}
a &= 7{,}53_4 \,.\, 10^6, \\
b &= -6{,}18_5 \,.\, 10^6, \\
c &= +1{,}59_4 \,.\, 10^6, \\
d &= +1{,}44_1 \,.\, 10^6, \\
e &= -4{,}36_9 \,.\, 10^6.
\end{aligned}
$$

Die ausgezogene Kurve in Fig. 2 gibt eine Vorstellung von dem Verlauf von $\overline{R^2}$, wenn man die nicht eingeklammerten Ordinatenzahlen benutzt. Die Abszissen sind Zentimeter mit (willkürlichem) Anfangspunkt $s = s_0$ in der Mitte.

Bei allen diesen Messungen mit der Wismutspirale war es nötig, die Änderungen der Temperatur in Rechnung zu setzen, die den Widerstand bekanntlich stark beeinflußt; das Gesetz dieser Wirkung war durch eine eigne Beobachtungsreihe, bei der die Zimmertemperatur absichtlich stark geändert, der Strom im Elektromagneten aber konstant gehalten wurde, zuvor aufgeklärt.

Aus der gewonnenen Formel (6) ließ sich schließlich der für die Wirkung auf den Kristall maßgebende Ausdruck $\partial \overline{R^2} / \partial s$ berechnen. Die punktierte Kurve in Fig. 2 gibt eine Anschauung

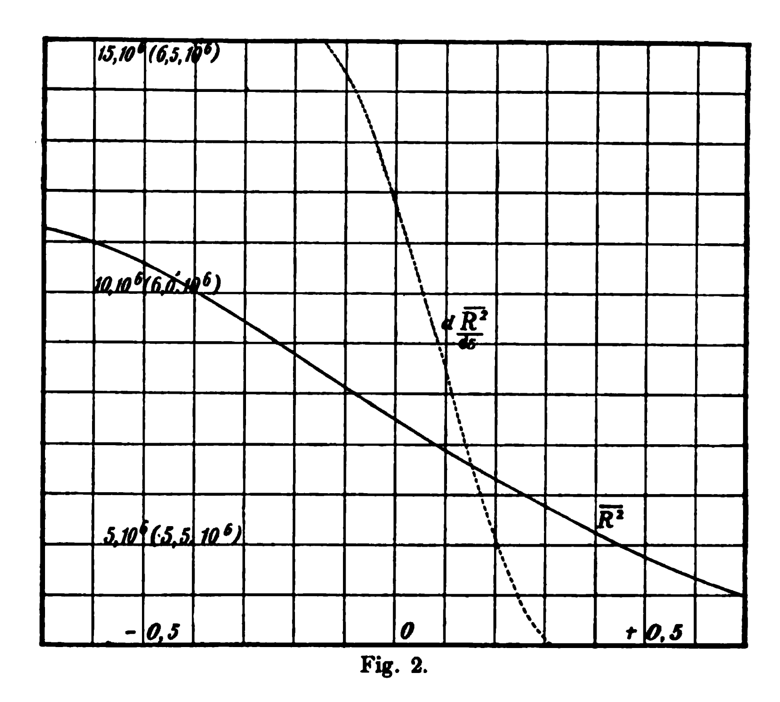


Fig. 2.

von dem Verhalten dieser Größe, wobei die eingeklammerten Ordinatenzahlen maßgebend sind.

Die Messung der auf die Präparate seitens des Magnetfeldes ausgeübten Kraft. Die untersuchten Kristall- und Glasplatten besaßen 5,2—5,5 mm Durchmesser bei 1—1,5 mm Dicke. Sie sind von der Firma Voigt und Hochgesang hier angefertigt worden und es war der Arbeiter angewiesen, die Präparate mit Eisen nicht in Berührung zu bringen, sie auch nicht etwa (mit Pariser Rot!) zu polieren, sondern nur auf einem Quarzit- oder Smirgelschleifstein abzuschleifen.

Trotzdem wurde jedes gelieferte Präparat einer gründlichen Reinigung unterzogen; die in Wasser lösbaren wurden gewaschen, um die ganze Oberflächenschicht zu beseitigen; die andern wurden mit verdünnter Salzsäure und dann mit destillirtem Wasser gekocht und abgespült. Die zwischen Filtrierpapier getrockneten Präparate wurden dann weiterhin nur mit einer Pinzette mit Elfenbeinspitzen berührt.

Um die Kraft zu messen, die die Präparate in dem Magnetfelde erfahren, wurden sie an einer kleinen Drehwage aufgehängt, deren oberer Befestigungspunkt in einem Torsionskopf lag; es waren Minuten ablesbar. Den an einem Quarzfaden aufgehängten Balken der Drehwage bildete ein Glasfaden von der in Fig. 3 angegebenen Gestalt; die Kristallplatte π war mit einer Spur von Wachskitt an eine Schleife aus dünnstem Kokonfaden befestigt und konnte so leicht in die Häkchen des Balkens einhängt werden. v ist ein kleines gläsernes Gegengewicht, gleichfalls an einem Seidenfaden aufgehängt und auf dem Balken verschiebbar. Die Beobachtungen wurden in zwei um 180° um die Vertikale gegen einander verdrehten Positionen der Platten π gemacht. Kontrollbeobachtungen gaben die Gewähr, daß der Wachskitt keine Störungen ausübte, die 1—2′ überstiegen, und daß keine direkte Einwirkung des Magneten auf den Balken der Drehwage stattfand.

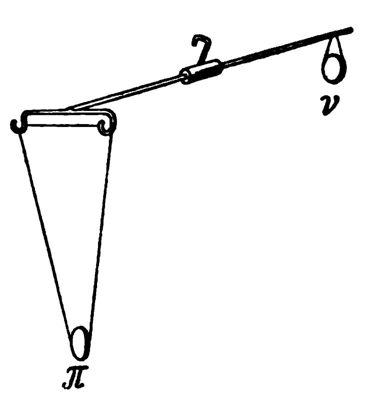


Fig. 3.

Das spezifische Drehungsmoment D des Quarzfadens wurde nach dem Gaußschen Verfahren der Schwingungsdauern bestimmt, wobei zwei leichte Aluminiumgewichte m sukzessive in zwei verschiedenen Abständen l_1 und l_2 von der Drehaxe auf den Balken der Drehaxe gehängt waren. Die Gewichte betrugen 0,3828 gr, die Abstände 2,64 und 5,31 cm, die dabei beobachteten Perioden

τ_1 und τ_2 waren 33,89 und 49,43 sec.; hieraus findet sich gemäß der Formel

$$D = 8\pi^2 m \frac{l_1^2 - l_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}$$

für D der Wert

$$D = 0{,}495_6 \text{ cm. gr. sec.}$$

Der Hebelarm h, an dem die Feldwirkung die Kristallplatte angriff, war wegen der etwas gerundeten Form der Aufhängungshäkchen (Fig. 3) nicht völlig konstant und wurde bei jeder Messung direkt bestimmt. Er betrug rund 6,1 cm.

Die Beobachtungen fanden in dem Glaskasten statt, der bei den Plückerschen Magneten die Polschuhe einschließt. Die erhebliche Größe dieses Raumes gab zu Luftströmungen Veranlassung, die anfänglich die Beobachtungen sehr störten, sich aber durch eine teilweise Ausfüllung des Raumes durch geeignete Papierschirme ziemlich unschädlich machen ließen.

Immerhin dürften die stattfindenden Abweichungen zwischen den Beobachtungen derselben Reihe in der Hauptsache noch auf der Wirkung dieser Störungen beruhen.

Der Glaskasten war oben durch eine nur aufgelegte Spiegelglasscheibe verschlossen, in der das Glasrohr befestigt war, welches den Torsionskopf trug; die ganze Drehwage war in dieser Weise horizontal verschiebbar und es gelang so ohne Schwierigkeit, in jedem einzelnen Falle die untersuchte Kristallplatte in die Äquatorialebene des Feldes und an eine bestimmte Stelle des Radiusvektor zu bringen. Wegen des Maximum- resp. Minimumcharakters dieser Ebene und der benutzten Orientierungen der Kristallplatten haben übrigens kleine Fehler in der Lage der Platten, soweit nur der Radiusvektor s genau den richtigen Wert hat, sehr geringen Einfluß; die Größe von s ließ sich aber auf die S. 129 beschriebene Weise zuverlässig bestimmen, zumal durch Umkehren der Aufhängung nach S. 131 auch eine etwaige Umsymmetrie der Form oder Massenverteilung eliminiert wurde.

Da die Wirkung des Feldes auf den Kristall vom **Quadrat** der Feldstärke abhängt, so war das nach einfacher Unterbrechung des magnetisierenden Stromes zurückbleibende schwache Feld von kaum merklicher Wirkung. Immerhin wurde auch diese noch reduziert, indem die Entmagnetisierung durch wiederholtes Umkehren des Stromes bei allmählich abgeschwächter Intensität bewirkt wurde.

Die Ordnung der Beobachtungen war schließlich diese. Bei nicht erregtem Magneten wurde die Kristall- oder Glasplatte an

eine bestimmte (von Fall zu Fall wesentlich konstante) Stelle der Äquatorebene des Feldes gebracht und die dieser Lage entsprechende Stellung des Torsionskopfes notiert; darauf wurde das Feld erregt und die Platte durch Drehung des Torsionskopfes an die alte Stelle zurückgeführt. Bei stark paramagnetischen Objekten gelang dies nur dadurch, daß das Feld allmählich von Null auf die gewünschte Höhe gebracht und die Platte dabei andauernd in der Nähe der Ruhelage gehalten wurde. Es beruhte dies offenbar darauf, daß das Gleichgewicht dieser Körper an der betreffenden Stelle nur sehr geringe Stabilität hatte und die Platten bei merklichen Elongationen sich nach einer andern Gleichgewichtslage zu bewegen suchten. War die Gleichgewichtslage ganz oder nahezu erreicht, so wurde durch wiederholtes Kommutieren des Magnetstromes festgestellt, daß eine Remanenzwirkung von merklicher Stärke im Kristall nicht auftrat.

Nach Ablesung des Torsionskopfes fand allmählige Entmagnetisierung statt und daran anschließend erneute Einstellung des Präparates in der alten Position mit Ablesung am Torsionskopf. Diese Folge von Beobachtungen wurde bei jeder Substanz zwei oder drei Mal wiederholt, darauf die Platte um 180^0 um die Vertikale gedreht und wie zuvor verfahren.

Im Folgenden ist bei jeder Substanz angegeben: die Masse m des Präparates, seine Dichte[1] δ, sein Radius r, ferner die Abweichung $s - s_0$ des Mittelpunktes von der Stellung, auf die als Anfangspunkt sich die Interpolationsformel (6) bezog. Dann folgen unter α und β die Drehungen am Torsionskopf bei Erregung und Aufhebung des Feldes je mit dem entsprechenden Hebelarm h der Drehwage.

Für die Verwertung dieser Messungen ist Formel (4) heranzuziehen in der S_h durch $D\varphi_h$ zu ersetzen ist. Ferner kürzen wir die Magnetisierungszahlen $k_h - k_0$ relativ zur umgebenden Luft in $\varkappa_h$ ab und haben dann

$$D\varphi_h = \tfrac{1}{2} v \varkappa_h \frac{d\overline{R^2}}{ds}, \quad \text{wobei } v\delta = m.$$

$\varkappa_h/\delta = \varkappa_h'$ stellt die auf die Masseneinheit, wie $\varkappa_h$ die auf die Volumeneinheit bezogene Magnetisierungszahl dar; positive Werte bezeichnen Para-, negative Diamagnetismus.

1) Diese Dichten sind nicht extra beobachtet, sondern Tabellen (zumeist den Landolt-Börnsteinschen) entnommen. Für die Anwendungen dürfte eine etwaige Ungenauigkeit von δ eine wesentliche Schwierigkeit nicht bieten.

Einige Jenenser Gläser und Opal.

Schweres Bariumsilikatkron O211.

(Enthält neben rund 50% SiO_2 viel BaO, weniger ZnO und K_2O).

$m = 0{,}0456_5$, $\delta = 3{,}21$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$

	α)		β)
	37° 24′		37° 12′
	37 22		37 17
$h = 6{,}12$	37 25	$h = 6{,}13$	37 31
	37 19		37 36
	$\varphi_\alpha = 37°\ 22'$		$\varphi_\beta = 37°\ 24'$

$\varkappa' = -3{,}74_1 . 10^{-7}$, $\varkappa = -12{,}0 . 10^{-7}$.

Kron mit hoher Dispersion O381.

(Enthält neben rund 66% SiO_2 viel Na_2O und BaO).

$m = 0{,}0411_5$, $\delta = 2{,}70$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$

	α)		β)
	35° 3′		35° 32′
	35 6		34 45
$h = 6{,}12$	35 2	$h = 6{,}12$	34 49
	35 4		35 16
	$\varphi_\alpha = 35°\ 4'$		$\varphi_\beta = 35°\ 5'$

$\varkappa' = -3{,}86_4 . 10^{-7}$, $\varkappa = -10{,}4 . 10^{-7}$.

Baryt-Leichtflint O543.

(Enthält bei rund 50% SiO_2 unter sich nahe gleiche Mengen von K_2O, ZnO, PbO aber mehr BaO).

$m = 0{,}0367_5$, $\delta = 3{,}11$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$

	α)		β)
	32° 46′		32° 35′
	32 29		32 17
$h = 6{,}13$	32 27	$h = 6{,}13$	32 27
	32 15		32 24
	$\varphi_\alpha = 32°\ 29'$		$\varphi_\beta = 32°\ 26'$

$\varkappa' = -4{,}02_8 . 10^{-7}$, $\varkappa = -12{,}5 . 10^{-7}$.

Schwerstes Barytkron O2071.

(Der Gehalt an BaO überwiegt erheblich den an SiO_2, der rund 33% beträgt).

$m = 0{,}0497_5$, $\delta = 3{,}54$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$

	α)		β)
	39° 46′		40° 2′
	39 39		39 5
$h = 6{,}15$	39 46	$h = 6{,}15$	40 9
	39 44		39 39
	$\varphi_\alpha = 39°\ 44'$		40 8
			39 20
			$\varphi_\beta = 39°\ 44'$

$\varkappa' = -3{,}65_1 . 10^{-7}$, $\varkappa = -12{,}9 . 10^{-7}$.

Schweres Flintglas. O 198.

(Enthält nahe drei Mal so viel PbO als SiO_2.)

$m = 0.0600,\quad \delta = 4.99,\quad \tau = 0.274,\quad s - s_0 = -0.005$

	α)			β	
	30°	29′		30°	37′
	30	32		30	27
$h = 6.12$	30	34	$h = 6.12$	30	28
	30	31		30	31
$\varphi_r =$	30°	32′	$\varphi_l =$	30°	30′

$\kappa' = -2.32 \cdot 10^{-7}\quad \kappa = -11.6 \cdot 10^{-7}$

Borsilikat-Kron O 144.

Enthält neben rund 70% SiO_2 viel K_2O, weniger B_2O_3 und Na_2O.

$m = 0.0684\quad \delta = 2.47,\quad \tau = [illegible]\quad s - s_0 = -0.002$

	α			β	
	[illegible]	31		[illegible]	4[illegible]
	[illegible]	42		[illegible]	[illegible]
$h = [illegible]$	[illegible]	4[illegible]	$h = [illegible]$	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	31		[illegible]	24
$\varphi_r =$	[illegible]	[illegible]	$\varphi_l =$	[illegible]	[illegible]

$\kappa' = -[illegible]\quad \kappa = -[illegible]$

Obwohl nach Zusammensetzung sehr verschieden haben die besprochenen Gläser doch sehr nahe liegende Magnetisierungszahlen κ.

[illegible]

$m = [illegible]\quad \delta = [illegible]\quad \tau = [illegible]\quad s - s_0 = -[illegible]$

	α			β	
	[illegible]	[illegible]		4[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]		4[illegible]	42
$h = [illegible]$	[illegible]	[illegible]	$h = [illegible]$	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]		4[illegible]	[illegible]
$\varphi_r =$	[illegible]	[illegible]	$\varphi_l =$	[illegible]	4[illegible]

$\kappa' = -[illegible]\quad \kappa = [illegible]$

Reguläre Kristalle.

Steinsalz.

$m = [illegible]\quad \delta = [illegible]\quad \tau = [illegible]\quad s - s_0 = -[illegible]$

	α			β	
	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]
$h = [illegible]$	[illegible]	[illegible]	$h = [illegible]$	[illegible]	38
	[illegible]	3[illegible]	$\varphi_l =$	[illegible]	34
	[illegible]	39			
$\varphi_r =$	[illegible]	40′			

$\kappa' = -[illegible]\quad \kappa = 8.[illegible] \cdot 10^{-7}$

Alaun.

$m = 0{,}0371$, $\delta = 1{,}75$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	47°	23′		47°	32′
	47	18		47	0
$h = 6{,}14$	47	13	$h = 6{,}14$	47	20
	47	0		47	10
$\varphi_\alpha =$	47°	14′	$\varphi_\beta =$	47°	16′

$\varkappa' = -5{,}79 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = 10{,}1_4 \,.\, 10^{-7}$.

Bleinitrat.

$m = 0{,}1055$, $\delta = 4{,}4$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	57°	32′		59°	0′
	57	35		56	30
$h = 6{,}12$	57	38	$h = 6{,}12$	57	15
	57	31		57	4
$\varphi_\alpha =$	57°	34′		56	59
				56	55
			$\varphi_\beta =$	56°	57′

$\varkappa' = -2{,}48 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = 10{,}9_8 \,.\, 10^{-7}$.

Flußspat (farblos, vom Brienzer See).

$m = 0{,}0458$, $\delta = 3{,}18$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	62°	11′		62°	9′
	62	21		61	58
$h = 6{,}11$	62	3	$h = 6{,}10$	61	59
	62	6		61	44
$\varphi_\alpha =$	62°	10′		62	10
				61	55
			$\varphi_\beta =$	61°	59′

$\varkappa' = -6{,}27 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = 20{,}0 \,.\, 10^{-7}$.

Bleiglanz.

$m = 0{,}1963$, $\delta = 7{,}50$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	150°	43′		150°	40′
$h = 6{,}12$	150	31	$h = 6{,}11$	150	28
	150	28	$\varphi_\beta =$	150°	34′
	150	23			
$\varphi_\alpha =$	150°	30′			

$\varkappa' = -3{,}50 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = -26{,}3 \,.\, 10^{-7}$.

Pyrit (aus Cornwallis).

$m = 0{,}1078$, $\delta = 5{,}05$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	159°	0′		156°	17′
	159	2		156	17
$h = 6{,}13$	158	27	$h = 6{,}13$	156	17
	158	25		156	33
$\varphi_\alpha =$	158°	44′	$\varphi_\beta =$	156°	21′

$\varkappa' = +6{,}66 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = 33{,}6_5 \,.\, 10^{-7}$.

Zinkblende (von Santander, ganz hellgelb gefärbt).

$m = 0{,}0735$, $\delta = 4{,}0$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	42°	22′		42°	24′
	41	53		41	46
$h = 6{,}13$	42	33	$h = 6{,}13$	42	9
	42	8		41	52
$\varphi_\alpha =$	42°	14′	$\varphi_\beta =$	42°	3′

$\varkappa' = 2{,}61 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa = 10{,}4_5 \,.\, 10^{-7}$.

Magnetisch-einaxige Kristalle.

Die Hauptaxe ist durch den Index 3 charakterisiert.

Kalkspat.

$R \parallel$ der Axe.

$m = 0{,}0623_5$, $\delta = 2{,}714$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	55°	30′		55°	29′
	55	25		55	27
$h = 6{,}13$	55	24	$h = 6{,}13$	55	27
	55	31		55	28
	55	35		55	28
	55	22		55	32
$\varphi_\alpha =$	55°	28′	$\varphi_\beta =$	55°	28′,5

$\varkappa'_3 = -4{,}05_9 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa_3 = -11{,}01 \,.\, 10^{-7}$.

$R \perp$ der Axe.

$m = 0{,}0677_4$, $\delta = 2{,}714$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

	α)			β)	
	54°	6′		54°	0′
	53	41		53	54
$h = 6{,}12$	53	53	$h = 6{,}12$	54	3
	53	46		54	2
	54	0		53	55
	53	52		54	0
$\varphi_\alpha =$	53°	54′	$\varphi_\beta =$	53°	59′

$\varkappa'_1 = -3{,}83_7 \,.\, 10^{-7}$, $\varkappa_1 = -$ [illegible]$87 \,.\, 10^{-7}$.

Hieraus

$$\varkappa_3 - \varkappa_1 = -1{,}1_4 . 10^{-7}, \quad \varkappa_1 : \varkappa_3 = 0{,}89_7$$

erstere Zahl (zufällig) in vollständiger Übereinstimmung mit dem Resultate Königs, letztere ziemlich nahe demjenigen Tyndalls.

Dolomit (farblos, von Traversella).

$R \parallel$ der Axe.

$m = 0{,}0550, \quad \delta = 2{,}90, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}003$

	α)			β)	
	145°	30′		144°	18′
	145	30		144	23
$h = 6{,}11$	145	20	$h = 6{,}11$	144	32
	145	50		144	46
$\varphi_\alpha =$	145°	32′,5	$\varphi_\beta =$	144°	28′,5

$$\varkappa_3' = +12{,}0_5 . 10^{-7}, \quad \varkappa_3 = +34{,}9_7 . 10^{-7}.$$

$R \perp$ der Axe.

$m = 0{,}0583, \quad \delta = 2{,}90, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}003$

	α)			β)	
	100°	2′		98°	50′
	100	10		98	0
$h = 6{,}11$	99	46	$h = 6{,}11$	99	0
	99	30		98	5
$\varphi_\alpha =$	99°	52′		98	42
				98	27
			$\varphi_\beta =$	98°	31′

$$\varkappa_1' = +7{,}78_7 . 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = +22{,}5_8 . 10^{-7}.$$

Hieraus

$$\varkappa_3 - \varkappa_1 = +12{,}3_9 . 10^{-7}, \quad \varkappa_1 : \varkappa_3 = 0{,}64_5.$$

Der starke Paramagnetismus des Dolomit steht in einem auffallenden Gegensatz zu dem Diamagnetismus des Kalkspat und kann vielleicht als bequemes Unterscheidungsmerkmal dienen.

Quarz.

$R \parallel$ der Axe.

$m = 0{,}0746, \quad \delta = 2{,}65, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}003$

	α)			β)	
	76°	37′		76°	34′
	76	28		76	21
$h = 6{,}15$	76	28	$h = 6{,}15$	76	20
	76	29		76	24
$\varphi_\alpha =$	76°	30′,5	$\varphi_\beta =$	76°	25′

$$\varkappa_3' = -4{,}66 . 10^{-7}, \quad \varkappa_3 = -12{,}3_6 . 10^{-7}.$$

$R \perp$ der Axe.

$m = 0.0717, \quad \delta = 2.65, \quad r = 0.275, \quad s - s_0 = -0{,}003$

	α)			β)
	72° 27′			72° 34′
	72 35			72 20
$h = 6{,}13$	72 33		$h = 6{,}12$	72 26
	72 36			72 16
$\varphi_\alpha =$	72° 33′		$\varphi_\beta =$	72° 24′

$\varkappa_1' = -4.61_4 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = -12.2_8 \cdot 10^{-7}.$

Hieraus

$$\varkappa_3 - \varkappa_1 = -0.12 \cdot 10^{-7}. \quad \varkappa_1 / \varkappa_3 = 0.990.$$

Der gefundene Unterschied zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$ ist so klein, daß er durch die benutzte Methode nur unsicher bestimmbar ist.

Beryll (hellgrün vom Ural)[1].

$R \parallel$ der Axe.

$m = 0.0653, \quad \delta = 2{,}7, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}002$

	α)		β)		α)
	56° 0′		55° 5′		54° 28′
	56 47		55 32		54 30
$h = 6{,}14$	55 59	$h = 6{,}13$	55 0	$h = 6{,}13$	54 45
	56 52		55 23		54 18
$\varphi_\alpha =$	56° 24′,5	$\varphi_\beta =$	55° 15′		53 48
					54 0
				$\varphi_\alpha =$	54° 18′

$\varkappa_3' = +3{,}86 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_3 = +10{,}4_8 \cdot 10^{-7}.$

$R \perp$ der Axe.

$m = 0{,}0642, \quad \delta = 2{,}7, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}002$

	α)		β)		α)
	116° 55′		116° 19′		115° 25′
$h = 6{,}13$	117 5	$h = 6{,}13$	116 45	$h = 6{,}13$	115 55
	116 15		116 15	$\varphi_\alpha =$	115° 40′
	116 25		116 40		
$\varphi_\alpha =$	116° 40′	$\varphi_\beta =$	116° 30′		

$\varkappa_1' = +8{,}26_5 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = +22{,}3 \cdot 10^{-7}.$

Hieraus

$$\varkappa_1 - \varkappa_3 = 11{,}8_9 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_3 / \varkappa_1 = 0{,}468.$$

Der große Unterschied zwischen den magnetischen Erregbarkeiten parallel und normal zur Axe ist sehr bemerkenswert.

1) Derselbe, der zu den Elastizitätsbeobachtungen von Voigt gedient hatte; s. Wied. Ann. 31, 485, 1887.

τ_1 und τ_2 waren 33,89 und 49,43 sec.; hieraus findet sich gemäß der Formel

$$D = 8\pi^2 m \frac{l_1^2 - l_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}$$

für D der Wert

$$D = 0{,}495_8 \text{ cm. gr. sec.}$$

Der Hebelarm h, an dem die Feldwirkung die Kristallplatte angriff, war wegen der etwas gerundeten Form der Aufhängungshäkchen (Fig. 3) nicht völlig konstant und wurde bei jeder Messung direkt bestimmt. Er betrug rund 6,1 cm.

Die Beobachtungen fanden in dem Glaskasten statt, der bei den Plückerschen Magneten die Polschuhe einschließt. Die erhebliche Größe dieses Raumes gab zu Luftströmungen Veranlassung, die anfänglich die Beobachtungen sehr störten, sich aber durch eine teilweise Ausfüllung des Raumes durch geeignete Papierschirme ziemlich unschädlich machen ließen.

Immerhin dürften die stattfindenden Abweichungen zwischen den Beobachtungen derselben Reihe in der Hauptsache noch auf der Wirkung dieser Störungen beruhen.

Der Glaskasten war oben durch eine nur aufgelegte Spiegelglasscheibe verschlossen, in der das Glasrohr befestigt war, welches den Torsionskopf trug; die ganze Drehwage war in dieser Weise horizontal verschiebbar und es gelang so ohne Schwierigkeit, in jedem einzelnen Falle die untersuchte Kristallplatte in die Äquatorialebene des Feldes und an eine bestimmte Stelle des Radiusvektor zu bringen. Wegen des Maximum- resp. Minimumcharakters dieser Ebene und der benutzten Orientierungen der Kristallplatten haben übrigens kleine Fehler in der Lage der Platten, soweit nur der Radiusvektor s genau den richtigen Wert hat, sehr geringen Einfluß; die Größe von s ließ sich aber auf die S. 129 beschriebene Weise zuverlässig bestimmen, zumal durch Umkehren der Aufhängung nach S. 131 auch eine etwaige Umsymmetrie der Form oder Massenverteilung eliminiert wurde.

Da die Wirkung des Feldes auf den Kristall vom Quadrat der Feldstärke abhängt, so war das nach einfacher Unterbrechung des magnetisierenden Stromes zurückbleibende schwache Feld von kaum merklicher Wirkung. Immerhin wurde auch diese noch reduziert, indem die Entmagnetisierung durch wiederholtes Umkehren des Stromes bei allmählich abgeschwächter Intensität bewirkt wurde.

Die Ordnung der Beobachtungen war schließlich diese. Bei nicht erregtem Magneten wurde die Kristall- oder Glasplatte an

eine bestimmte (von Fall zu Fall wesentlich konstante) Stelle der Äquatorebene des Feldes gebracht und die dieser Lage entsprechende Stellung des Torsionskopfes notiert; darauf wurde das Feld erregt und die Platte durch Drehung des Torsionskopfes an die alte Stelle zurückgeführt. Bei stark paramagnetischen Objekten gelang dies nur dadurch, daß das Feld allmählich von Null auf die gewünschte Höhe gebracht und die Platte dabei andauernd in der Nähe der Ruhelage gehalten wurde. Es beruhte dies offenbar darauf, daß das Gleichgewicht dieser Körper an der betreffenden Stelle nur sehr geringe Stabilität hatte und die Platten bei merklichen Elongationen sich nach einer andern Gleichgewichtslage zu bewegen suchten. War die Gleichgewichtslage ganz oder nahezu erreicht, so wurde durch wiederholtes Kommutieren des Magnetstromes festgestellt, daß eine Remanenzwirkung von merklicher Stärke im Kristall nicht auftrat.

Nach Ablesung des Torsionskopfes fand allmählige Entmagnetisierung statt und daran anschließend erneute Einstellung des Präparates in der alten Position mit Ablesung am Torsionskopf. Diese Folge von Beobachtungen wurde bei jeder Substanz zwei oder drei Mal wiederholt, darauf die Platte um 180° um die Vertikale gedreht und wie zuvor verfahren.

Im Folgenden ist bei jeder Substanz angegeben: die Masse m des Präparates, seine Dichte[1] δ, sein Radius r, ferner die Abweichung $s - s_0$ des Mittelpunktes von der Stellung, auf die als Anfangspunkt sich die Interpolationsformel (6) bezog. Dann folgen unter α und β die Drehungen am Torsionskopf bei Erregung und Aufhebung des Feldes je mit dem entsprechenden Hebelarm h der Drehwage.

Für die Verwertung dieser Messungen ist Formel (4) heranzuziehen in der S_h durch $D\varphi_h$ zu ersetzen ist. Ferner kürzen wir die Magnetisierungszahlen $k_h - k_0$ relativ zur umgebenden Luft in $\varkappa_h$ ab und haben dann

$$D\varphi_h = \tfrac{1}{2} v \varkappa_h \frac{d\overline{R^2}}{ds}, \quad \text{wobei } v\delta = m.$$

$\varkappa_h/\delta = \varkappa_h'$ stellt die auf die Masseneinheit, wie $\varkappa_h$ die auf die Volumeneinheit bezogene Magnetisierungszahl dar; positive Werte bezeichnen Para-, negative Diamagnetismus.

1) Diese Dichten sind nicht extra beobachtet, sondern Tabellen (zumeist den Landolt-Börnsteinschen) entnommen. Für die Anwendungen dürfte eine etwaige Ungenauigkeit von δ eine wesentliche Schwierigkeit nicht bieten.

R | der Axe.

$m = $ [illegible], $\delta = $ [illegible], $r = $ [illegible], $s - s_1 = -$[illegible]

	α			β	
	[illegible]′	[illegible]′		[illegible]′	5′
	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]
$h = $ [illegible]	[illegible]	[illegible]	$h = $ [illegible]	[illegible]	5
	[illegible]	[illegible]		[illegible]	6
$\varphi_\alpha = $	[illegible]′	[illegible]	$\varphi_\beta = $	[illegible]′	[illegible]

$\varkappa_1 = -$[illegible] $. 10^{-[illegible]}$, $\varkappa_2 = -$[illegible] $. 10^{-[illegible]}$

R — der Axe.

$m = $ [illegible], $\delta = $ [illegible], $r = $ [illegible], $s - s_1 = -$[illegible]

	α	
	44′	7
	43	4[illegible]
$h = $ [illegible]	44	1
	44	[illegible]
$\varphi_\alpha = $	45′	5[illegible]

$\varkappa_1 = -$[illegible] $. 10^{-[illegible]}$, $\varkappa_2 = -$[illegible] $. 10^{-[illegible]}$

Kristalle mit drei magnetischen Axen.

Topas [illegible] aus Japan.

R | der a-Axe.

$m = $ [illegible], $\delta = 3,5$, $r = $ [illegible], $s - s_1 = -$[illegible]

	α			β			α	
	85′	45′		85′	[illegible]		85′	40′
	85	26		85	7		85	12
$h = $ [illegible]	85	33	$h = $ [illegible],11	85	16	$h = $ [illegible],11	85	34
	85	40		84	49		85	20
	85	34		85	16	$\varphi_\alpha = $	85′	26′
	85	31		85	12			
	85	32	$\varphi_\beta = $	85′	12′			
	85	25						
$\varphi_\alpha = $	85′	35′						

$\varkappa_1 = -4,1[illegible] . 10^{-[illegible]}$, $\varkappa_2 = -14,[illegible] . 10^{-[illegible]}$

R | der b-Axe.

$m = $ [illegible], $\delta = 3,5$, $r = $ [illegible], $s - s_1 = -$[illegible]

	α			β			α			β	
	83′	16′		83′	0′		83′	35′		82°	59′
	83	4		82	46		83	26		83	1
$h = 6,10$	82	46	$h = 6,11$	82	43	$h = 6,11$	83	25	$h = 6,11$	82	43
	82	49		82	44		83	22		82	35
$\varphi_\alpha = $	82°	59′		82	43	$\varphi_\alpha = $	83′	2[illegible]		82	53
				82	43					82	48
			$\varphi_\beta = $	82°	48′				$\varphi_\beta = $	82°	50′

$\varkappa_1' = -4,20 . 10^{-[illegible]}$, $\varkappa_2 = -14,[illegible] . 10^{-[illegible]}$

$R \parallel$ der c-Axe.

$m = 0{,}0871,\quad \delta = 3{,}5,\quad r = 0{,}275,\quad s - s_0 = -0{,}002$

	α)		β)		α)
	80° 20′		80° 40′		79° 42′
	80 4		80 7		79 43
$h = 6{,}10$	80 5	$h = 6{,}11$	80 28	$h = 6{,}11$	79 50
	80 3		80 8		79 8
$\varphi_\alpha =$	80° 8	$\varphi_\beta =$	80° 21′	$\varphi_\alpha =$	79° 44′

$\varkappa_s' = -4{,}20 \,.\, 10^{-7},\quad \varkappa_s = -14{,}7_0 \,.\, 10^{-7}.$

Die Unterschiede der drei $\varkappa_h$ sind kaum merklich.

Coelestin (fast farblos).

$R \parallel$ der a-Axe.

$m = 0{,}0991,\quad \delta = 3{,}96,\quad r = 0{,}275,\quad s - s_0 = -3{,}002$

	α)		β)
	74° 10′		74° 40′
	74 17		74 25
$h = 6{,}14$	74 15	$h = 6{,}14$	74 23
	74 18		74 22
$\varphi_\alpha =$	74° 15′	$\varphi_\beta =$	74° 30′

$\varkappa_s' = -3{,}42 \,.\, 10^{-7},\quad \varkappa_s = -13{,}5_8 \,.\, 10^{-7}.$

$R \parallel$ der b-Axe.

$m = 0{,}0997,\quad \delta = 3{,}96,\quad r = 0{,}275,\quad s - s_0 = -0{,}002$

	α)		β)
	68° 46′		68° 59′
	68 43		69 2
$h = 6{,}15$	68 45	$h = 6{,}15$	68 54
	69 2		69 11
$\varphi_\alpha =$	68° 49′	$\varphi_\beta =$	69° 1′

$\varkappa_s' = -3{,}14 \,.\, 10^{-7},\quad \varkappa_s = -12{,}4_5 \,.\, 10^{-7}.$

$R \parallel$ der c-Axe.

$m = 0{,}1035,\quad \delta = 3{,}96,\quad r = 0{,}275,\quad s - s_0 = -0{,}002$

	α)		β)
	81° 5′		81° 21′
	81 9		81 21
$h = 6{,}13$	81 9	$h = 6{,}13$	81 28
	81 21		81 27
$\varphi_\alpha =$	81° 11′	$\varphi_\beta =$	81° 24′

$\varkappa_s' = -3{,}59 \,.\, 10^{-7},\quad \varkappa_s = -14{,}2_1 \,.\, 10^{-7}.$

Auch hier sind die Unterschiede zwischen den drei Hauptmagnetisierungszahlen ziemlich klein.

Aragonit aus Böhmen, ganz hellgelb.

E | der a-Axe.

$m = 0.$[illegible], $d = 2.$[illegible], $e = 0.$[illegible], $s - s_1 = -0.003$

	α	63'	36		β	63'	2[illegible]
		63	[illegible]			63	20
$h = 6.25$		63	21	$h = 6.23$		63	[illegible]
		63	9			63	21
	$\varphi_\alpha =$	63'	1[illegible]		$\varphi_\beta =$	[illegible]'	2[illegible]

$\varkappa_1 = -8.82 \cdot 10^{-}$[illegible], $\varkappa_2 = -12.$[illegible]

E | der b-Axe.

$m = 0.$[illegible], $d = 2.$[illegible], $e = 0.$[illegible], $s - s_1 = -0.003$

	α	[illegible]'	[illegible]		β	[illegible]'	15
		[illegible]	3			66	39
$h = 6.24$		[illegible]	[illegible]	$h = 6.2$[illegible]		[illegible]	32
		66	32			[illegible]	45
	$\varphi_\alpha =$	[illegible]'	4		$\varphi_\beta =$	[illegible]'	[illegible]

$\varkappa_1 = -8.$[illegible], $\varkappa_2 = -12.$[illegible]

E | der c-Axe.

$m = 0.$[illegible], $d = 2.$[illegible], $e = 0.$[illegible], $s - s_1 = -0.003$

	α	[illegible]'	[illegible]		β	[illegible]'	[illegible]
		[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]
$h = 6.$[illegible]		32	[illegible]	$h = 6.$[illegible]		[illegible]	[illegible]
		[illegible]	[illegible]			[illegible]	[illegible]
	$\varphi_\alpha =$	[illegible]'	[illegible]		$\varphi_\beta =$	[illegible]'	[illegible]

$\varkappa_1 = -4.44 \cdot 10^{-}$[illegible], $\varkappa_2 = -1$[illegible]

Der dritte Wert $\varkappa$ weicht von den beiden vorhergehenden sehr merklich ab.

Göttingen, im März 1907.

Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Aragonit.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. März 1907.

Für eine molekulare Theorie der Materie bietet die Kenntnis des mechanischen Verhaltens verschiedener Modifikationen einer und derselben Substanz unzweifelhaft ein besonders wichtiges Hilfsmittel. Aus diesem Grunde habe ich gleich nach Durchführung meiner Untersuchungen[1]) der Elastizitätsverhältnisse des Kalkspates mit dem Sammeln von Material für eine spätere Behandlung des Aragonites, der sich ja bei Rotglut in Kalkspat umwandelt, begonnen. Die in den letzten Wochen vollendeten Beobachtungen am Aragonit, bei denen ich mich der finanziellen Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu erfreuen hatte, haben zu den nachstehend mitgeteilten Resultaten geführt.

Das Beobachtungsmaterial. Für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten kommen nur die böhmischen Aragonite in Betracht, von denen Kristalle mit den beiläufigen Dimensionen $1{,}5 \times 1 \times 3$ cm unschwer zu erhalten sind. Schwierigkeiten bei ihrer Verwendung bieten die geringen Querdimensionen dieser Vorkommen und fast noch mehr die in ihnen so häufig auftretenden Zwillingslamellen.

In erster Hinsicht bot Hilfe ein (im Ganzen unregelmäßig ausgebildeter) größerer Kristall, in dem sich eine einzelne Schicht normal zur c-Axe in Querdimensionen von rund 2 cm zur Herstellung einiger Stäbchen normal zur c-Richtung brauchbar

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1889, Nr. 19; Wied. Ann. 39, 412, 1890.

erwies. Außerdem ließen sich in gegen die c-Axe geneigten Richtungen der ac- und bc-Ebene aus den dünneren Kristallen längere Stäbchen dadurch gewinnen, daß dieselben nicht (wie z. B. früher bei Topas) unter 45°, sondern unter 30° gegen die c-Axe geneigt hergestellt wurden.

Zwillingslamellen sind im allgemeinen dadurch ganz vermieden worden, daß mit dem Material Luxus getrieben, z. B. zur Herstellung von ein oder zwei Stäbchen parallel der c-Axe ein ganzer Kristall geopfert wurde. Für einzelne Orientierungen ließ sich indessen keine Lage des Stäbchens finden, die ausschließlich ungestörtes Material berührte; in diesen Fällen ist Sorge getragen, daß die (stets sehr feinen) Lamellen die Stäbchen nahe deren Enden durchsetzten.

Die ganz seitlich liegenden Stabteile werden ja bekanntlich bei Biegungen durch Belastung der Mitte nur sehr wenig in Anspruch genommen; es kommen demgemäß die in ihnen liegenden Störungen kaum merklich zur Wirkung. Bei den Drillungen sind die äußersten 2—3 mm der Länge durch die Einkittung der Stäbchen gleichfalls unwirksam; laufen überdies die Lamellen vom Ende des Stäbchen aus gegen eine Schmal-Seite ([⋰]), so kommen sie deshalb kaum zur Geltung, weil die Schmalseiten bekanntlich bei der Torsion sehr wenig gespannt sind. Ich glaube nicht, daß bei den von mir benutzten Präparaten ein Einfluß der Zwillingslamellen übrig geblieben ist, der die Größe der Beobachtungsfehler übertrifft.

Die Formeln für das rhombische Kristallsystem. Von den im allgemeinen 21 Elastizitätskonstanten c_{hk} und -moduln s_{hk} bleiben im rhombischen System nur die neun mit den Indizes

$$(11),\ (22),\ (33),\ (44),\ (55),\ (66),\ (23),\ (31),\ (12)$$

übrig.

Bezeichnet man die Richtungskosinus einer Richtung gegen die Kristallaxen durch α, β, γ, so bestimmt sich der dieser Richtung zugehörige Dehnungsmodul E, das Reziproke des sogenannten Elastizitätskoeffizienten oder Dehnungswiderstandes E, durch die Formel

$$1)\quad \mathrm{E} = 1/E = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 \\ + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2.$$

Die Biegung η eines beiderseitig unterstützten Stabes von der Länge L, der Breite B, der Dicke D bei der zentralen Belastung P ergibt sich, wenn L in die oben eingeführte Richtung

fällt, zu

$$\eta = \frac{\mathrm{E}\, P L^3}{4 B D^3}. \tag{2}$$

Biegungsbeobachtungen gestatten sonach die sechs Aggregate der s_{hk} in (1) zu bestimmen, wozu sechs geeignet gewählte Stäbchen zu benutzen sind. Ich habe die folgenden angewendet, die nachstehend durch ihre weiter geführten Gattungsnummern und die dazu gesetzten Werte der Richtungswinkel von L charakterisiert sind.

$$\begin{gathered} \mathrm{I}\ (0, 90^0, 90^0);\ \mathrm{II}\ (90^0, 0, 90^0);\ \mathrm{III}\ (90^0, 90^0, 0); \\ \mathrm{IV}\ (90^0, 60^0, 30^0);\ \mathrm{V}\ (60^0, 90^0, 30^0);\ \mathrm{VI}\ (58^0 5', 31^0 55', 90^0). \end{gathered} \tag{3}$$

Die Gattung VI liegt parallel den Zwillingslamellen, welche letztere auf diese Weise am einfachsten zu vermeiden waren. Im übrigen zeigten feine Lamellen nahe den Enden nur die Gattungen I und VI.

Gemäß obigen Orientierungen wird nun

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= s_{11}, \quad \mathrm{E}_2 = s_{22}, \quad \mathrm{E}_3 = s_{33}, \\ \mathrm{E}_4 &= \tfrac{1}{16}(9 s_{33} + s_{22} + 3(s_{44} + 2 s_{23})), \\ \mathrm{E}_5 &= \tfrac{1}{16}(9 s_{33} + s_{11} + 3(s_{55} + 2 s_{31})), \\ \mathrm{E}_6 &= 0{,}0781\, s_{11} + 0{,}519\, s_{22} + 0{,}2014\, (s_{66} + 2 s_{12}), \end{aligned} \tag{4}$$

woraus sich s_{11}, s_{22}, s_{33}, $s_{44} + 2 s_{23}$, $s_{55} + 2 s_{31}$, $s_{66} + 2 s_{12}$ leicht berechnen.

Um die neun s_{hk} gesondert zu erhalten, sind Drillungen von drei geeignet orientierten Stäbchen heranzuziehen. Es empfehlen sich drei von denjenigen (sechs) Orientierungen, wo L, B, D den Kristallaxen parallel sind. Hier drücken sich die Drillungswinkel τ einfach durch ein von mir als Drillungsmodul T bezeichnetes Aggregat aus, das als das Reziproke des Drillungswiderstandes T aufzufassen ist und gegeben wird durch die Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{T} = 1/T = {} & 4 (s_{11} \alpha^2 \alpha_1^2 + s_{22} \beta^2 \beta_1^2 + s_{33} \gamma^2 \gamma_1^2) \\ & + 2 [(s_{44} + 4 s_{23}) \beta\beta_1 \gamma\gamma_1 + (s_{44} + 4 s_{31}) \gamma\gamma_1 \alpha\alpha_1 + (s_{66} + 4 s_{12}) \alpha\alpha_1 \beta\beta_1] \\ & + s_{44} (\beta^2 \gamma_1 + \gamma^2 \beta_1^2) + s_{55} (\gamma^2 \alpha_1^2 + \alpha^2 \gamma_1^2) + s_{66} (\alpha^2 \beta_1^2 + \beta^2 \alpha_1^2); \end{aligned} \tag{5}$$

in ihr bezeichnen α, β, γ die Richtungskosinus der Länge L, aber α_1, β_1, γ_1 diejenigen der größern Querdimension B des Stäbchens.

Charakterisiert man die Richtung von L durch den ersten, die von B durch den zweiten Index von T, so erhält man aus (5)

$$6) \quad T_{bc} = T_{cb} = s_{44}, \quad T_{ca} = T_{ac} = s_{55}, \quad T_{ab} = T_{ba} = s_{66}.$$

Von den Stäbchen (90⁰, 90⁰, 0) hatte der eine Teil, der weiter die Bezeichnung III behalten soll, die Richtung B in der a-Axe, der andere, der mit III′ bezeichnet werden soll, in der b-Axe. Die Stäbchen I (0,90⁰, 90⁰) hatten die B-Richtung in der b-Axe.

Die Drillung τ eines Stabes von den Dimensionen L, B, D bei Einwirkung eines Momentes N um die Längsrichtung hängt dann je von den beiden auf dieselbe Richtung von L bezüglichen Moduln T ab. Es gilt nämlich, wenn man τ mit den analogen Indizes versieht, wie T,

$$7) \quad \tau_{bc} = \frac{3\,T_{bc}\,LN}{BD^3\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{ba}}{T_{bc}}}\right)}, \qquad \tau_{ba} = \frac{3\,T_{ba}\,LN}{BD^3\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{bc}}{T_{ba}}}\right)}.$$

Hierin ist λ eine Funktion von D/B, die für $D/B < \frac{1}{8}$ merklich konstant gleich 3,361 ist.

Das zweite Glied der Klammern im Nenner ist klein neben Eins, daher wird man die Berechnung der Moduln T aus den Beobachtungen durch sukzessive Annäherung ausführen.

Bestimmung der Dimensionen. Die der Messung unterzogenen Präparate hat die Firma Dr. Steeg und Reuter, Bad Homburg, in gewohnter Vortrefflichkeit hergestellt; in der Tat genügte die Regelmäßigkeit der prismatischen Form weitgehenden Ansprüchen.

Die Dicken wurden an 15 resp. (bei den kürzesten Stäbchen) an 9 Stellen gemessen, die sich in gleicher Zahl auf die Mittellinie und auf zwei um zirka 1 mm von den beiden Rändern abliegende Gerade verteilten; die drei demselben Querschnitt entsprechenden Zahlen weichen nur selten um 0,003 mm von einander ab, und die in der Längsrichtung stattfindenden Variationen sind kaum größer. Ich gebe nachstehend die Mittel für die einzelnen Querschnitte, wobei die auf die Mittellinie bezüglichen Zahlen mit dem doppelten Gewicht eingeführt sind; die Einheiten sind Trommelteile des Mikrometers (= 1/992,6 mm). Die Breiten sind an drei Stellen gemessen und in Millimetern angegeben.

Dimensionen.

	Dicke					Breite		
I. No. 1	484	483,5	484,5	484,5	484	4,98	4,99	4,99
No. 2	485	484,5	484,5	484,5	484	4,99	5,00	5,00
No. 3	486,5	487	485,5			4,93	4,925	4,92
II. No. 1	487,5	486,5	486	486	487,5	4,985	4,975	4,96
No. 2	487	486,5	489			4,97	4,98	4,97
No. 3	471	469	469			5,13	5,13	5,13
III. No. 1	488,5	485,5	482,5	484	486,5	4,91	4,92	4,92
No. 2	473	468,5	467	469	473	5,38	5,38	5,37
No. 3	473	470	469	470	474	5,38	5,39	5,39
III'. No. 1	489	488	485,5	486	488	4,93	4,92	4,90
No. 2	477	474	471	470	470	5,41	5,41	5,41
No. 3	474,5	469,5	467,5	470	475,5	5,40	5,42	5,41
IV. No. 1	489,5	489,5	489	489	489,5	4,91	4,90	4,88
No. 2	486,5	487	488	489	488,5	4,90	4,89	4,89
V. No. 1	485	482	483,5			4,96	4,97	4,96
No. 2	473	472	474			5,40	5,40	5,40
No. 3	473	471	471	470	473	3,79	3,82	3,83
VI. No. 1	485,5	483,5	483	484	485	4,91	4,91	4,90
No. 2	486	485,5	485	486	487	4,91	4,91	4,90

Die Biegungsbeobachtungen. Über die Methode, nach der die Biegungsbeobachtungen ausgeführt sind, ist an anderer Stelle [1]) ausführlich berichtet worden. Hier mag nur wiederholt werden,

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1886 No. 3; Wied. Ann. **31**, 474, 1887.

daß die meisten Stäbchen in zwei verschiedenen (wirksamen) Längen zur Messung gelangten, um durch Kombination der Resultate die Eindrückung der Lager- und Belastungsschneiden zu eliminieren. Diese störenden Einflüsse gewinnen bei den kurzen Stäbchen eine große Bedeutung und es ist nicht angängig, ihre Werte von einer Gattung Stäbchen auf die andern zu übertragen, da neben der Gestalt und dem Oberflächenzustand (Politur) der aufliegenden Flächen auch die Orientierung des Stäbchens gegen die Kristallaxen für jene Größen merklich maßgebend ist. Bei der im allgemeinen stattfindenden sehr geringen Größe der (ohne zu große Gefährdung der Stäbchen) erzielbaren Biegungen war ein äußerst sorgsames Operieren nötig um eine befriedigende Übereinstimmung der Resultate zu erzielen; wiederholtes Abwaschen der Stäbchen mit absolutem Alkohol, Beseitigung etwaiger Stäubchen von den Auflageflächen mittels eines Pinsels, Vermeidung der Berührung mit der Hand und dergl. war zu beachten, um Störungen auszuschließen.

Die nachstehende Tabelle enthält für jedes Stäbchen die Dimensionen B, D, L in Millimetern, die Belastung in Grammen (S das Gewicht der Wagschaale $= 11{,}42$), sodann die beobachteten Senkungen σ in Millimetern der Skala, die je einem wirklichen Senkungswert von 0,0006793 mm entsprechen. Jede angegebene Zahl ist das Mittel aus 3—4 Ablesungen bei einer bestimmten Anordnung, bezieht sich also auf eine vollständige Beobachtungsreihe; die neben einander stehenden Zahlen sind hinter einander bei umgekehrten Lagen der Stäbchen gewonnen. Weiter folgt die aus den σ berechnete Eindrückung σ_0 der Schneiden und die mit ihrer Hülfe gewonnene effektive Biegung η.

Da alle Fehlerquellen dahin wirken, die Biegungen zu groß erscheinen zu lassen, so ist bei allen zum Zweck der Berechnung von η nötigen Mittelwertbildungen aus zwei Resultaten dem kleineren das doppelte Gewicht beigelegt.

Endlich folgt der Dehnungsmodul E, nach Formel (2) berechnet, wobei Gramme und Millimeter als Einheiten benutzt sind. Am Schluß der auf eine Stäbchengattung bezüglichen Zahlen ist der Mittelwert aller E für die betreffende Gattung aufgeführt, daneben $E = 1/\mathrm{E}$ der Dehnungswiderstand.

Die Messungen waren am schwierigsten bei den Stäbchen der Gattungen II und V wegen deren sehr geringen Längen; es ist ein glücklicher Umstand, daß den betreffenden Orientierungen bei Aragonit ein relativ kleiner Biegungswiderstand entspricht — so sind die für sie erhaltenen Zahlen nicht merklich unsicherer, als die übrigen.

Biegungen.

I. No. 1	$B = 4,93$	$D = 0,487_5$	$P = S+40$
$L = 21,1$	$\sigma = 21,3 \quad 21,4$	$L = 13,1$	$\sigma = 6,0 \quad 6,1$
	$\quad 22,6_6 \quad 22,4_5$		$6,2 \quad 6,2$
	$\sigma_0 = 1,1$	$\eta = 20,8$	$E_1 = 6,7_7 \,.\, 10^{-6}$
No. 2	$B = 5,30$	$D = 0,481$	$P = S+40$
$L = 21,1$	$\sigma = 21,7_5 \quad 22,0_5$	$L = 13,1$	$\sigma = 6,0 \quad 6,3$
	$\quad 22,5 \quad 22,3$		$6,2 \quad 6,2$
	$\sigma_0 = 1,1_5$	$\eta = 20,9_5$	$E_1 = 6,8_8 \,.\, 10^{-6}$
No. 3	$B = 4,92_5$	$D = 0,490$	$P = S+40$ resp. $S+30$
$L = 17,6$	$\sigma = 12,9 \quad 13,3$	$L = 13,1$	$\sigma = 3,8 \quad 3,9$
	$\sigma_0 = 0,8$	$\eta = 12,2_5$	$E_1 = 6,8_8 \,.\, 10^{-6}$
$L = 17,6$	$\sigma = 15,5 \quad 15,8$	$L = 13,1$	$\sigma = 7,0 \quad 7,1$
	$\sigma_0 = 1,0_5$	$\eta = 14,5_5$	$E_1 = 6,8_4 \,.\, 10^{-6}$

Im Mittel $\underline{E_1 = 6,8_4 \,.\, 10^{-6}}$ $\quad \underline{E_1 = 14,6 \,.\, 10^{6}}$

Bei Berechnung dieser Mittelwerte sind die beiden auf No. 3 bezüglichen Beobachtungen nur als eine gerechnet.

II. No. 1	$B = 4,97_5$	$D = 0,490$	$P = S+40$ resp. $S+50$
$L = 18,1$	$\sigma = 26,8 \quad 26,7$	$L = 13,1$	$\sigma = 11,4 \quad 10,9$
	$\quad 26,1_5 \quad 26,7_5$		
	$\sigma_0 = 1,6_5$	$\eta = 24,8_5$	$E_2 = 12,9_8 \,.\, 10^{-6}$
$L = 18,1$	$\sigma = 31,0 \quad 31,6$	$L = 13,1$	$\sigma = 12,6 \quad 12,9$
	$\sigma_0 = 1,5$	$\eta = 29,7$	$E_2 = 12,9_7 \,.\, 10^{-6}$
No. 2	$B = 4,97_5$	$D = 0,491$	$P = S+50$
$L = 14,6$	$\sigma = 16,7 \quad 16,7$		
	$\sigma_0 = 1,5$	$\eta = 15,2$	$E_2 = 12,7_8 \,.\, 10^{-6}$
No. 3	$B = 5,13$	$D = 0,473$	$P = S+50$
$L = 15,6$	$\sigma = 21,8 \quad 22,1$		
	$\sigma_0 = 1,5$	$\eta = 20,4$	$E_2 = 12,9_1 \,.\, 10^{-6}$

Im Mittel $\underline{E_2 = 12,8_9 \,.\, 10^{-6}}$ $\quad \underline{E_1 = 7,76 \,.\, 10^{6}}$

III. No. 1	$B = 4,92$	$D = 0,488_5$	$P = S+10$
$L = 28,1$	$\sigma = 37,7 \quad 38,2$	$L = 13,1$	$\sigma = 4,7_5 \quad 4,6_5$
	$\sigma_0 = 0,9_5$	$\eta = 36,9_0$	$E_3 = 12,0_8$
No. 2	$B = 5,38$	$D = 0,478$	$P = S+20$
$L = 24,1$	$\sigma = 34,9 \quad 34,7$	$L = 13,1$	$\sigma = 6,3 \quad 6,2$
	$\sigma_0 = 0,8_0$	$\eta = 33,9_5$	$E_3 = 11,9_6$
No. 3	$B = 5,39$	$D = 0,474$	$P = S+20$
$L = 24,1$	$\sigma = 34,7 \quad 34,8$		
	$\sigma_0 = 0,80$	$\eta = 33,9_5$	$E_3 = 12,0_5$

III'. No. 1 $B = 4{,}92$ $D = 0{,}490_5$ $P = S + 10$
$L = 28{,}1$ $\sigma = 36{,}9$ $37{,}1$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 4{,}3$ $4{,}5$
$\sigma_0 = 0{,}7_5$ $\eta = 36{,}2_0$ $E_3 = 12{,}0_0$

No. 3 $B = 5{,}41$ $D = 0{,}474$ $P = S + 10$
$L = 33{,}1$ $\sigma = 59{,}9$ $59{,}5$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 4{,}8$ $4{,}7$
$\sigma_0 = 1{,}1_5$ $\eta = 58{,}5$ $E_3 = 11{,}7_9$

Im Mittel $\underline{E_3 = 11{,}9_7 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_3 = 8{,}3_5 \cdot 10^6}$

IV. No. 1 $B = 4{,}91$ $D = 0{,}487_5$ $P = S + 20$
$L = 26{,}1$ $\sigma = 40{,}6_5$ $41{,}1_5$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 5{,}9_5$ $5{,}7_5$
$\sigma_0 = 0{,}70$ $\eta = 40{,}1_0$ $E_4 = 11{,}1_1 \cdot 10^{-8}$

No. 2 $B = 4{,}91$ $D = 0{,}489$ $P = S + 30$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 28{,}8$ $28{,}8$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 7{,}6_5$ $7{,}5_5$
$\sigma_0 = 1{,}0_0$ $\eta = 27{,}8_0$ $E_4 = 11{,}1_4 \cdot 10^{-8}$

Im Mittel $\underline{E_4 = 11{,}1_8 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_4 = 8{,}9_1 \cdot 10^6}$

V. No. 1 $B = 4{,}96_5$ $D = 0{,}486_5$ $P = S + 40$ resp $S + 50$
$L = 18{,}1$ $\sigma = 30{,}0$ $30{,}8$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 12{,}3$ $12{,}9$
$\sigma_0 = 1{,}6_0$ $\eta = 28{,}6_5$ $E_5 = 14{,}5_9 \cdot 10^{-8}$
$L = 18{,}1$ $\sigma = 37{,}2$ $36{,}9$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 15{,}2$ $15{,}5$
$36{,}6$ $35{,}6$ $15{,}2$ $14{,}6$
$\sigma_0 = 1{,}7_5$ $\eta = 34{,}5_5$ $E_5 = 14{,}7_3 \cdot 10^{-8}$

No. 2 $B = 5{,}40$ $D = 0{,}476_5$ $P = S + 50$
$L = 17{,}1$ $\sigma = 29{,}3$ $29{,}4$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 14{,}3$ $14{,}4$
$\sigma_0 = 2{,}0$ $\eta = 27{,}3_5$ $E_5 = 14{,}1_4 \cdot 10^{-8}$

No. 3 $B = 3{,}80$ $D = 0{,}474_5$ $P = S + 10$ resp. $S + 20$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 27{,}3$ $27{,}8$
$\sigma_0 = 0{,}9$ $\eta = 26{,}5_5$ $E_5 = 14{,}5_4 \cdot 10^{-8}$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 40{,}1$ $39{,}6$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 10{,}3$ $10{,}4$
$\sigma_0 = 1{,}1_0$ $\eta = 38{,}6_5$ $E_5 = 14{,}4_5 \cdot 10^{-8}$

Im Mittel $\underline{E_5 = 14{,}4_9 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_5 = 6{,}9_0 \cdot 10^6}$

VI. No. 1 $B = 4{,}90$ $D = 0{,}493$ $P = S + 20$
$L = 26{,}1$ $\sigma = 38{,}7_5$ $38{,}3_5$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 5{,}6_5$ $5{,}6_5$
$\sigma_0 = 1{,}0_5$ $\eta = 37{,}3_5$ $E_6 = 10{,}6_8 \cdot 10^{-8}$

No. 2 $B = 4{,}89$ $D = 0{,}491_5$ $P = S + 20$
$L = 26{,}1$ $\sigma = 38{,}3_5$ $39{,}2_5$[1]) $L = 13{,}1$ $\sigma = 5{,}7_5$ $5{,}7_5$
$\sigma_0 = 1{,}0_0$ $\eta = 37{,}6_5$ $E_6 = 10{,}6_4 \cdot 10^{-8}$

Im Mittel $\underline{E_6 = 10{,}6_5 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_6 = 9{,}3_8 \cdot 10^6}$

---

1) Der abnorm große (wiederholt verifizierte) Wert war ersichtlich durch eine Unregelmäßigkeit in der Gestalt der einen Auflagefläche des Stäbchens nahe dessen Ende bedingt.

Aus diesen Werten folgt gemäß (4)

$$
\begin{gathered}
s_{11} = 6{,}8_4 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{22} = 12{,}8_9 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{33} = 11{,}9_7 \,.\, 10^{-6}, \\
s_{44} + 2 s_{23} = 19{,}1_5 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{55} + 2 s_{31} = 39{,}0_9 \,.\, 10^{-6}, \qquad (8) \\
s_{66} + 2 s_{12} = 16{,}9_8 \,.\, 10^{-6}.
\end{gathered}
$$

Mit Hülfe dieser Parameter berechnet sich das Gesetz des allgemeinen Dehnungsmoduls E nach Formel (1). Zu seiner Veranschaulichung sind in Fig. 1 die Haupt-Schnittkurven der Oberfläche,

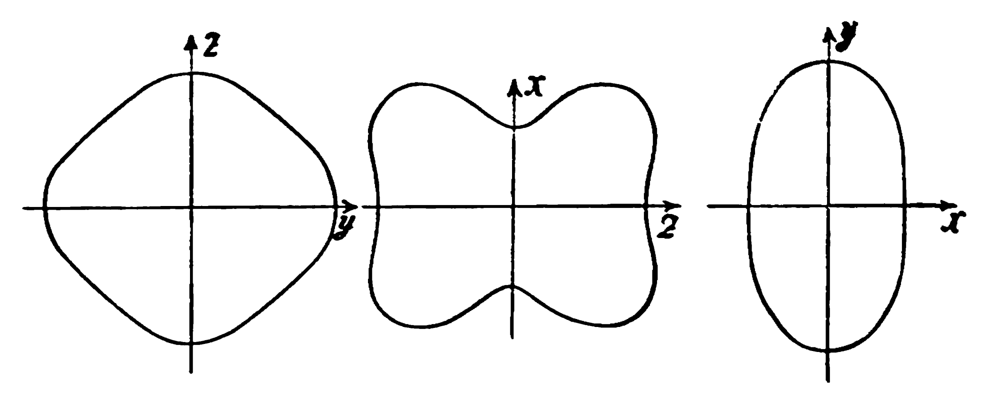


Fig. 1.

die entstehen, wenn man E als Vektor vom Koordinatenanfang aufträgt, wiedergegeben.

Die Kurve in der YZ-Ebene zeigt Maxima von E in den Koordinatenaxen, Minima in Richtungen, die mit der $\pm Y$-Axe die Winkel von (rund) $\pm 49^{0}\,40'$ einschließen; die entsprechenden Minimalwerte von E sind etwa gleich $10{,}9_6 \,.\, 10^{-6}$.

Die Kurve in der ZX-Ebene ergibt in der Richtung der Koordinatenaxen Minima für E; die Maxima von der ungefähren Größe $14{,}8_1 \,.\, 10^{-6}$ schließen mit der $\pm Z$-Axe die Winkel von etwa $37^{0}\,40'$ ein.

Die Kurve in der XY-Ebene ergibt ein Minimum für E in der X-, ein Maximum in der Y-Axe; dazwischen liegt kein Extremwert. Es sind dieselben drei Typen von Schnittkurven, die auch Baryt geliefert hat[1]).

In den Mittellinien der Oktanten ($\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$, $\beta = \pm \sqrt{3}$, $\gamma = \pm 1/\sqrt{3}$) besitzt E den Wert $11{,}8_8 \,.\, 10^{-6}$, aus dem zu schließen ist, daß innerhalb der Oktanten absolute Maxima und Minima von E nicht liegen.

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1887, No. 19; Wied. Ann. 34, 981, 1888.

Die Drillungsbeobachtungen. Auch über die Methode der Drillungsbeobachtungen ist an anderer Stelle[1]) ausführlich berichtet worden. Die Versuche waren nicht ohne Schwierigkeit infolge der leichten Zerbrechlichkeit der Präparate. Die Kristallstäbchen von noch nicht 0,5 mm Dicke mußten eingespannt und zentriert werden; darauf waren die Spiegelfassungen auf den Stäbchen festzuklemmen. Namentlich die Stäbchen der Gattungen I und II erwiesen sich als äußerst hinfällig; da die Gattung II aber nach (6) und (3) mit III′ übereinstimmende Drillungsmoduln T liefert, so konnte von ihrer Verwendung schließlich abgesehen werden. Die Stäbchen I gestatteten trotz ihrer geringen Länge (die durch Abspringen von Stücken an den Enden zum Teil noch reduziert wurde) schließlich doch einige gute Beobachtungsreihen; ihr Resultat ist ein Wert für T_1, dessen Sicherheit nicht allzu stark hinter denjenigen der leichter zu beobachtenden T_3 und T_3' zurücksteht.

In der folgenden Zusammenstellung bezeichnen B, D, L wie oben die Dimensionen des beobachteten Stäbchens; P ist das drillende Gewicht in Grammen, S das Gewicht der Schaale dabei $= 11{,}52$. Die Zahlen τ geben die Größen der beobachteten Drillungen in Millimetern der Skala, die 220 cm von der Drehaxe entfernt war; je eine bezieht sich auf eine Drehung des rechten, eine auf eine Drehung des linken Stäbchenendes während das andere festgehalten war, und bildet den Mittelwert aus 3—4 sehr genau übereinstimmenden Ablesungen. Bei diesen beiden Beobachtungen war der Hebelarm, an dem P wirkte, nicht genau gleich und darauf beruht ein Teil der Abweichung der beiden Zahlen; der mittlere Wert des Hebels war 36,9 mm.

Drillungen.

I. No. 1	$B = 4{,}99$		$D = 0{,}487_5$	$L = 11{,}24$
$P = S$	$\tau = 26{,}8_0$	$27{,}1_0$	$T_1 = 22{,}6_5 \,.\, 10^{-8}$	
$P = S + 5$	$\tau = 38{,}4_0$	$38{,}5_0$	$T_1 = 22{,}5_8 \,.\, 10^{-8}$	
No. 2	$B = 5{,}00$		$D = 0{,}488$	$L = 14{,}25$
$P = S$	$\tau = 35{,}4_0$	$35{,}5_0$	$T_1 = 23{,}6_0 \,.\, 10^{-8}$	
No. 3	$B = 4{,}92_5$		$D = 0{,}490$	$L = 11{,}79$
$P = S$	$\tau = 28{,}8$		$T_1 = 23{,}0_4 \,.\, 10^{-8}$	
$P = S + 5$	$\tau = 41{,}4_5$	$41{,}0_5$	$T_1 = 22{,}9_4 \,.\, 10^{-8}$	
Im Mittel	$\underline{T_1 = 22{,}9_5 \,.\, 10^{-8}}$		$\underline{T = 4{,}36 \,.\, 10^{6}}$	

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7, 189, 1875.

Der für No. 2 gefundene Wert T_1 ist auffallend groß, so daß man an Störungen der Beobachtung denken möchte. Leider zerbrach das Stäbchen bei dem Versuch, die Messung zu wiederholen. Da mit No. 1 und 3 je *zwei* Beobachtungen durchführbar waren, so kommt No. 2 beim Nehmen des Mittels von selbst zu geringerem Einfluß.

III. No. 1 $B = 4{,}92$ $D = 0{,}488_5$ $L = 24{,}22$
$P = S$ $\tau = 95{,}6$ $95{,}3$ $T_3 = 38{,}0_8 \,.\, 10^{-8}$
No. 2 $B = 5{,}38$ $D = 0{,}473$ $L = 20{,}70$
$P = S$ $\tau = 81{,}7$ $82{,}6$ $T_3 = 38{,}3_5 \,.\, 10^{-8}$
No. 3 $B = 5{,}39$ $D = 0{,}474$ $L = 19{,}24$
$P = S$ $\tau = 75{,}6$ $75{,}6$ $T_3 = 38{,}3_0 \,.\, 10^{-8}$
Im Mittel $\underline{T_3 = 38{,}2_4 \,.\, 10^{-8}}$ $\underline{T = 2{,}61 \,.\, 10^{6}}$

III′. No. 1 $B = 4{,}92$ $D = 0{,}490_5$ $L = 23{,}12$
$P = S$ $\tau = 58{,}7$ $58{,}3$ $T_3' = 23{,}9_5 \,.\, 10^{-8}$
$P = S + 5$ $\tau = 84{,}1$ $82{,}5$ $T_3' = 23{,}7_8 \,.\, 10^{-8}$
No. 2 $B = 5{,}41$ $D = 0{,}475_5$ $L = 16{,}50$
$P = S$ $\tau = 41{,}3_5$ $40{,}8$ $T_3' = 23{,}8_9 \,.\, 10^{-8}$
$P = S + 5$ $\tau = 58{,}5_5$ $58{,}2$ $T_3' = 23{,}6_4 \,.\, 10^{-8}$
Im Mittel $\underline{T_3' = 23{,}8_2 \,.\, 10^{-8}}$ $\underline{T_3' = 4{,}20 \,.\, 10^{6}}$.

Da T_1 mit T_{ab}, T_3 mit T_{ca}, T_3' mit T_{cb} identisch ist, so ergeben die vorstehenden Zahlen unmittelbar auch s_{44}, s_{55}, s_{66}, und die Kombination dieser Resultate mit denen der Biegungsbeobachtungen (8) liefern das folgende vollständige System von Elastizitätsmoduln des Aragonites

$$
9)\quad \begin{aligned}
s_{11} &= 6{,}8_4 . 10^{-8}, & s_{22} &= 12{,}8_9 . 10^{-8}, & s_{33} &= 11{,}9_7 . 10^{-8},\\
s_{44} &= 23{,}8_2 . 10^{-8}, & s_{55} &= 38{,}2_4 . 10^{-8}, & s_{66} &= 22{,}9_5 . 10^{-8},\\
s_{23} &= -\,2{,}3_3 . 10^{-8}, & s_{31} &= +\,0{,}4_2 . 10^{-8}, & s_{12} &= -\,2{,}9_8 . 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Das positive Vorzeichen von s_{31} hat die Bedeutung, daß ein parallel der X- oder der Z-Axe geschnittener Zylinder sich bei einer Längsdehnung nach der Richtung der Z- oder X-Axe (quer) nicht kontrahiert, sondern *dilatiert*. Dies Resultat geht den bei Pyrit[1]) und Natriumchlorat[2]) gefundenen einigermaßen parallel; indessen sind *hier* die in den genannten Anordnungen nach der Y-Richtung stattfindenden *Kontraktionen* so bedeutend, daß der Gesamtquerschnitt bei Längsdehnung doch *verkleinert* wird.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **35**, 649, 1888.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **49**, 719, 1893.

Das allgemeine Gesetz (5) von T läßt sich, als zwei Richtungen enthaltend, nicht durch eine Oberfläche veranschaulichen; dies geht indessen bezüglich des Torsionsmoduls T° für einen Kreiszylinder, der mit den Richtungskosinus der Zylinderaxe durch die Formel verbunden ist:

$$
\begin{aligned}
\text{10)}\qquad T^{0} = {} & \alpha^2 (s_{55} + s_{66}) + \beta^2 (s_{66} + s_{44}) + \gamma^2 (s_{44} + s_{55}) \\
& + 4\beta^2 \gamma^2 (s_{22} + s_{33} - s_{44} - 2 s_{23}) \\
& + 4\gamma^2 \alpha^2 (s_{33} + s_{11} - s_{55} - 2 s_{31}) \\
& + 4\alpha^2 \beta^2 (s_{11} + s_{22} - s_{66} - 2 s_{12}).
\end{aligned}
$$

Nach den obigen Zahlwerten nimmt dieselbe die Form an

$$
\begin{aligned}
\text{11)}\qquad T^{0} = {} & 61{,}2 . \alpha^2 + 46{,}8 . \beta^2 + 62{,}0\, \gamma^2 \\
& + 22{,}8\, \beta^2 \gamma^2 - 81{,}1 . \gamma^2 \alpha^2 + 11{,}0\, \alpha^2 \beta^2
\end{aligned}
$$

oder auch mit (1) konform

$$
\begin{aligned}
\text{12)}\qquad T^{0} = {} & 61{,}2\, \alpha^4 + 46{,}8\, \beta^4 + 62{,}0\, \gamma^4 \\
& + 131{,}7\, \beta^2 \gamma^2 + 42{,}1\, \gamma^2 \alpha^2 + 119{,}0\, \alpha^2 \beta^2 .
\end{aligned}
$$

Die Schnittkurven der T°-Oberfläche mit den Koordinatenebenen sind in Fig. 2 dargestellt; der Maßstab ist 1/5 desjenigen von Fig 1.

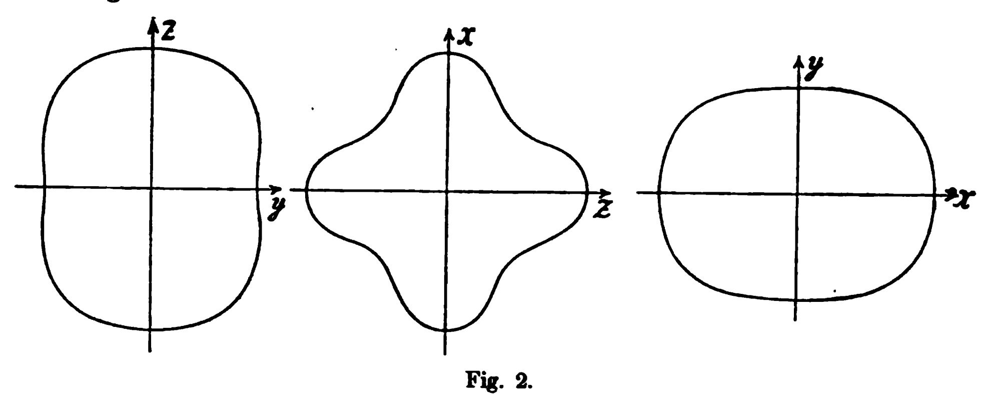


Fig. 2.

Einige Folgerungen. Bei allseitig gleichem Druck $p = 1$ Gramm pro mm² kontrahieren sich die Längeneinheiten parallel den Koordinatenaxen um

$$\text{13)}\quad A_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_2 = s_{21} + s_{22} + s_{23}, \quad A_3 = s_{31} + s_{32} + s_{33};$$

die Volumeneinheit verkleinert sich um

$$\text{14)}\qquad M = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{23} + s_{31} + s_{12}).$$

Bei Aragonit ist

$$A_1 = 4{,}2_8 . 10^{-8}, \quad A_2 = 7{,}5_8 . 10^{-8}, \quad A_3 = 10{,}0_8 . 10^{-8}, \qquad 15)$$
$$M = 21{,}9_2 . 10^{-8};$$

die Unterschiede der A_h sind sehr bedeutend, demgemäß werden sich auch die Winkel eines Aragonitkristalles bei allseitig gleichem Druck erheblich ändern.

Die Modulwerte des Aragonits lassen sich mit denen des Kalkspats[1]) nicht direkt vergleichen, da beide Kristalle verschiedenen Systemen angehören; immerhin ist eine Zusammenstellung der oben gegebenen Zahlen mit den für Kalkspat gültigen nicht ganz ohne Interesse. Ich fand für Kalkspat

$$s_{11} = 11{,}14 . 10^{-8} = s_{22}, \quad s_{33} = 17{,}13 . 10^{-8},$$
$$s_{44} = 39{,}52 . 10^{-8} = s_{55}, \quad s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) = 49{,}62 . 10^{-8},$$
$$s_{23} = -4{,}24 . 10^{-8} = s_{31}, \quad s_{12} = -3{,}67 . 10^{-8}.$$

Natürlich ist es zunächst willkürlich, irgend welche Koordinatenaxen beider Körper in Beziehung zu einander zu setzen; doch kann man nach der Größenfolge der Moduln beiläufig X, Y, Z bei Kalkspat dem X, Z, Y bei Aragonit zuordnen. Es sind dann alle Moduln bei Kalkspat etwas größer, als die entsprechenden bei Aragonit; Kalkspat hat also kleinere elastische Widerstände, als Aragonit, was einigermaßen überraschend wirkt, da Kalkspat als die bei gewöhnlicher Temperatur stabile Modifikation gilt. Mit dem kleineren elastischen Widerstand besitzt Kalkspat übrigens auch das kleinere spezifische Gewicht; für ihn wird 2,714, für Aragonit 2,936 als normaler Wert betrachtet. Auch die Härte ist bei Aragonit etwas größer, als bei Kalkspat.

Eine theoretische Verwertung der Modulzahlen beider Kristalle setzt vor allen Dingen die Kenntnis des physikalischen Zusammenhanges der Richtungen in beiden Kristallen voraus, resp. — was auf dasselbe hinauskommt — diejenige des Mechanismus der Umwandlung der einen Modifikation in die andere, — ähnlich wie man die geometrischen Verhältnisse bei den Schiebungen nach Gleitflächen kennt. Vorläufig weiß man darüber, soweit mir bekannt, nichts. Daß sich aber, wie oben beiläufig angenommen ist, in Wirklichkeit die Koordinatenaxen in beiden Kristallen einander physikalisch entsprächen, darf als ausgeschlossen betrachtet werden. Der nächst liegende Zusammenhang, auf den die Gegenüberstellung eines rhombischen und eines rhomboedrischen Raumgitters hin-

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1889, No. 19; Wied. Ann. 39, 412, 1890.

weist, ist offenbar der, daß die Kanten des einen zu Kanten des andern werden.

Für die **Elastizitätskonstanten** eines rhombischen Kristalles gelten folgende Formeln, wobei

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \sigma \text{ gesetzt ist:}$$

$$16)\qquad c_{11} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix}, \quad c_{33} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}$$

$$c_{23} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{11} & s_{12} \end{vmatrix}, \quad c_{31} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{23} & s_{21} \\ s_{33} & s_{31} \end{vmatrix}$$

$$c_{44} = 1/s_{44}, \quad c_{55} = 1/s_{55}, \quad c_{66} = 1/s_{66}.$$

Hieraus folgen für Aragonit die folgenden Konstantenwerte

$$17)\qquad \begin{aligned} c_{11} &= 16{,}3 \,.\, 10^6, & c_{22} &= 8{,}9 \,.\, 10^6, & c_{33} &= 8{,}6_5 \,.\, 10^6 \\ c_{44} &= 4{,}3_6 \,.\, 10^6, & c_{55} &= 2{,}6_1 \,.\, 10^6, & c_{66} &= 4{,}2_0 \,.\, 10^6 \\ c_{23} &= 1{,}6_0 \,.\, 10^6, & c_{31} &= 0{,}1_7 \,.\, 10^6, & c_{12} &= 3{,}8_0 \,.\, 10^6. \end{aligned}$$

Die sog. Poissonsche Relation, die aus der Annahme fließt, daß zwischen den Molekülen Zentralkräfte wirken, die nur Funktionen der Entfernung sind, verlangt, daß

$$c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}$$

ist; ihre Nichterfüllung zeigt, daß auch bei Aragonit die Moleküle stark polare Kräfte auf einander ausüben.

Alle c_{23}, c_{31}, c_{12} sind positiv, trotz des positiven s_{31}; das elastische Verhalten des Aragonit erscheint also als völlig normal, wenn schon die außerordentliche Kleinheit von c_{31} auffallend ist. —

Einige weitere Resultate ergeben sich aus der Kombination der vorstehenden Konstantenwerte mit den von Fizeau für Aragonit erhaltenen Größen der thermischen Dilatationskoeffizienten parallel den Hauptaxen, welche bei 20° C lauten

$$a_1 = 10{,}0 \,.\, 10^{-6}, \quad a_2 = 16{,}4 \,.\, 10^{-6}, \quad a_3 = 34{,}0 \,.\, 10^{-6}.$$

Aus ihnen bestimmen sich nämlich die Drucke q_1, q_2, q_3, welche auf ein mm² normal zu den Hauptaxen normal ausgeübt werden müssen, um die bei einer Temperatursteigerung um 1° C eintretenden Dilatationen aufzuheben, gemäß den Formeln

$$q_1 = a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + a_3 c_{13}, \quad q_2 = a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + a_3 c_{23},$$
$$q_3 = a_1 c_{31} + a_2 c_{32} + a_3 c_{33}.$$

Die Berechnung liefert für Aragonit

$$q_1 = 231, \quad q_2 = 239, \quad q_3 = 222$$

gr pro mm², d. h. also resp. 23,1 23,9 und 22,2 Atmosphären. Die Zahlen liegen den für Topas geltenden sehr nahe und übersteigen weit die Kalkspat zugehörigen $q_1 = q_2 = 20$, $q_3 = 163$. Sehr bemerkenswert ist, daß sie (im Gegensatz zu dem bei Kalkspat geltenden) sich sehr wenig von einander unterscheiden; es läßt sich also bei Aragonit die thermische Deformation sehr vollständig durch einen allseitig gleichen Druck kompensieren.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß die vorstehenden Zahlen auch die adiabatischen Elastizitätskonstanten γ_{hk} und -moduln σ_{hk} zu berechnen gestatten; für diese gilt nämlich, wenn Θ die absolute Temperatur, A das mechanische Wärmeäquivalent, ε die Dichte, c die (gewöhnliche) spezifische Wärme des Kristalles bedeutet,

$$\gamma_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k \Theta}{A \varepsilon c}, \quad \sigma_{hk} = s_{hk} - \frac{a_h a_k \Theta}{A \varepsilon c}.$$

Zugleich bestimmt sich die Differenz der spezifischen Wärme bei konstanten Spannungen und bei konstanten Deformationen zu

$$c_p - c_d = \frac{\Theta}{A \varepsilon} \Sigma q_h a_h.$$

Die Angabe der für Aragonit hieraus folgenden Zahlen mag indessen unterbleiben.

Göttingen, im März 1907.

Ueber Interpolation durch Exponential-Funktionen.

Von

Heinrich Burkhardt in Zürich.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. März 1907.

Physikalische Untersuchungen führen oft auf die Aufgabe, beobachtete Werte einer Variabeln x, Funktion von t, durch einen Ausdruck der Form darzustellen:

$$x = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t} + Ce^{-\nu t} + \ldots \tag{1}$$

in der nicht nur die Koeffizienten A, B, C, ..., sondern auch die in den Exponenten auftretenden Faktoren λ, μ, ν ... Unbekannte sind, die man den Beobachtungen gemäß bestimmen will. Für den Fall, daß die beobachteten Werte der unabhängigen Variabeln t äquidistant sind, kann man diese Aufgabe durch ein Verfahren lösen, das ich für einen dreigliedrigen Ausdruck auseinandersetzen will; man sieht ohne weiteres, daß es allgemein anwendbar ist.

$$\begin{array}{lllllll} \text{Sei:} & x = x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots . \\ \text{für} & t = 0 & \delta & 2\delta & 3\delta & \ldots .; \end{array}$$

ich setze zur Abkürzung:

$$e^{-\lambda\delta} = u, \; e^{-\mu\delta} = v, \; e^{-\nu\delta} = w, \tag{2}$$

also

$$x_k = Au^k + Bv^k + Cw^k \tag{3}$$

und bilde die Determinanten:

$$\Delta_{klm} = \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} & x_{k+2} \\ x_l & x_{l+1} & x_{l+2} \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{vmatrix} \tag{4}$$

unter k, l, m nicht negative ganze Zahlen verstanden, die der Bedingung $k < l < m$ unterliegen mögen. [Für die numerische Berechnung berücksichtigt man wohl zweckmäßigerweise die Relation:

$$\begin{aligned} x_{l+1}\,\Delta_{klm} = {} & (x_k x_{l+1} - x_{k+1} x_l)(x_{l+1} x_{m+2} - x_{l+2} x_{m+1}) \\ & - (x_{k+1} x_{l+2} - x_{k+2} x_{l+1})(x_l x_{m+1} - x_{l+1} x_m).] \end{aligned} \qquad 5)$$

Indem man diese Determinanten nach Potenzen von A, B, C entwickelt, erkennt man, daß alle mit A^2 oder $A^2B, \ldots$ multiplizierten Glieder sich wegheben, und daß der Faktor von $A\,B\,C$ sich als Produkt der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u^{l-k} & v^{l-k} & w^{l-k} \\ u^{m-k} & v^{m-k} & w^{m-k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u^k & v^k & w^k \\ u^{k+1} & v^{k+1} & w^{k+1} \\ u^{k+2} & v^{k+2} & w^{k+2} \end{vmatrix} \qquad 6)$$

darstellen läßt. Jede von diesen ist bekanntlich durch

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} \qquad 7)$$

teilbar; alle die Δ_{klm} sind also durch Δ_{012} teilbar, und die Quotienten sind symmetrische Funktionen von u, v, w. Z. B. ist:

$$\begin{aligned} \Delta_{013} &= (u + v + w)\,\Delta_{012}, \\ \Delta_{023} &= (uv + vw + wu)\,\Delta_{012}, \\ \Delta_{123} &= uvw\,\Delta_{012}. \end{aligned} \qquad 8)$$

Damit kann man die Gleichung aufstellen, von der u, v, w die Wurzeln sind:

$$\Delta_{012}\,u^3 - \Delta_{013}\,u^2 + \Delta_{023}\,u - \Delta_{123} = 0. \qquad 9)$$

Sind die u, v, w einmal bestimmt, so bietet die Bestimmung der A, B, C keine Schwierigkeit mehr; nur ist für den Fall, daß zwei oder drei der u, v, w einander gleich ausfallen, die Formel (1) durch

$$x = (A + Bt)\,e^{-\lambda t} + Ce^{-\nu t} \qquad 10)$$

oder durch

$$x = (A + Bt + Ct^2)\,e^{-\lambda t} \qquad 11)$$

zu ersetzen.

Ergeben sich alle Koeffizienten der Gleichung (9) als null, sodaß die Gleichung illusorisch wird, so lassen sich die Beobachtungen durch eine Formel derselben Art mit geringerer Gliederzahl ausdrücken.

Die Methode setzt nicht voraus, daß λ, μ, ν reell seien; sie kann also nicht nur zur Diskussion von Beobachtungen von reinen

Abklingungserscheinungen, sondern auch zu der von Beobachtungen superponierter gedämpfter Schwingungen dienen. Ich will nur noch die expliziten Formeln für den Fall einer einfachen gedämpften Schwingung angeben; ist

$$x_k = e^{-k\lambda} (A \cos k\mu + B \sin k\mu), \quad (k = 0, 1, 2, 3) \qquad 12)$$

so ergibt sich:

$$e^{-2\lambda} = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_0 x_2 - x_1^2}, \qquad 2e^{-\lambda} \cos \mu = \frac{x_0 x_3 - x_1 x_2}{x_0 x_2 - x_1^2} \qquad 13)$$

Nachträglich erfahre ich von Herrn Hurwitz, daß Gleichungssysteme der Form (3) noch bei zwei ganz anderen Problemen auftreten: nämlich einmal bei Darstellung einer binären Form ungeraden Grades durch eine Summe von Potenzen (am bequemsten zugänglich bei Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen, nr. 168, p. 198), dann bei einer Methode mechanischer Quadratur (Heun, Programm Berlin 1892). Sie werden dort auch im wesentlichen ebenso gelöst wie hier. Immerhin mag die hier vorliegende Anwendung eine elementare Darstellung des Lösungsverfahrens rechtfertigen. — Die Frage nach der Analyse von Beobachtungen superponierter gedämpfter Schwingungen hat mir vor längerer Zeit Herr Scripture vorgelegt.

Ueber einige Eigenschaften des Radiumatomes

von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. März 1907.

I. Wandlungsconstante und mittlere Atomdauer.

Zur Bestimmung der Wandlungsconstanten des Radiums und damit der mittleren Lebensdauer seiner Atome bieten sich drei Wege von sehr verschiedenen Graden der Sicherheit dar. Der erste benützt das Volumen der entwickelten Emanation, der zweite die durch die α-Strahlen bedingte Wärmeentwicklung, der dritte die mit den β-Strahlen ausgesandte Elektricitätsmenge. Die auf der Wärmeentwicklung beruhende Rechnung ist meines Wissens bisher noch nicht ausgeführt worden.

Die erste Rechnung, welche auf dem von Ramsay gemessenen Volumen der Emanation beruht, läßt sich in folgender Weise führen. Bei normalem Drucke und bei normaler Temperatur sei v das Volumen der Emanation, welche 1 g *Ra* in einer Sekunde aussendet. Ist r das Atomgewicht des *Ra*, so ist das von einem Grammatom in einer Sekunde entwickelte Volumen unter gleichen Voraussetzungen gleich rv. Multiplicieren wir dieses Volumen mit der Zahl von Gasmolekülen, die unter normalen Verhältnissen in einem ccm enthalten sind, so erhalten wir die Zahl von Emanationsatomen, die von einem Grammatom *Ra* in einer Sekunde entwickelt werden. Nehmen wir an, daß jedes Radiumatom bei seinem Zerfall nur ein Emanationsatom entwickle, so haben wir damit auch die Zahl der Radiumatome, die von einem Grammatome in einer Sekunde zerfallen. Die Zahl der Gasmoleküle aber, die sich unter normalen Verhältnissen in 1 ccm befinden, berechnen wir in folgender Weise. Es bezeichne a die Anzahl der wirklichen Atome im Grammatom, oder der wirklichen Mole-

küle im Grammmolekül; dann sind in 2 g Wasserstoff a wirkliche Moleküle enthalten. Ist s das specifische Gewicht des H, so ist das specifische Volumen gleich $1/s$; folglich das Volumen von 2 g H gleich $2/s$. Die Zahl der darin enthaltenen Wasserstoffmoleküle beträgt a; somit die Zahl der in einem Volumen von rv ccm enthaltenen $\frac{1}{2}\, arsv$. Ebenso groß ist aber auch die in demselben Raume enthaltene Zahl von Emanationsatomen, wenn wir die Emanation als ein einatomiges Gas betrachten. Wir kommen somit zu dem Schlusse, daß von einem Grammatom Ra, d. h. von a wirklichen Atomen in einer Sekunde eine Zahl von $\frac{1}{2}\, arsv$ Atomen zerfällt. Die Wandlungsconstante des Ra wird also mit Bezug auf die Sekunde als Zeiteinheit gleich

$$\frac{1}{2}\, rsv.$$

Hier ist: $r = 225$; $s = 0{,}0000898$; v nach Ramsay $= 3.10^{-9}$. Somit ergibt sich für die Wandlungsconstante:

$$\lambda = 0{,}303 \,.\, 10^{-10}.$$

Für die mittlere Atomdauer ergibt sich daraus eine Zeit von 1040 Jahren.

Die Richtigkeit der gefundenen Formel läßt sich noch einfacher beweisen. Wir denken uns auch das Grammatom Radium im Zustande eines einatomigen Gases. Dann ist sein Volumen bei normalen Verhältnissen des Drucks und der Temperatur gleich $2/h$. Bei zwei einatomigen Gasen verhalten sich aber die Zahlen von Atomen, die unter normalen Verhältnissen in zwei verschiedenen Volumen enthalten sind, wie diese Volumina selber. Es verhält sich also die Zahl der in einer Sekunde von einem Grammatom Radium entwickelten Emanationsatome zu der Zahl der Radiumatome wie $rv : 2/h$; daraus folgt dann der im Vorhergehenden angegebene Ausdruck für die Wandlungsconstante des Radiums.

Der zweite Weg zur Berechnung der Wandlungsconstante des Ra beruht auf der Betrachtung der Wärmeentwicklung. Nach Precht kann die von 1 g Ra in einer Stunde entwickelte, mit dem Eiscalorimeter gemessene Wärmemenge nicht über 134,4 g-cal gesteigert werden; man erhält diese Zahl, wenn man das Radium mit einem 3 mm dicken Bleimantel umgibt. Läßt man den Bleimantel weg, so sinkt die entwickelte Wärmemenge auf 122,2 g-cal pro g Ra und pro Stunde. Man wird annehmen, daß die Differenz von 12,2 cal durch die Absorption der durchdringenden β-Strahlen in dem Bleimantel bedingt sei. Mit Bezug auf die übrigbleibende Wärme machen wir die Annahme, daß sie von der Absorption der

α-Strahlen im Inneren des Präparates selber und in den dasselbe umgebenden Hüllen herrühre. Wir drücken nun die von einem g *Ra* entwickelte Wärmemenge aus in *erg* und beziehen sie auf die *sec* als Zeiteinheit. Bezeichnen wir dann mit W die Energie, die von einem g *Ra* in einer *sec* in der Form von α-Strahlen entwickelt wird, so ergibt sich:

$$W = 1{,}42 \,.\, 10^6 \frac{erg}{sec}.$$

Die von einem g-Atom *Ra* unter gleichen Voraussetzungen entwickelte Wärmemenge ist dann gleich $r\,W$. Es sei nun μ die Masse eines α-Ions, v seine Geschwindigkeit, dann ist seine kinetische Energie gleich $\frac{1}{2}\,\mu\,v^2$. Die gesamte Zahl von α-Ionen, die von 1 g-Atom *Ra* in einer *sec* ausgeschleudert werden, sei n; dann ergibt sich für die von einem g-Atom *Ra* in einer *sec* entwickelte kinetische Energie der zweite Ausdruck: $\frac{1}{2}\,n\,\mu\,v^2$. Wir erhalten somit zur Bestimmung von n die Gleichung:

$$n = \frac{2r\,W}{\mu\,v^2}.$$

Im Zustande des radioactiven Gleichgewichtes kommen nun auf je ein zerfallendes Radiumatom 5 ausgesandte α-Ionen. Die Zahl der Radiumatome, die in einem g-Atom *Ra* in einer *sec* zerfallen, ist somit gleich $n/5$. Ist wieder wie früher a die Zahl der wirklichen Atome in einem Grammatome, so ergibt sich für die Wandlungsconstante der Ausdruck:

$$\lambda = 0{,}4\,\frac{r\,W}{a\,\mu\,v^2}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck noch dadurch umgestalten, daß wir in Zähler und Nenner mit dem elektrischen Elementarquantum ε multiplizieren; wir erhalten dann im Nenner das Produkt $a\,\varepsilon$; dieses aber ist nichts anderes, als die elektrostatische Ladung des g-Ions. Bezeichnen wir diese durch A, so ist:

$$a\,\varepsilon = A = 2{,}90 \,.\, 10^{14}.$$

Die Formel füt λ wird mit Benützung der Größe A:

$$\lambda = 0{,}4\,\frac{r\,W\,\varepsilon}{A\,\mu\,v^2}.$$

Die Schwierigkeit der Rechnung liegt nun darin, daß das Produkt $\mu\,v^2$ nicht mit genügender Sicherheit bekannt ist.

Nach Des Coudres ist bei den α-Strahlen des *Ra*:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 192 \,.\, 10^{12},\ v = 1{,}65 \,.\, 10^{9},\ \mu v^2 = 14200 \,.\, \varepsilon.$$

Daraus folgt für die Wandlungsconstante des *Ra* der Wert:

$$\lambda = \frac{0{,}4\ r W}{2{,}90 \,.\, 10^{14} \,.\, 14200} = 0{,}31 \,.\, 10^{-10}$$

entsprechend einer mittleren Atomdauer von 1030 Jahren, ein Wert, der mit dem früher erhaltenen Resultate in guter Uebereinstimmung steht.

Nach Rutherford ist:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 160 \,.\, 10^{12},\ v = 1{,}87 \,.\, 10^{9},\ \mu v^2 = 21900 \,.\, \varepsilon.$$

Für die Wandlungsconstante folgt daraus der Wert:

$$\lambda = 0{,}20 \,.\, 10^{-10},$$

entsprechend einer mittleren Atomdauer von 1590 Jahren.

Ein dritter Weg, den man eingeschlagen hat, um die Wandlungsconstante des Radiums zu bestimmen, beruht auf einer Messung von W. Wien. Er hatte 4 mg $RaBr_2$, umschlossen von einer Aluminiumhülle und von einer zugeschmolzenen Glasröhre, in einer zweiten vollkommen evakuierten Glasröhre aufgehängt. Die durchdringenden β-Strahlen konnten die Hülle frei passieren, sie führten eine gewisse Menge negativer Elektricität mit sich fort, und das Präparat blieb mit einer entsprechenden positiven Ladung zurück. Mit Hülfe von eingeschmolzenen Platindrähten wurde diese positive Ladung durch einen großen Widerstand hindurch nach der Erde abgeleitet. Das Potential am Anfange des Widerstandes wurde gemessen, und durch Division mit dem Widerstand der Strom bestimmt. Wir wollen die Elektricitätsmenge, welche 1 g *Ra* in einer *sec* in den durchdringenden β-Strahlen aussendet, bezeichnen mit E; dann ergibt sich aus den Messungen Wien's unmittelbar: $E = 3{,}76$ elektrostatischen Einheiten. Diese Zahl kann nun aber aus einem doppelten Grunde zu klein sein. Einmal wird in der ganzen Umgebung des Präparates die Luft durch die β-Strahlen leitend gemacht; es ist also nicht wahrscheinlich, daß die Entladung der in Freiheit gesetzten positiven Elektricität ausschließlich durch den gemessenen Widerstand hindurch erfolge. Zweitens ist auch die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß ein Teil der β-Strahlen durch die Wände der Glasröhren zurückgehalten werde. Wir tragen diesen Bemerkungen

Rechnung, indem wir die aus den Wien'schen Beobachtungen abgeleitete Zahl mit einem Factor x multiplicieren, wo dann x jedenfalls größer als 1 ist. Die von einem g-Atom *Ra* in einer Sekunde in den β-Strahlen ausgesandte Elektricitätsmenge wird dann mit Benützung der früheren Bezeichnung gleich: xrE, und die Menge von Elektronen, welche 1 Grammatom Radium in einer *sec* aussendet, gleich $\frac{xrE}{\varepsilon}$. So oft aber zwei Elektronen ausgesandt werden, zerfällt ein Atom *Ra*; die Zahl von Radiumatomen, die in einem Grammatom Radium in einer Secunde zerfallen, ist somit: $\frac{xrE}{2\varepsilon}$. Dividieren wir diese Zahl durch die Zahl a der wirklichen Atome im g-Atom, so erhalten wir die Wandlungsconstante. Für diese ergibt sich also der Wert:

$$\lambda = \frac{xrE}{2a\varepsilon}, \text{ oder mit } a\varepsilon = A,\ \lambda = \frac{xrE}{2A}.$$

Nun kann x der Natur der Sache nach nicht kleiner als 1 sein. Wir erhalten also einen unteren Grenzwert für λ, wenn wir $x = 1$ setzen; er ergibt sich zu $\lambda = 0{,}015 \,.\, 10^{-10}$. Dem würde eine mittlere Atomdauer von 21800 Jahren entsprechen. Um auf eine mittlere Atomdauer von etwa 1000 Jahren zu kommen, müßte man dem Factor x etwa den Wert 22 erteilen; daraus folgt, daß die Beobachtungen von Wien für die Berechnung der mittleren Atomdauer kaum benützt werden können.

Die zweite von den im Vorhergehenden ausgeführten Rechnungen besitzt ein besonderes Interesse; sie beruht auf der Annahme, daß die Wärmeentwicklung des Radiums lediglich durch die Absorption der α-Strahlen bedingt werde. Die Übereinstimmung des aus ihr folgenden Wertes der Wandlungsconstanten mit dem aus der Emanationsmenge abgeleiteten liefert eine Bestätigung für die Richtigkeit jener Annahme, die ja vermutungsweise schon lange aufgestellt worden ist.

II. Zur Energie des Radiumatomes.

Nach der gewöhnlichen Auffassung sendet ein Radiumatom bei seinem vollständigen Zerfall 5 α-Ionen und 2 Elektronen aus. Seine Energie erleidet dadurch eine Abnahme, die aus den vorhandenen Angaben leicht zu berechnen ist. Wir bezeichnen die Masse des α-Ions mit μ_α, seine Geschwindigkeit mit v_α, die entsprechenden Werte für die Elektronen mit μ_β und v_β; dann ist die kinetische

Energie, die das Radiumatom bei seinem Zerfalle verliert, gegeben durch:

$$\frac{5}{2} \cdot \mu_\alpha v^2_\alpha + \mu_\beta v^2_\beta.$$

Benützen wir für die Energie der α-Ionen den größeren Wert, der sich aus den Messungen von Rutherford ergibt, so wird:

$$\mu_\alpha v^2_\alpha = 21\,800 \,.\, \varepsilon.$$

Ferner ergibt sich aus den Beobachtungen von Kaufmann für die β-Strahlen des Radiums im Mittel:

$$\mu_\beta v^2_\beta = 1970 \,.\, \varepsilon.$$

Daraus folgt für die von einem Radiumatom bei seinem Zerfall verlorene Energie der Wert:

$$\frac{5}{2} \cdot \mu_\alpha v^2_\alpha + \mu_\beta v^2_\beta = 56\,500 \,.\, \varepsilon.$$

Man kann nun fragen, in welcher Form diese Energie vor dem Zerfall in dem Radiumatom enthalten war. Wir wollen versuchen, in folgender Weise eine gewisse Orientierung über diese Frage zu gewinnen. Wir nehmen an, das Radiumatom bestehe aus einer Verbindung von m α-Ionen und n Elektronen. Wenn m und n verschieden sind, so besitzt das Radiumatom von Hause aus eine gewisse elektrische Ladung; aber selbst wenn dies der Fall ist, werden wir davon nichts merken, denn die überschüssige Ladung wird stets durch äußerlich angelagerte Ionen von entgegengesetztem Vorzeichen kompensiert werden.

Wir machen zunächst die Annahme, die bei dem Zerfall des Atomes frei werdende Energie sei ursprünglich auf sämtliche Componenten des Atoms gleichmäßig verteilt gewesen, und zwar gleichfalls als kinetische Energie. Dann würden, abgesehen von einem durch den Zerfall nicht berührten Energieanteil, die Componenten des Atoms eine mittlere kinetische Energie besessen haben von dem Betrage:

$$56\,500 \cdot \frac{\varepsilon}{m+n}.$$

Wir nehmen weiter an, daß die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie auf die α-Ionen und Elektronen angewandt werden dürfen, welche zu einem Radiumatom verbunden sind. Man kann dann von einer mittleren Temperatur dieser Teilchen sprechen, und kann ihre mittlere kinetische Energie gleich αT setzen, wenn

T die absolute Temperatur bezeichnet. Zur Berechnung dieser Temperatur ergibt sich die Gleichung:

$$T = \frac{56\,500}{m+n} \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Nun ist: $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_h R_h}{\varepsilon}$, wo $\frac{\varepsilon}{\mu_h}$ die specifische Ladung der Wasserstoffionen, R_h die Gasconstante für Wasserstoff bezeichnet. Mit $\frac{\varepsilon}{\mu_h} = 290 \,.\, 10^{12}$ und $R_h = 83 \,.\, 10^6$ ergibt sich:

$$T = 1{,}3 \,.\, 10^{10} \,/\, (m+n).$$

Die Annahme, daß die bei dem Zerfall des Radiumatomes freiwerdende Energie in diesem nur in der Form von kinetischer Energie vorhanden gewesen sei, wird man nach diesem Resultat als wenig wahrscheinlich betrachten müssen, trotz der Zweifel, die man über die zu Grunde gelegte Hypothese hegen kann. Es bleibt nun noch die Annahme übrig, daß jene freiwerdende Energie von Hause aus die Form von potentieller Energie besessen habe. Wir bezeichnen unter dieser Voraussetzung die mittlere reciproke Entfernung der α-Ionen mit t_α, die der Elektronen mit t_β, endlich den Mittelwert der wechselseitigen Entfernung der Ionen und Elektronen mit t; dann ergibt sich, wenn m und n groß gegen 1, für den ursprünglichen Wert der potentiellen Energie des Radiumatoms der Wert: $\frac{1}{2}\, m^2 \varepsilon^2 t_\alpha + \frac{1}{2}\, n^2 \varepsilon^2 t_\beta - m n \varepsilon^2 t$. Durch den Zerfall wird die Zahl der α-Ionen um 5, die Zahl der Elektronen um 2 vermindert. Nach dem Zerfall hat das Potential somit den Wert:

$$\tfrac{1}{2}\,(m-5)^2 \varepsilon^2 t_\alpha + \tfrac{1}{2}\,(n-2)^2 \varepsilon^2 t_\beta - (m-5)\,(n-2)\,\varepsilon^2 t.$$

Das Potential nimmt bei dem Zerfall ab; eine Schätzung über den Betrag, um den es sich handelt, gewinnen wir mit Hülfe der Annahme, daß bei der großen Zahl der in Betracht kommenden Teilchen die Mittelwerte der reciproken Entfernungen bei dem Zerfall nicht wesentlich verändert werden. Betrachten wir aber die Werte der t als constant, so ergibt sich für die Abnahme der Energie:

$$\tfrac{5}{2}\,(2m-5)\,\varepsilon^2 t_\alpha + 2\,(n-1)\,\varepsilon^2 t_\beta - (2m+5n-10)\,\varepsilon^2 t.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Werte, den wir oben für die bei dem Zerfalle des Radiumatomes in den α- und β-Strahlen frei werdende Energie gefunden haben, so ergibt sich die folgende Gleichung für die reciproken Entfernungen t:

$$56\,500 = \tfrac{5}{2}\,(2m-5)\,\varepsilon\, t_\alpha + 2\,(n-1)\,\varepsilon\, t_\beta - (2m+5n-10)\,\varepsilon\, t.$$

Um zu einer bestimmten Vorstellung von dem Werte der fraglichen Größen zu gelangen, nehmen wir an, daß die wechselseitigen Entfernungen zwischen Elektronen und Ionen sehr groß seien im Vergleich mit den Entfernungen der Elektronen und Ionen unter sich; wir setzen ferner beispielsweise $m = n = 100$; dann ergibt sich:

$$113\,000 = 975 \,.\, \varepsilon t_\alpha + 396 \,.\, \varepsilon t_\beta,$$

oder, wenn wir auch an Stelle von t_α und t_β einen Mittelwert $\bar{t}$ setzen,

$$113\,000 = 1370 \,.\, \varepsilon \bar{t}.$$

Für die mittlere Entfernung, in der sich im Atom die α-Ionen und die Elektronen je unter sich befinden, ergibt sich dann:

$$\bar{r} = 5{,}7 \,.\, 10^{-12} \text{ cm}.$$

Dabei ist für ε der aus der Planck'schen Theorie folgende Wert $4{,}7 \,.\, 10^{-10}$ benützt, der etwas größer ist, als der experimentell ermittelte. Ferner ist, wie schon erwähnt, mit Bezug auf die Gruppierung der Elektronen und α-Ionen im Atom die Annahme gemacht, daß die wechselseitigen Entfernungen der α-Ionen von den Elektronen sehr groß seien im Vergleich mit den Abständen, welche die Elektronen und Ionen unter sich besitzen. Der gefundene Mittelwert der Entfernung beträgt nahezu das 30fache des Elektronenhalbmessers. Man wird darnach die Vorstellung, daß die bei dem Zerfall des Radiumatomes frei werdende Energie vorher in der Form von potentieller Energie im Atome aufgehäuft gewesen sei, als eine zulässige bezeichnen können. Mit Bezug auf die α-Ionen wird durch die Rechnung die Vermutung nahegelegt, daß sie sich im Radiumatome räumlich in viel engerer Verbindung befinden, als dies nach den Werten der Molekulardurchmesser möglich sein würde.

Eigenartige Fälle schwingender Membranen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1907.

Die Theorie der Schwingungen von Membranen ist ein ausgiebig angebautes Gebiet, und man möchte glauben, daß bezüglich desselben alle Fragen von prinzipieller Bedeutung erledigt sind. Immerhin gibt es darin noch Probleme von eigenartigem Interesse. Auf eines derselben will ich im Folgenden hinweisen.

Beobachtung und Theorie haben bisher meines Wissens nur Fälle behandelt, bei denen die Membran ringsum festgehalten war; indessen sind Fälle möglich, wo Teile des Randes völlig frei sind, ohne daß dabei etwa die Membran spannungslos wäre. Der einfachste Fall dieser Art ist der, wo aus einer ringsum festgehaltenen, ursprünglich gleichförmig gespannten Membran ein Stück herausgeschnitten wird, so daß ein Loch entsteht, z. B., wo aus einer kreisförmigen Membram eine zentrale Kreisfläche beseitigt wird.

Natürlich wird durch einen solchen Ausschnitt die ursprünglich gleichförmige Spannung zu einer ungleichförmigen, und in der Herstellung der letzteren, in einer der Theorie zugänglicher Weise, liegt ein weiteres Interesse dieser Probleme.

Um für derartige Aufgaben die Hauptgleichungen und die Randbedingungen abzuleiten, gehen wir von dem Hamiltonschen Integral aus. Die Ebene der Membran sei die XY-Ebene, die transversale Verrückung sei w, ε bezeichne die Dichte, δ die virtuelle Variation. Dann lautet das Hamiltonsche Integral[1]):

---

1) So. z. B. W. Voigt, Kompendium, Bd. I S. 453, 1895.

$$1)\quad \int_0^{t_1} dt \int dq \Big[\varepsilon\,\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + A_x\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + B_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2A_y\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\,Z\,\delta w\Big] = 0.$$

Hierin sind A_x, B_y, $A_y = B_x$ die in der Mittelfläche der Membran liegenden zeitlich konstanten Spannungen, deren Gesetze wir in den dortigen Deformationsgrößen

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ b_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$a_y = b_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

schreiben

$$-A_x = \gamma a_x + \gamma b_y,\quad -A_y = -B_x = \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma')\,a_y$$
$$-B_y = \gamma' a_x + \gamma b_y.$$

Z ist eine etwaige äußere auf die Flächeneinheit normal ausgeübte Kraft, die wir bei dem Schwingungsproblem gleich Null setzen können. Die teilweise Integration der einzelnen Glieder nach t und x oder y gibt, wenn δw zur Zeit $t = 0$ und $t = t_1$ gleich Null gesetzt wird:

$$-2\int_0^{t_1} dt \int dq \Big[\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial w}{\partial x} + A_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_x\frac{\partial w}{\partial x} + B_y\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big]\delta w$$
$$+2\int_0^{t_1} dt \int ds \Big[\left(\overline{A}_x\frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{A}_y\frac{\overline{\partial w}}{\partial y}\right)\cos(n,x) + \left(\overline{B}_x\frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{B}_y\frac{\overline{\partial w}}{\partial y}\right)\cos(n,y)\Big]\overline{\delta w} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich als Hauptgleichung in bekannter Weise

$$2)\quad \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial w}{\partial x} + A_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_x\frac{\partial w}{\partial x} + B_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0;$$

als Randbedingung folgt entweder

$$3)\qquad \overline{w} = \text{gegeben}$$

oder

$$\left(\overline{A}_x\frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{A}_y\frac{\overline{\partial w}}{\partial y}\right)\cos(n,x) + \left(\overline{B}_x\frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{B}_y\frac{\overline{\partial w}}{\partial y}\right)\cos(n,y) = 0$$

d. h.

$$\overline{A}_n \frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{B}_n \frac{\overline{\partial w}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Da bei fehlenden w-Schwingungen die Membran im Gleichgewicht sein soll, so gilt außerdem

$$0 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}; \tag{5}$$

hinzu als Grenzbedingung, wenn gegen den Rand äußere Kräfte $\overline{A}$, $\overline{B}$ pro Flächeneinheit wirken

$$\overline{A}_n + \overline{A} = 0, \quad \overline{B}_n + \overline{B} = 0, \tag{6}$$

wobei n die äußere Normale bezeichnet.

An den f e s t e n Grenzen der Membran sind $\overline{A}$ und $\overline{B}$ entweder gegeben, oder wenn die longitudinalen Deformationen der Membran vorgeschrieben sind, durch diese bestimmt.

An den f r e i e n Grenzen der Membran sind $\overline{A}$ und $\overline{B}$, und somit durch $\overline{A}_n$ und $\overline{B}_n = 0$; hierdurch wird aber die für die freien Grenzen aus dem Hamiltonschen Integral folgende Grenzbedingung (4) für w identisch erfüllt, d. h., das Hamiltonsche Integral liefert längs der freien Grenze der Membran überhaupt keine Bedingung für w.

Eine Randwertaufgabe für ein endliches Gebiet, dem nicht ringsum eine Randbedingung entspricht, ist unzweifelhaft in der theoretischen Physik ein seltener Fall. Man möchte zunächst glauben, daß ein solches Problem unbestimmt wäre; das ist aber, wie sich zeigen läßt, keineswegs der Fall — im Gegenteil, die gewöhnliche Methode zur Untersuchung der Eindeutigkeit läßt erkennen, daß bei gegebenem Anfangszustand hier diese Eindeutig keit besteht.

Multipliziert man die Gleichung (2) mit $\partial w / dt$ und integriert sie über die Fläche der Membran, führt auch dabei im zweiten und dritten Glied die teilweise Integration nach x und y aus, so resultiert

$$\begin{aligned} &\int \Big[\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \tfrac{1}{2} A_x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \tfrac{1}{2} B_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &\qquad - A_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big] dq \\ &\qquad + \int \left(\overline{A} \frac{\overline{\partial w}}{\partial x} + \overline{B} \frac{\overline{\partial w}}{\partial y} \right) \frac{\overline{\partial w}}{\partial t} ds = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Das Randintegral verschwindet an den festen Grenzen wegen des zweiten, an den freien wegen des ersten Faktors, es bleibt sonach nur das Flächenintegral. Multipliziert man dasselbe mit dt und integriert von $t = 0$ bis t, so erhält man eine Beziehung, welche die Gleichung der Energie für die Membran darstellt, nämlich:

$$8)\quad \left| \int\left[\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,A_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,B_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - A_y\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dq \right|_{t=0}^{t=t} = 0.$$

Nimmt man nun an, das Problem habe bei gleichen Spannungen $A_x, B_y, A_y = B_x$ und bei gleichen Anfangswerten von w und $\partial w/dt$ zwei Lösungen w_1 und w_2, so kann man wegen der linearen Form der Gleichungen 2), 3), 4) die Differenz $w_1 - w_2 = w_0$ in vorstehender Gleichung für w setzen. Dies w_0 gibt aber für $t = 0$ sowohl $\partial w_0/dt$, wie $\partial w_0/\partial x$ und $\partial w_0/\partial y$ gleich Null, und es muß sonach für $t = t$

$$9)\quad \int\left[\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,A_x\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\,B_y\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 - A_y\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right] dq = 0.$$

sein.

In allen Fällen, wo die drei letzten Glieder zusammen eine wesentlich positive Funktion darstellen, ist sonach

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0\,,$$

ist also w_0 eine Konstante, die sich durch die Bedingung an der festen Grenze zu Null bestimmt.

Nun ist aber leicht zu sehen, daß im Fall der gespannten Membran die drei letzten Glieder faktisch stets eine Summe von positiven Quadraten darstellen; in der Tat kann man in jedem Flächenelement dq die Axen x und y in die Richtungen der Hauptspannungen der Membran legen, wodurch $A_y = B_x$ verschwindet. A_x und B_y werden dadurch zu den Haupt-Spannungen selbst, und da in der Membran nur Zug-, nicht Druckspannungen herrschen können, so sind diese beide negativ.

Obwohl also längs der freien Grenzlinien der Membran keine Randbedingung für die transversale Schwingung besteht, ist doch das Schwingungs-

problem durch den Anfangszustand und die Bedingung am festen Rande eindeutig bestimmt.

Es sieht zunächst so aus, als ob demnach *jede* Linie in der Membran zur freien Randkurve gemacht werden könnte. Dem ist indessen nicht so, da die spezielle Randlinie die Spannungen A_x, B_y, $A_y = B_x$ in der Membran bestimmt.

Die Wirkung, die das Fehlen einer Randbedingung für die freie Grenze bezüglich der Eigenschwingungen der Membran ergibt, ist am einfachsten an dem oben signalisierten speziellen Fall nachweisbar, daß die Membran einen Kreisring darstellt, dessen äußere Grenzlinie unter radialer Spannung festgehalten wird, während die innere frei ist.

Führen wir Polarcoordinaten r, ϑ ein, so ergibt sich für w eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in t, r, ϑ, deren Lösung bei stehenden Schwingungen die Form

$$Re^{i(\alpha t + \beta \vartheta)}$$

hat, unter R eine Funktion von r allein verstanden, für die eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung besteht. Aber für diese Gleichung existiert nur *eine* Nebenbedingung; bei vorgeschriebenem $\beta = \pi/n$ $(n = 1, 2 \cdots)$ bleibt demgemäß α und somit die Frequenz unbestimmt, d. h., die Schwingung der Membran kann bei einer vorgeschriebenen Zahl von diametralen Knotenlinien noch unendlich viele Perioden besitzen. Demgemäß wird also die Membran auch auf alle möglichen Töne ansprechen, und ihre kreisförmigen Knotenlinien werden sich bei stetig veränderlichen Tönen auch stetig verschieben. An der freien Grenzlinie kann sowohl ein Schwingungsknoten, als ein Schwingungsbauch, als jeder andere Schwingungszustand liegen.

Läßt man den Radius der kreisförmigen Oeffnung zu Null abnehmen, so verschwindet diese Unbestimmtheit, da dann im Zentrum die Bedingung endlicher Werte von w einsetzt.

Da im allgemeinen Falle jeder Zahl von diametralen Knotenlinien eine stetige Reihe von Tönen entspricht, so bietet die *ringförmige* Membran auch die Möglichkeit *mehrfacher* Töne, die bei der Membran von voller Kreisform anscheinend ausgeschlossen sind[1]). Ein *jeder* Ton kann offenbar im allgemeinen sowohl bei zwei, als bei drei oder vier ... diametralen Knotenlinien auftreten, so daß theoretisch die Möglichkeit einer Fülle

1) H. Weber, Part. Different.-Gleich. Bd. II p. 264, Braunschweig 1901.

von Knotenlinien verschiedenster Form erhellt. Aber gerade die große Zahl von Möglichkeiten macht es unwahrscheinlich, daß man in der Wirklichkeit gut ausgebildete Liniensysteme erhalten wird; finden doch schon bei dreifachen Tönen dergleichen Linien überhaupt nicht mehr statt. Diese Frage soll in dem hiesigen Institut näher untersucht werden.

Göttingen, den 27. April 1907.

Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 9. März 1907.

Die reellen linearen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen z werden nach Herrn Klein in elliptische, parabolische und hyperbolische Substitutionen eingeteilt.

Bei einer elliptischen Substitution sind die Fixpunkte zwei von einander verschiedene in bezug auf die Achse des Reellen spiegelbildlich symmetrisch gelegene Punkte. Im folgenden werden nur solche elliptische Substitutionen in Betracht gezogen werden, die bei der Iteration eine endliche Periode ergeben. Diejenigen elliptischen Substitutionen, bei welchen die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, spielen bekanntlich in der Theorie der eindeutigen automorphen Funktionen keine Rolle. Es muß hier sogleich noch eine spezielle Substitution genannt werden, nämlich diejenige reelle lineare Substitution, welche zwei von einander verschiedene reelle Fixpunkte hat und bei der Iteration die Periode zwei aufweist, sodaß, wenn mit S die Substitution bezeichnet wird, S^2 die identische Substitution ist. Diese Substitution möge im folgenden mit Rücksicht auf eine weiter unten gemachte Unterscheidung als elliptische Substitution zweiter Art bezeichnet werden. Die vorher genannten elliptischen Substitutionen sollen im folgenden schlechthin als elliptische Substitutionen bezeichnet werden.

Die parabolischen Substitutionen sind dadurch charakterisiert, daß sie nur einen einzigen Fixpunkt haben, der dann notwendig reell ist.

Die hyperbolischen Substitutionen sind dadurch charakterisiert, daß sie zwei von einander verschiedene reelle Fixpunkte haben und bei der Iteration keine endliche Periode ergeben. Von

einschneidender Wichtigkeit für das Folgende ist die Unterscheidung zweier Arten von hyperbolischen Substitutionen. Eine hyperbolische Substitution möge im folgenden als hyperbolische Substitution erster Art oder zweiter Art bezeichnet werden, jenachdem die Substitution die beiden Halbebenen, in welche die z-Ebene durch die Achse des Reellen zerlegt wird, einzeln in sich überführt oder mit einander vertauscht.

Zu jeder einzelnen der angeführten Substitutionen kann ein Fundamentalbereich konstruiert werden, welcher bei einer elliptischen Substitution der Periode n, die in der Form

$$\frac{z' - (\lambda + \mu i)}{z' - (\lambda - \mu i)} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot \frac{z - (\lambda + \mu i)}{z - (\lambda - \mu i)}$$

gegeben sei, die Gestalt eines in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrischen Kreisbogenzweiecks mit den Eckpunkten $(\lambda + \mu i)$ und $(\lambda - \mu i)$ und dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ hat. Der Einfachheit halber stelle man sich vor, daß der unendlich ferne Punkt der z-Ebene im Innern des Fundamentalbereichs liegt. Diese Bemerkung soll auch für alle später zu bildenden Fundamentalbereiche gelten.

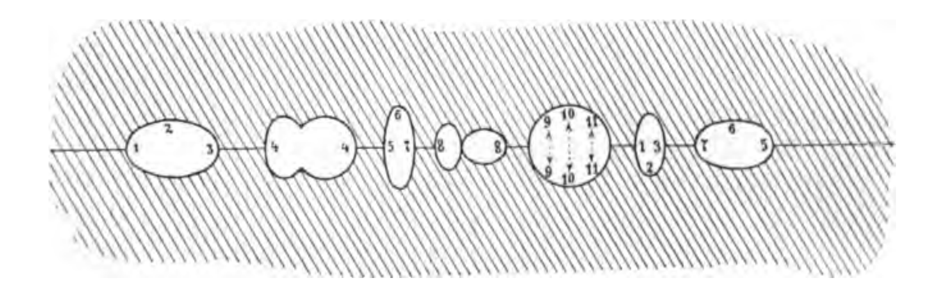
Bei einer parabolischen Substitution kann als Fundamentalbereich ein zu sich selbst symmetrisches Kreisbogenzweieck mit dem Winkel $\frac{2\pi}{\infty} = 0$ gewählt werden.

Bei einer elliptischen Substitution zweiter Art kann als Fundamentalbereich ein Kreisbogenzweieck mit reellen Eckpunkten und dem Winkel π gewählt werden, sodaß, falls der Fundamentalbereich in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist, seine Begrenzung notwendig von einem die Achse des Reellen orthogonal schneidenden Kreise gebildet wird. Die Zuordnung der Randpunkte des Fundamentalbereichs vermittelst der elliptischen Substitution zweiter Art findet dann in der Weise statt, daß je zwei Punkte der Peripherie des genannten Orthogonalkreises, welche in bezug auf die Achse des Reellen Spiegelbilder von einander sind, einander zugeordnet sind.

Bei einer hyperbolischen Substitution kann der Fundamentalbereich als ein von zwei die Achse des Reellen orthogonal schneidenden Kreisen begrenztes zweifach zusammenhängendes Gebiet gewählt werden, dessen Begrenzungskreise durch die hyperbolische Substitution auf einander bezogen werden.

Aus den angegebenen elementaren Fundamentalbereichen kann man nun durch den „Prozeß der Ineinanderschiebung“[1]) zu komplizierteren Fundamentalbereichen übergehen, die ebenfalls in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch sind. Bei einem so gebildeten allgemeinen Fundamentalbereich möge von der Beschränkung auf kreislinige Begrenzung abgesehen werden und nur an der Symmetrie in bezug auf die Achse des des Reellen festgehalten werden. Bei elliptischen Substitutionen zweiter Art kann, wie bereits bemerkt wurde, aus der Bedingung der Symmetrie allein schon der Schluss gezogen werden, daß diejenigen Randlinien des allgemeinen Fundamentalbereichs, welche solchen Substitutionen entsprechen, Kreise sein müssen.

Die Figur zeigt einen durch den Prozeß der Ineinanderschiebung gewonnenen Fundamentalbereich, zu dessen Bildung zwei hyperbolische Substitutionen und zwar eine der ersten und eine der zweiten Art dienten, ferner eine elliptische Substitution, eine parabolische und eine elliptische zweiter Art.



Die Art der Zuordnung der Randpunkte ist durch Ziffern angedeutet, indem jeder mit einer Ziffer versehene Randpunkt der gleichbezifferte Randpunkt zugeordnet zu denken ist.

Aus den mit der Zuordnung der Randpunkte des Fundamentalbereichs gegebenen linearen Substitutionen entspringt durch Iteration und Komposition eine „eigentlich diskontinuierliche Gruppe“ reeller linearer Substitutionen, vermittelst deren dem Fundamentalbereiche unendlich viele schlicht neben einander gelagerte Bildbereiche entsprechen. Die Gesamtheit der Bildbereiche bedeckt ein gewisses Gebiet, welches von der

---

1) Der „Prozeß der Ineinanderschiebung“, in allgemeinster Weise aufgefaßt, diente Herrn Klein als Leitprinzip bei der Aufstellung der „Fundamentaltheoreme“ im Gebiete der automorphen Funktionen. (s. Math. Annalen, Bd. 21: Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie).

ganzen Ebene mit Ausschluß unendlich vieler in nichtabzählbarer Menge vorhandener Punkte gebildet wird, die sämtlich auf der Achse des Reellen liegen.

Auf Grund der allgemeinen Untersuchungen von Schwarz, C. Neumann, Klein, Poincaré, Schottky, Hilbert[1]) kann die Existenz einer Klasse von eindeutigen automorphen Funktionen behauptet werden, welche bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, im Innern des Fundamentalbereichs den Charakter rationaler Funktionen besitzen und in seinen Ecken sich bestimmt verhalten. Dabei zeigt sich zugleich, daß alle Funktionen der Klasse sich rational durch zwei unter ihnen, $p(z)$ und $q(z)$, ausdrücken lassen, die ihrerseits durch eine irreduzible algebraische Gleichung verbunden sind.

Im vorliegenden Falle kann man wegen der Symmetrie des betrachteten Fundamentalbereichs noch von einer engeren Klasse zur Gruppe gehörender automorpher Funktionen reden, nämlich der Klasse aller derjenigen automorphen Funktionen, welche auf der Achse des Reellen reell sind. Dabei zeigt sich, daß jede längs eines beliebig kleinen Stückes der Achse des Reellen reelle automorphe Funktion nicht nur auf der ganzen Achse des Reellen reell ist, sondern notwendig auch auf allen denjenigen den Fundamentalbereich begrenzenden Kreisen, welche zu elliptischen Substitutionen der zweiten Art gehören.

Aus dieser engeren Klasse lassen sich nun ebenfalls zwei, durch eine irreduzible algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ mit reellen Koeffizienten verbundene Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ herausgreifen, so beschaffen, daß alle Funktionen der engeren Klasse sich rational und mit reellen Koeffizienten durch x und y darstellen lassen, während alle Funktionen der weiteren Klasse sich rational

---

1) H. A. Schwarz: Ges. math. Abhandlungen, Bd. II, pag. 133—143, 144—171, 175—210.

C. Neumann: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Zweite Auflage, 1884.

F. Klein: (l. c.).

H. Poincaré: Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. (Acta math., t. I, pag. 193—294).

Derselbe: Mémoire sur les groupes kleinéens (Acta math., t. III, pag. 49—92.

F. Schottky: Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Substitution ihres Arguments unverändert bleibt. (Crelles Journal, Bd. 101, pag. 227—272.

D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Erste bis fünfte Mitteilung (Gött. Nachr. 1904—1906). S. auch die Abhandlung: Über das Dirichletsche Prinzig. Festschrift, Berlin 1901.

und mit komplexen Koeffizienten durch x und y darstellen lassen.

Betrachtet man diejenige Riemannsche Fläche R, welche die Verzweigung der Funktion $y(x)$ geometrisch darstellt, so kann man sich vorstellen, daß der Fundamentalbereich durch Vermittelung der Funktion $x(s)$ konform auf die Fläche R abgebildet wird. Bei dieser konformen Abbildung entsprechen je zwei von einander verschiedenen Punkten des Fundamentalbereichs zwei verschiedene Punkte der Fläche R, sofern die beiden Punkte des Fundamentalbereichs nicht zwei einander zugeordnete Randpunkte sind; im letzteren Falle entspricht den beiden Punkten ein und derselbe Punkt der Fläche R. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Fläche R entweder ein und nur ein innerer Punkt des Fundamentalbereichs oder ein und nur ein Paar von einander zugeordneten Randpunkten des Fundamentalbereichs oder ein und nur ein elliptischer oder parabolischer Eckpunkt des Fundamentalbereichs.

Nach Herrn Klein werden die Riemannschen Flächen, welche algebraischen Gebilden mit reeller Gleichung zugeordnet sind, in orthosymmetrische und diasymmetrische Flächen eingeteilt; und zwar heißt die Fläche orthosymmetrisch, wenn sie, längs sämtlichen reellen Kurvenzügen aufgeschnitten, in zwei zu einander symmetrische Hälften zerfällt, diasymmetrisch, wenn sie, längs allen reellen Kurvenzügen aufgeschnitten, ein zusammenhängendes Ganzes bleibt. Herr Klein nennt eine zu einer Gleichung mit reellen Koeffizienten gehörende Riemannsche Fläche auch, wenn kein reeller Zug vorhanden ist, diasymmetrisch. Im folgenden werden jedoch solche Gleichungen nicht in Betracht gezogen werden.

Es zeigt sich nun, daß die Riemannsche Fläche R diasymmetrisch oder orthosymmetrisch ist, jenachdem bei der Bildung des Fundamentalbereichs hyperbolische Substitutionen der zweiten Art zur Verwendung gelangten oder nicht. Auch erkennt man sofort, daß das Geschlecht p der Riemannschen Fläche R gleich der Anzahl aller überhaupt zur Verwendung gelangten hyperbolischen Substitutionen ist.

Die Beziehung des Fundamentalbereichs zur Riemannschen Fläche wird durch folgende Bemerkungen noch genauer gekennzeichnet:

1. Den $2p$ Begrenzungslinien des Fundamentalbereichs, welche den p hyperbolischen Substitutionen entsprechen, sind auf der Riemannschen Fläche p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte zugeordnet, deren jeder das System der reellen Kurvenzüge in zwei Punkten schneidet und in bezug auf das Kurvensystem zu sich selbst symmetrisch ist.

2. Denjenigen Begrenzungslinien des Fundamentalbereichs, welche zu elliptischen bezw. parabolischen Substitutionen gehören, entsprechen auf der Riemannschen Fläche ebensoviele Einschnitte, deren jeder zwei zu einander symmetrische Punkte der Riemannschen Fläche verbindet, das System der reellen Kurvenzüge nur in einem Punkte schneidet und in bezug auf dies Kurvensystem zu sich selbst symmetrisch ist.

3. Denjenigen Begrenzungslinien des Fundamentalbereichs, welche zu elliptischen Substitutionen der zweiten Art gehören, entsprechen ebensoviele Einschnitte in die Riemannsche Fläche, deren jeder einzelne vollständig längs eines reellen Kurvenzuges verläuft.

4. Sämmtliche erwähnten Rückkehrschnitte und Einschnitte verlaufen völlig getrennt von einander.

5. Vollendet man die Zerschneidung der Riemannschen Fläche dadurch, daß man dieselbe längs den reellen Kurvenzügen vollständig aufschneidet, so zerfällt die Riemannsche Fläche in zwei zu einander symmetrische einfachzusammenhängende Hälften.

Es entsteht nun die Frage:

Kann man in der z-Ebene den Fundamentalbereich so wählen, daß bei geeigneter Bestimmung der Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ die zwischen diesen Funktionen bestehende algebraische Gleichung eine beliebig gegebene irreduzible reelle algebraische Kurve definiert, welche nur der Bedingung unterworfen ist, mindestens einen reellen Zug zu haben.

Diese Frage ist in bejahendem Sinne zu beantworten.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung zerfällt in zwei Teile.

Im ersten Teile ist der Nachweis zu führen, daß es möglich ist, die zu der gegebenen Kurve gehörende Riemannsche Fläche mit einem Schnittsystem auszustatten, welches allen fünf oben angegebenen Bedingungen genügt. Dieser Nachweis gestaltet sich verhältnismäßig einfach, wenn die Riemannsche Fläche orthosymmetrisch ist; erheblich komplizierter wird der Nachweis in dem Falle, in welchem die Fläche diasymmetrisch ist. Es zeigt sich übrigens, daß das Erfülltsein der Bedingung 5. bereits aus dem Erfülltsein der vier ersten Bedingungen folgt. In der Wahl

des Schnittsystems besteht eine große Freiheit, sodaß es, wenn man von gewissen einfachsten Fällen absieht, auf unendlich viele wesentlich verschiedene Arten möglich ist, das Schnittsystem allen gestellten Bedingungen gemäß zu bestimmen. Diese Bemerkung gilt auch dann noch, wenn man sich die reellen Einschnitte und die symmetrisch gepaarten Endpunkte der anderen Kategorie von Einschnitten vorhergegeben denkt.

Im zweiten Teile ist der Nachweis zu führen, daß die mit einem Schnittsystem der charakterisierten Art ausgestattete Riemannsche Fläche auf einen Fundamentalbereich der oben betrachteten Art abgebildet werden kann. Dabei ist es, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, notwendig, jedem derjenigen Einschnitte, welche die reellen Züge kreuzen, noch eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, die auch unendlich sein kann, zuzuordnen. Durch diese Zahl wird die Ordnung der in der Abbildung gewünschten elliptischen bezw. parabolischen Substitution angezeigt. Nach Angabe dieser Zahlen ist der Fundamentalbereich, welcher der zerschnittenen Riemannschen Fläche entspricht, bis auf eine reelle lineare Substitution völlig bestimmt.

Die Existenz der Abbildungsfunktion kann durch ein Verfahren bewiesen werden, welches dem von dem Verfasser[1]) in seiner Arbeit „über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche“ angewendeten Verfahren analog ist. In der Tat kann die Aufgabe, einen von $p+1$ auf der Achse des Reellen getrennt liegenden geradlinigen Strecken begrenzten schlichten Bereich konform auf einen von $p+1$ die Achse des Reellen orthogonal schneidenden Kreisen begrenzten Bereich abzubilden, als ein spezieller Fall der hier vorgelegten Abbildungsaufgabe betrachtet werden. Die Gleichung, welche dem bezeichneten speziellen Falle entspricht, ist eine hyperelliptische Gleichung

$$y^2 = \prod_{\alpha = 1}^{2p+2} (x - e_\alpha),$$

wobei die Größen e_α alle von einander verschieden und reell sind.

Ich skizziere mit wenigen Strichen den Gedankengang, der zur Lösung der hier vorgelegten allgemeineren Abbildungsaufgabe führt.

Gesetzt, die Aufgabe wäre gelöst; dann entspricht vermittelst der analytischen Funktion, welche die Abbildung auf den Fundamentalbereich in der z-Ebene leistet, der oberen Halbebene der

1) s. Jahresberichte der D. M. V. Bd. XVI, Heft 2, 1907.

z-Ebene ein bestimmter einfach zusammenhängender Bereich, welcher der gegebenen Riemannschen Fläche übergelagert und zwar, von gewissen einfachsten Fällen abgesehen, unendlich-vielblättrig ist. Dieser einfachzusammenhängende Bereich kann direkt konstruiert und folglich als bekannt angesehen werden. Derselbe überdeckt, falls das auf der Riemannschen Fläche ausgewählte Schnittsystem keine reellen Einschnitte aufweist, die Riemannsche Fläche ganz oder zur Hälfte, jenachdem die Fläche diasymmetrisch oder orthosymmetrisch ist. Sind reelle Einschnitte vorhanden, so überdeckt die übergelagerte Fläche die gegebene Riemannsche Fläche stets ganz. Wesentlich ist die Bemerkung, daß in allen Fällen die übergelagerte Fläche sich nicht über diejenigen Teile der reellen Züge hinwegerstreckt, welche unaufgeschnitten sind. Diese Linienstücke kommen vielmehr lediglich für die Begrenzung der übergelagerten Fläche in Betracht. Wendet man daher das vom Verfasser (*l. c.*) eingeschlagene Verfahren zur Bildung der Greenschen Funktion u, welche zu der übergelagerten einfach zusammenhängenden Fläche gehört, an, so kann man für die im vorliegenden Falle zu bildenden Greenschen Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, welche den in der genannten Arbeit gleichbezeichneten Greenschen Funktionen entsprechen, eine obere Schranke angeben, unterhalb deren sämtliche Funktion $u_1, u_2, u_3, \ldots$, ihrem Werte nach liegen müssen. Diese obere Schranke wird von derjenigen Potentialfunktion gebildet, welche an dem gemeinschaftlichen Unstetigkeitspunkte der Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ logarithmisch unendlich wird, im übrigen in demjenigen Teile der Riemannschen Fläche, über welchen die übergelagerte Fläche sich hinwegerstreckt, eindeutig und regulär ist und auf der Grenze dieses Teiles der Riemannschen Fläche verschwindet, d. i. auf denjenigen Teilen der reellen Züge, welche nicht eingeschitten erscheinen.

Hiermit ist der Beweis für den Satz erbracht, daß es möglich ist, die in der angegebenen Weise zerschnittene Riemannsche Fläche konform auf einen Fundamentalbereich der gewünschten Art abzubilden. Durch die Lösung dieser Abbildungsaufgabe ist zugleich ein von Herrn Klein (Math. Annalen Bd. XIX) aufgestelltes „Fundamentaltheorem" [1]) in einem Falle von hervorragendem Interesse streng begründet.

1) Vgl. auch Fricke-Klein, Automorphe Funktionen, Bd. II, pag. 46 oben.

Wie oben bereits erwähnt wurde, kann man, nachdem die Einschnitte längs den reellen Zügen nach Willkür gemacht sind und die symmetrisch gepaarten Endpunkte der übrigen Einschnitte beliebig markiert sind, immer noch auf unendlich viele wesentlich verschiedene Weisen eine den oben aufgezählten fünf Bedingungen genügende Zerschneidung der Riemannschen Fläche vornehmen. Hierbei werden zwei Zerschneidungen dann und nur dann als wesentlich verschieden bezeichnet, wenn es nicht möglich ist, dieselben unter Aufrechterhaltung der Symmetrie durch kontinuierliche Deformation, wobei die reellen Einschnitte und die Endpunkte der übrigen Einschnitte als fest anzusehen sind, in einander überzuführen. Es zeigt sich nun, daß die Funktion, welche in jedem Falle die zerschnittene Riemannsche Fläche auf den Fundamentalbereich abbildet, **von der Wahl des Schnittsystems nicht abhängt,** sondern lediglich von der Wahl der reellen Einschnitte und der Endpunkte der übrigen Einschnitte, sowie von der Wahl der ganzen Zahlen, welche man den Einschnitten der letzteren Kategorie zugeordnet hat.

Durch diese Tatsache wird die Frage nahe gelegt:

Ist es möglich, die Transzendenten, welche die konforme Abbildung der zerschnittenen Riemannschen Fläche auf den Fundamentalbereich vermitteln, in einer **von jeder Zerschneidung unabhängigen** Weise zu charakterisieren?

Indem man dieser Frage nachgeht, gelangt man zu einer Reihe, wie mir scheint, interessanter und wichtiger Theoreme, deren Mitteilung den Hauptzweck der vorliegenden Note bildet.

Es möge zunächst der Fall ins Auge gefaßt werden, in welchem gar keine Einschnitte vorhanden sind. Der Fundamentalbereich weist dann nur hyperbolische Substitutionen auf, deren Anzahl gleich dem Geschlecht der betrachteten reellen Kurve ist. Diesem Falle entsprechen folgende beiden Theoreme.

Theorem Ia. Gegeben sei irgend eine durch die Gleichung $G(x,y)=0$ definierte irreduzible reelle algebraische Kurve (x,y), welche mindestens einen reellen Zug hat. Es soll eine Funktion von x

$$z = z_1(x) = z_2(y) = z(x,y)$$

gefunden werden von folgenden Eigenschaften:

a) $z(x,y)$, betrachtet als Funktion des im komplexen algebraischen Gebilde veränderlichen Punktes (x,y),

hat überall den Charakter einer rationalen Funktion von x und y.

b) $z(x,y)$ nimmt auf den reellen Kurvenzügen nur reelle Werte an.

c) Die durch die Gleichung $G(x,y) = 0$ verbundenen komplexen Veränderlichen x und y sind eindeutige analytische Funktionen von z.

Dann gelten folgende Behauptungen:

A. Es gibt eine Funktion z, welche allen gestellten Bedingungen genügt.

B. Abgesehen von einer reellen linearen Substitution gibt es nur eine Funktion z, welche allen gestellten Bedingungen genügt.

C. Die Substitutionen, welche die Größe $z(x,y)$ erfährt, wenn man im Gebilde (x,y) eine geschlossene Bahn beschreibt, sind **linear**[1]) und reell.

D. Die Größe $z(x,y)$ nimmt in einem komplexen Punkte des Gebildes (x,y) niemals einen reellen Wert an[2]).

E. Die Größe z nimmt jeden reellen und komplexen Wert an, ohne Ausnahme, wenn die Kurve (x, y) vom Geschlecht null ist, mit Ausnahme zweier reeller Werte, wenn die Kurve vom Geschlecht eins ist, mit Ausnahme unendlich vieler in nicht abzählbarer Menge vorhandener reeller Werte, wenn das Geschlecht größer als eins ist.

F. Die Funktion $z\ (x, y)$ kann erklärt werden als Lösung einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$D_x(z) = R\ (x, y),$$

in welcher mit $D_x(z)$ der Schwarzsche Differentialausdruck und mit $R\ (x, y)$ eine bestimmte reelle rationale Funktion von x und y bezeichnet ist.

Theorem Ib. Unter Aufrechterhaltung aller übrigen unter Ia gestellten Bedingungen denke man sich die Bedingung b ersetzt durch folgende Bedingung:

b′. Die Funktion $z(x,y)$ soll sich stets reproduzieren, wenn man im Gebilde (x,y) einen in bezug auf

1) Man beachte, daß die Linearität der Substitutionen nicht als Bedingung gestellt worden ist. Der Nachweis der **Linearität** bildet einen Hauptpunkt der Untersuchung.

2) Die in D enthaltene Behauptung folgert man leicht aus b. und c.

das reelle Kurvensystem zu sich selbst symmetrischen geschlossenen Weg beschreibt, der das reelle Kurvensystem schneidet.

Dann gilt der Satz:

Es existiert eine und abgesehen von einer willkürlichen linearen Substitution nur eine den Bedingungen a, b′, c genügende Größe. Diese Größe geht durch eine passende lineare Substitution in die durch a, b, c charakterisierte reelle Größe über.

In dem Falle, in welchem außer den hyperbolischen Substitutionen auch elliptische und parabolische Substitutionen vorkommen, dagegen keine elliptischen Substitutionen zweiter Art, lassen sich die Transzendenten, welche die betreffenden konformen Abbildungen vermitteln, folgendermaßen charakterisieren.

Theorem IIa. Der Wortlaut des Theorems IIa ergibt sich aus dem Wortlaut des Theorems Ia, wenn man in letzterem die Bedingung a durch folgende Bedingung a′ ersetzt.

Bedingung a′: Die Funktion $z(x,y)$, betrachtet als Funktion des im komplexen algebraischen Gebilde veränderlichen Punktes (x,y), hat, abgesehen von endlich vielen vorgegebenen symmetrisch gepaarten Punkten der Riemannschen Fläche, deren keiner auf einem reellen Kurvenzuge liegt, den Charakter einer rationalen Funktion von x und y. Jeder Ausnahmestelle hat man sich eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, die auch unendlich sein kann, zugeordnet zu denken, wobei nur der Bedingung genügt sein muss, daß je zwei Punkten eines und desselben Paares dieselbe Zahl zugeordnet ist. Durch die zugeordneten Zahlen wird das Verhalten der zu bestimmenden Funktion $z(x,y)$ an den Ausnahmestellen in der Weise näher gekennzeichnet, daß die Anzahl der vollständigen Umläufe um den betreffenden Punkt, welche ausgeführt werden muss, damit die Funktion zu ihren Ausgangswerten zurückkehrt, für jeden einzelnen Zweig der Funktion genau gleich der zugeordneten Zahl sein soll.

Theorem IIb. Das Theorem IIb entspricht dem Theorem Ib. Wie Ib aus Ia, so geht IIb aus IIa dadurch hervor, daß an Stelle der Bedingung b die Bedingung b′ gesetzt wird.

Die Sätze Ia, Ib, IIa, IIb, lassen sich noch erweitern. Diese

Erweiterungen entsprechen dem Umstande, daß bei der Bildung des Fundamentalbereichs auch elliptische Substitutionen zweiter Art zur Verwendung gelangen können. Auf diese und andere mögliche Erweiterungen gehe ich der Kürze halber hier nicht ein.

Durch die Aufstellung der Theoreme Ia—IIb wird das Problem, die Cartesischen Koordinaten der Punkte einer beliebigen reellen algebraischen Kurve[1] **als eindeutige analytische Funktionen eines reellen Parameters darzustellen, in einer in gewissem Sinne vollbefriedigenden Weise erledigt.**

Die Bedeutung der Transzendenten, deren Existenz durch die genannten Theoreme begründet ist, kann noch von einem anderen Gesichtspunkte gekennzeichnet werden.

Riemann hat alle diejenigen komplexen algebraischen Gebilde (x, y) in eine Klasse zusammengefaßt, welche durch reelle oder komplexe birationale Transformation in einander übergeführt werden können.

Nach Klein und Poincaré[2] ist es nun möglich und zwar im wesentlichen nur auf eine Weise, die zu einer beliebigen algebraischen Funktion gehörende kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche vermittelst einer Funktion $Z(x, y)$, welche auf der Riemannschen Fläche überall definiert werden kann und den Charakter einer rationalen Funktion von x und y hat, konform auf ein Grenzkreispolygon abzubilden. Dabei zeigt es sich, daß die Funktion $Z(x, y)$ **von der speziellen Wahl des kanonischen Schnittsystems nicht abhängt; was bekannt ist.** Der Grenzkreis hat, wenn das Geschlecht p des algebraischen Gebildes gleich eins ist,

---

1) Es macht übrigens hierbei keinen Unterschied, ob die Kurve im n-dimensionalen Raume oder in der Ebene verläuft, da man sofort vermittelst einer reellen birationalen Transformation vom ersten Fall auf den zweiten übergehen kann.

2) Die Herren Klein und Poincaré bedienten sich in ihren grundlegenden Abhandlungen einer Methode, welche sie als Kontinuitätsmethode (méthode de continuité) bezeichneten und auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Später wurde ein anderer auf Herrn Schwarz zurückgehender Beweisansatz, welcher das Abbildungsproblem mit dem Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ in Zusammenhang bringt, von den Herren Picard und Poincaré zur Durchführung gebracht.

Picard: Journal de Math. sér. 4, t. 9, pag. 195 ff., pag 273—291; Comptes Rendus, t. 116, p. 1075; Crelles Journal, Bd. 130, pag. 243—258.

Poincaré: Journal de Math. sér. 5, t. 4, pag. 137—230.

unendlich großen Radius. Im Falle $p = 0$ tritt an Stelle der Kreisfläche die ganze Ebene (incl. des unendlich fernen Punktes). In diesem Falle gibt es überhaupt nur eine einzige Klasse. Im Falle $p = 1$ bilden die Riemannschen Klassen noch eine, zwei von einander unabhängige reelle Konstanten enthaltende, Mannigfaltigkeit; in den Fällen $p \geqq 2$ ist die Zahl der Konstanten gleich $6p - 6$.

Durch die Aufstellung der Funktion $Z(x, y)$ wird jedem algebraischen Gebilde (x, y) eine bestimmte Gruppe linearer Substitutionen der Variablen Z zugeordnet, nämlich die Gruppe aller derjenigen Substitutionen, welche die Variable Z erfahren kann, wenn man eine beliebige geschlossene Bahn im Gebilde (x, y) beschreibt. Diese Gruppe steht zu dem algebraischen Gebilde in einer sehr charakteristischen Beziehung, welche durch folgende Bemerkungen näher gekennzeichnet wird.

1. Die Gruppe G ist für alle algebraischen Gebilde, welche einer und derselben Riemannschen Klasse angehören, dieselbe.

2. Zwei algebraischen Gebilden, welche nicht derselben Riemannschen Klasse angehören, sind auch verschiedene Gruppen zugeordnet.

Faßt man nunmehr nur solche algebraischen Gebilde (x, y) ins Auge, welche reellen algebraischen Kurven entsprechen — als

---

Die diesen Gegenstand betreffenden allgemeinen Untersuchungen des Herrn Schwarz sind bisher nicht publiziert worden. In seinen Ges. Abhandlungen teilte Herr Schwarz einige Notizen mit (Bd. II, pag. 363—368).

In neuester Zeit wurde das in Rede stehende Abbildungsproblem von Herrn Johannsson behandelt. Die Arbeiten von Johannsson schliesen sich an eine früher von Herrn Poincaré veröffentlichte Abhandlung an.

Poincaré: Sur un théorème de la théorie générale des fonctions (Bulletin de la société math. de France, t. XI).

Johannsson: Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte (Acta soc. Fenn., t. 33. 1905).

Derselbe: Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis. (Math. Annalen Bd. 62, 1906).

Derselbe: Beweis der Existenz linearpolymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen. (Math. Annal. Bd. 62, 1906).

Die zuletzt erwähnte Abhandlung ist jedoch, wie mir scheint, nicht einwandfrei, da die pag. 191. gemachte Bemerkung „Jede auf $\varphi(p, o)$ unverzweigte Funktion ist nun u. s. w.“, auf einer irrtümlichen Anwendung des von Johannsson selbst gefundenen wertvollen Grundgedankens beruht.

Einen neuen Beweis teilt der Verfasser der vorliegenden Mitteilung in der unmittelbar folgenden Note „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ mit.

reelle algebraische Kurven werden hierbei, wie oben, solche algebraische Kurven bezeichnet, welche nicht nur durch eine irreduzible Gleichung mit reellen Koeffizienten definiert werden können, sondern auch mindestens einen reellen Zug aufweisen —, so erscheint es zweckmäßig, den Riemannschen Klassenbegriff dadurch zu verengern, daß nur solche reellen algebraischen Gebilde als derselben Klasse angehörig betrachtet werden, die durch eine reelle birationale Transformation in einander übergeführt werden können. Die Bedingung der Realität der Koeffizienten in den Gleichungen, welche die birationale Transformation ausdrücken, ist darum wesentlich, weil es sehr wohl vorkommen kann, daß zwei in unserm Sinne reelle algebraische Gebilde durch eine komplexe birationale Transformation in einander übergeführt werden können, jedoch nicht durch eine reelle, ein Umstand, der seine geometrische Erklärung darin findet, daß eine und dieselbe Riemannsche Fläche auf mehrere verschiedene Weisen im Sinne der konformen Abbildung als zu sich selbst symmetrisch betrachtet werden kann.

Nunmehr genügt es, um die Bedeutung der unter Ia und Ib charakterisierten Transzendenten $z(x,y)$ erkennen zu lassen, folgenden Satz auszusprechen:

Satz: Die unter Ia und Ib charakterisierte Transzendente $z(x,y)$ leistet für reelle algebraische Gebilde bei Zugrundelegung des engeren Klassenbegriffs dasselbe, was die genannte Transzendente $Z(x,y)$ für beliebige algebraische Gebilde bei Zugrundelegung des allgemeinen Riemannschen Klassenbegriffs leistet, nämlich die Bestimmung eines für die Klasse charakteristischen gegenüber birationalen Transformationen invarianten Normalgebildes in Gestalt einer Gruppe[1]).

In bezug auf die unter IIa und IIb charakterisierten Transzendenten kann ein analoger Satz behauptet werden.

1) Das Problem der Bestimmung eines der Klasse zugeordneten invarianten Normalgebildes wurde von Herrn Nöther in algebraischem Sinne gelöst durch die Konstruktion der sogenannten Nötherschen Normalkurve der φ. Die hier gegebene gruppentheoretische Lösung kann, wie ich in der unmittelbar folgenden Mitteilung „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" darlege, auf beliebige transcendente Kurven ausgedehnt werden.

Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung am 11. Mai 1907.

Das Problem der Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, d. i. das Problem der Bestimmung einer Hülfsvariablen t, durch deren Einführung als unabhängige Variable die Cartesischen Koordinaten der Punkte der betreffenden Kurve eindeutige analytische Funktionen werden, ist zuerst von Herrn Poincaré in einer berühmten Abhandlung untersucht worden.

H. Poincaré: Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. (Bulletin de la société mathématique de France, t. XI, 1883).

Die von Herrn Poincaré angewandte Beweismethode führte jedoch insofern nicht zu einer vollständigen Erledigung des in Rede stehenden Problems, als durch die Einführung der elliptischen Modulfunktion als Vergleichsfunktion gewisse Punkte des analytischen Gebildes ausgeschlossen wurden, die durch die Natur des Problems nicht ausgezeichnet waren. (Vgl. die Schlußbemerkung Poincaré's.) Auf diesen Umstand, der eine gewisse Unvollkommenheit der Poincaréschen Resultate mit sich brachte, hat auch Herr Hilbert in seinem bekannten auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Paris (1900) gehaltenen Vortrage[1]) hingewiesen.

Indem der Verfasser der vorliegenden Mitteilung sich bemühte, die bezeichnete Lücke auszufüllen, gelangte er zur Aufstellung

---

1) Hilbert: Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten 1900, pag. 290 ff. S. auch Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe I.

von vier die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven betreffenden Theoremen.

Von diesen vier Theoremen beziehen sich die beiden ersten auf beliebige reelle oder komplexe analytische Kurven. Obgleich Herr Poincaré diese beiden Theoreme in der hier mitgeteilten vollkommenen Form (l. c.) nicht ausgesprochen, geschweige denn bewiesen hat, scheint es mir doch unzweifelhaft zu sein, daß er dieselben bereits damals (1883) im Sinne gehabt hat. Diese beiden Theoreme stellen Verallgemeinerungen gewisser von den Herren Klein und Poincaré in ihren grundlegenden Abhandlungen über automorphe Funktionen aufgestellter Theoreme dar, welche die konforme Abbildung einer zu einer algebraischen Funktion gehörenden kanonisch zerschnittenen Riemannschen Fläche auf ein Grenzkreispolygon betreffen [1]). Die beiden letzten der genannten vier Theoreme beziehen sich speziell auf reelle analytische Kurven, d. s. analytische Kurven, welche mindestens einen reellen Zug aufweisen, im übrigen aber völlig beliebig sind. Diese beiden Theoreme stellen Verallgemeinerungen der vom Verfasser in der unmittelbar vorhergehenden Mitteilung entwickelten auf reelle algebraische Kurven sich beziehenden Sätze dar und betreffen Fragestellungen, die auch an sich in gewissem Sinne neu sein dürften.

Die Theoreme, um deren Begründung es sich handelt, lauten folgendermaßen.

Erstes Theorem. Es sei eine beliebige monogene analytische) Kurve $x_1, x_2, \ldots, x_n$) gegeben, wobei mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Koordinaten eines auf der Kurve befindlichen veränderlichen Punktes bezeichnet sind. Von den komplex zu denkenden Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist nur eine unabhängig veränderlich.

Es wird behauptet, daß es eine Funktion

$$t = t_1(x_1) = t_2(x_2) = \ldots = t_n(x_n) = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gibt, welche folgende Eigenschaften hat:

Die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat an allen inneren Punkten des analytischen Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, d. s. alle diejenigen Punkte, an welchen das Gebilde den Charakter eines algebraischen Gebildes besitzt, den Charakter rationaler Funktionen der Veränderlichen

1) Ausführlichere Literaturangaben findet der Leser in der unmittelbar vorhergehenden Note. Einen neuen Beweis der betreffenden Klein-Poincaréschen Existenzsätze gibt der Verfasser am Schlusse dieser Mitteilung.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Die Veränderlichen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sind eindeutige analytische Funktionen der Veränderlichen t; ebenso ist jede für alle inneren Punkte des Gebildes $x(_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit dem Charakter rationaler Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erklärte analytische Funktion eine eindeutige Funktion der Veränderlichen t.

Normierung der Grösse t. Durch Vermittelung der Funktion $t\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wird das ganze Innere des Gebildes (d. i. die Gesamtheit aller inneren Punkte des Gebildes) konform auf einen die t-Kugel schlicht überdeckenden einfach zusammenhängenden Bereich abgebildet. Dieser einfach zusammenhängende Bereich kann unter Umständen von der **Vollkugel mit Ausnahme eines einzigen Punktes** oder auch von der ganzen **Vollkugel** gebildet werden. In den andern Fällen kann man die Größe t in der Weise normiert denken, daß der erwähnte einfach zusammenhängende Bereich sich als **Kugelkalotte** darstellt[1]). Bei Berücksichtigung dieser normierenden Bedingung kann man in allen drei Fällen behaupten, daß die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch ihre oben angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt ist bis auf eine lineare Substitution. Die Substitutionen, durch welche je zwei Zweige der normierten Funktion t auf dem analytischen Gebilde zusammenhängen, sind linear. Die normierte Funktion t kann daher als Lösung einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$D_{x_1}(t) = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

erklärt werden, wobei mit $D_{x_1}(t)$ der Schwarzsche Differentialausdruck und mit $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine bestimmte für das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit dem Charakter rationaler Funktionen erklärbare eindeutige analytische Funktion bezeichnet ist.

Zweites Theorem. Im Innern des analytischen Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denke man sich endlich oder unend-

1) Der Fall der ganzen Vollkugel tritt nur bei algebraischen Kurven ein und zwar dann und nur dann, wenn das Geschlecht der Kurve gleich null ist. Die Durchführung der Alternative zwischen Kugelkalotte und Vollkugel mit Ausnahme eines Punktes bildet den Kernpunkt der ganzen Untersuchung. Die Untersuchungsmethode, welche Herr Poincaré (l. c.) angewandt hat, führte nur auf den Fall der Kugelkalotte.

lich viele Punkte beliebig markiert, wobei nur der Bedingung genügt sein muß, daß alle im Innern des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ etwa vorhandenen Häufungspunkte der definierten Punktmenge nicht zur Menge selbst gehören[1]. Jedem Punkte der Menge denke man sich eine positive ganze Zahl, welche $\geqq 2$ oder ∞ ist, zugeordnet.

Dann wird behauptet, daß es eine Funktion

$$t = t_1(x_1) = t_2(x_2) = \ldots = t_n(x_n) = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

Die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat an allen inneren Punkten des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen die vorher markierten Punkte, den Charakter rationaler Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Beschränkt man sich auf die Umgebung eines der markierten Punkte, so besitzt die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, welchen Zweig derselben man auch wähle, die Eigenschaft[2], sich nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen um den betreffenden Punkt zu reproduzieren; diese Anzahl ist gleich der dem betreffenden Punkte zugeordneten ganzen Zahl[3]. Führt man die Veränderliche t als unabhängige Variable ein, so werden nicht nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eindeutige analytische Funktionen von t, sondern auch alle diejenigen für das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit dem Charakter rationaler Funktionen erklärbaren analytischen Funktionen, welche sich an den markierten Punkten in der Weise verzweigen, daß die Anzahl der Umläufe, welche erforderlich ist, um die Funktion zu ihren Ausgangswerten zurückzuführen, für jeden einzelnen der markierten Punkte mit der diesem Punkte zugeordneten ganzen Zahl oder einem Teiler derselben überstimmt. Insbesondere ist daher diejenige Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, welche man erhält, wenn alle zugeordneten Zahlen gleich ∞

1) Aus der angegebenen Bedingung kann der Schluß gezogen werden, daß die Punktmenge abzählbar ist.

2) Um diese Eigenschaft formulieren zu können, bedurfte es der Einführung obiger Bedingung für die Menge der markierten Punkte.

3) Der Ausdruck: eine Funktion reproduziert sich erst nach unendlichvielen Umläufen um einen Punkt, soll nur besagen, daß sie sich nicht nach endlich vielen Umläufen reproduziert.

gewählt werden, eine uniformisierende Variable überhaupt aller für das ganze Gebilde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen die markierten Punkte, mit dem Charakter rationaler Funktionen definierten analytischen Funktionen.

Normierung der Grösse t. Die durch die angeführten Eigenschaften charakterisierte Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ besitzt an allen markierten Punkten des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen diejenigen, denen die Zahl ∞ zugeordnet ist, den Charakter algebraischer Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Durch Vermittelung der Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wird das ganze Innere des Gebildes, ausgenommen die soeben erwähnten Punkte der Signatur ∞, konform auf einen die t-Ebene schlicht überdeckenden einfach zusammenhängenden Bereich abgebildet u. s. w. (S. erstes Theorem).

Drittes Theorem. Die analytische Kurve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei speziell eine reelle analytische Kurve, d. i. eine analytische Kurve, welche mindestens einen reellen Zug besitzt, im übrigen aber völlig beliebig ist[1]).

Dann wird behauptet, daß es eine analytische Funktion

$$t = t_1(x_1) = t_2(x_2) = \ldots = t_n(x_n) = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

Die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat für alle inneren Punkte des analytischen Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Charakter rationaler Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Funktion t nimmt auf den reellen Zügen nur reelle Werte an. Alle analytischen Funktionen, welche im ganzen Innern des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit dem Charakter rationaler Funktionen erklärt werden könen und auf den reellen Zügen nur reelle Werte annehmen, sind eindeutige analytische Funktionen der Variablen t[2]).

---

1) Die Anzahl der reellen Züge kann auch unendlich groß sein; in jedem Falle ist sie abzählbar.

2) Ist die Kurve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle algebraische Kurve, so genügt es, wie sich dartun läßt, zu verlangen, daß die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ selbst eindeutige analytische Funktionen von t sind. Die damit ausgedrückte Eigenschaft der Größe t, im Verein mit den beiden erstgenannten Eigenschaften, hat nämlich zur Folge, daß überhaupt alle im Innern des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit dem Charakter rationaler Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erklärten analytischen Funktionen, welche auf den reellen Kurvenzügen nur reelle Werte annehmen, eindeutige

Normierung der Grösse t[1]. Die durch die angeführten Eigenschaften charakterisierte Funktion t nimmt an einem Punkte des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, welcher nicht auf einem reellen Kurvenzuge liegt, keinen reellen Wert an. Durch Vermittelung der Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wird das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konform auf einen die t-Ebene schlicht überdeckenden Bereich von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhange abgebildet, welcher durch die Achse des Reellen in zwei zu einander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt wird. Durch eine passende konforme Abbildung, bei welcher alle Eigenschaften der Größe t erhalten bleiben, kann man erreichen, daß die genannten beiden einfach zusammenhängenden Bereiche die Halbebenen sind, in welche die t-Ebene durch die Achse des Reellen zerlegt wird. Bei Berücksichtigung dieser normierenden Bedingung kann man behaupten, daß die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch ihre Eigenschaften bis auf eine reelle lineare Substitution bestimmt ist. Die normierte Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kann erklärt werden als Lösung einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$D_{x_1}(t) = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wobei mit $D_{x_1}(t)$ der Schwarzsche Differentialausdruck und mit $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine bestimmte für das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eindeutig und mit dem Charakter rationaler Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erklärbare analytische Funktion bezeichnet ist, die auf den reellen Kurvenzügen lauter reelle Werte annimmt.

Viertes Theorem. Man denke sich im Innern des analytischen Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ endlich oder unendlich viele Punkte markiert und mit ganzen Zahlen $\geqq 2$ oder $= \infty$ versehen; (Vgl. das zweite Theorem). Die Auswahl der Punkte ist so zu treffen, daß kein markierter Punkt auf einem reellen Kurvenzuge liegt und daß mit jedem markierten Punkte auch der ihm

---

Funktionen von t werden; (vgl. die unmittelbar vorhergehende Mitteilung des Verfassers).

1) Ist die Kurve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine reelle algebraische Kurve, so kann der Nachweis geführt werden, daß das Erfülltsein der Normierungsbedingung eine Folge der übrigen Eigenschaften ist. (S. die unmittelbar vorhergehende Mitteilung des Verfassers).

symmetrisch entsprechende Punkt markiert wird und dieselbe Zahl zugeordnet erhält.

Dann wird behauptet, daß es eine Funktion

$$t = t_1(x_1) = t_2(x_2) = \ldots = t_n(x_n) = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

Die Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat an allen inneren Punkten des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen die markierten Punkte, den Charakter rationaler Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

An den markierten Punkten verzweigt sich die Funktion t den zugeordneten Zahlen entsprechend; (vgl. das zweite Theorem). Die Funktion t nimmt auf den reellen Kurvenzügen nur reelle Werte an. Alle analytischen Funktionen, welche für das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen die markierten Punkte, den Charakter rationaler Funktionen haben, auf den reellen Kurvenzügen nur reelle Werte annehmen und an den markierten Punkten so verzweigt sind, daß die Anzahl der an jedem markierten Punkte zusammenhängenden Zweige stets ein Teiler der dem Punkte zugeordneten ganzen Zahl oder ihr gleich ist, sind eindeutige analytische Funktionen der Variablen t.

Normierung der Grösse t. Die Funktion t hat an denjenigen markierten Punkten, denen eine endliche Zahl zugeordnet ist, den Charakter algebraischer Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und es wird durch Vermittelung der Funktion $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das ganze Innere des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ausgenommen diejenigen markierten Punkte, denen die Zahl ∞ zugeordnet worden ist, auf einen die t-Ebene schlicht überdeckenden Bereich von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhang abgebildet, welcher u. s. w.; (s. das dritte Theorem).

Beweis der vier Theoreme.

Bei dem Beweise, welchen der Verfasser im folgenden für die vorher formulierten vier Theoreme mitteilt, ergibt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang der hier untersuchten Uniformisierungsprobleme mit demjenigen Fragenkreise, welcher von Herrn Picard durch die Aufstellung des sogenannten Picardschen Satzes erschlossen wurde und welcher in neuester Zeit durch die Herren Landau, Hurwitz, Schottky, Boutroux, Carathéodory weiter untersucht worden ist.

Der Beweis der vier Theoreme hängt mit dem Nachweise des folgenden allgemeinen Abbildungssatzes über einfach zusammenhängende Bereiche zusammen.

Ein allgemeiner Abbildungssatz. Es sei B irgend ein nach Art einer Riemannschen Fläche[1]) über der z-Ebene ausgebreiteter einfach zusammenhängender Bereich, welcher endlich- oder unendlich-vielblättrig sein kann. Der Bereich B kann in seinem Innern endlich oder unendlich viele Windungspunkte haben; die Ordnungszahl jedes einzelnen inneren Windungspunktes ist jedoch endlich. Die Anzahl der Blätter und die Anzahl der Windungspunkte ist abzählbar[2]). Hat der Bereich B in irgend einem seiner Blätter Grenzpunkte oder ganze Begrenzungslinien, so werden dieselben zum Bereiche B selbst nicht mitgerechnet

Unter den genannten völlig allgemeinen Voraussetzungen über den Bereich B gilt die Behauptung: Es ist möglich, den einfach zusammenhängenden Bereich B in eindeutig umkehrbarer Weise konform auf einen die Kugel schlicht überdeckenden ebenfalls einfach zusammenhängenden Bereich abzubilden. Der letztere Bereich wird entweder von der ganzen Vollkugel gebildet oder von der ganzen Vollkugel mit Ausnahme eines Punktes oder von einer Kugelkalotte, deren Begrenzungskreis nicht als zur Kalotte gehörig betrachtet wird.

Der einfach zusammenhängende Bereich, um dessen Abbildung auf einen schlichten Bereich es sich beim Beweise des ersten Theorems handelt, wird aus dem Gebilde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ folgendermaßen gefunden. Man betrachte eine der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, etwa x_1, als unabhängige Veränderliche und bilde diejenige Riemannsche Fläche, welche gleichzeitig die Verzweigung der Funktionen $x_2(x_1), x_3(x_1), \ldots, x_n(x_1)$, soweit dieselben den Charakter algebraischer Funktionen haben, geometrisch darstellt. Die so gefundene Riemannsche Fläche wird dann, falls sie nicht schon einfach zusammenhängend ist, durch einen bestimmten Ueberlage-

---

1) Die Annahme, daß der einfach zusammenhängende Bereich über der Ebene wie eine Riemannsche Fläche ausgebreitet ist, ist für den Beweis, welchen ich weiter unten gebe, unwesentlich. Diese Bemerkung kommt für gewisse Anwendungen in Betracht, die ich demnächst zu publizieren beabsichtige.

2) Riemannsche Flächen mit nichtabzählbarer Blätterzahl oder nicht abzählbarer Anzahl der inneren Windungspunkte gibt es bekanntlich nicht.

rungsprozeß in eine einfach zusammenhängende Fläche B verwandelt. Die Herstellung dieser Fläche B bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar[1]).

Die einfach zusammenhängende Fläche $\overline{B}$, um deren Abbildung auf einen schlichten Bereich es sich beim zweiten Theorem handelt, entsteht aus der soeben konstruierten einfach zusammenhängenden Fläche B durch nochmalige Anwendung des Ueberlagerungsprozesses. Die Fläche $\overline{B}$ weist relativ zur Fläche B endlich oder unendlich viele Windungspunkte auf, welche den auf dem Gebilde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ markierten Punkten entsprechen.

Beim dritten und vierten Theorem handelt es sich um die konforme Abbildung gewisser durch den Ueberlagerungsprozeß entstehender einfach zusammenhängender Bereiche auf eine die Ebene schlicht überdeckende Halbebene. Um zu den betreffenden einfach zusammenhängenden Flächen zu gelangen, bemerke man zunächst, daß die von Herrn Klein eingeführte Einteilung der zu reellen algebraischen Kurven gehörenden Riemannschen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische Flächen auch auf die zu beliebigen reellen transzendenten analytischen Kurven gehörenden Riemannschen Flächen ausgedehnt werden kann. In der Tat kann man durch eine einfache Ueberlegung dartun, daß die zu einer beliebigen reellen analytischen Kurve gehörende Riemannsche Fläche, falls sie längs allen denjenigen Linien aufgeschnitten wird, welche die reellen Züge des analytischen Gebildes auf der Riemannschen Fläche repräsentieren, entweder in zwei zu einander symmetrische Hälften H_1 und H_2 zerlegt wird (orthosymmetrischer Fall) oder ein zu sich selbst symmetrisches zusammenhängendes Ganzes G bleibt (diasymmetrischer Fall). Wird im orthosymmetrischen Falle die Fläche H_1, im diasymmetrischen Falle die Fläche G durch den Ueberlagerungsprozeß in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, so erhält man diejenige Fläche $\overline{B}$, um deren Abbildung auf eine Halbebene bezw. Kugelkalotte es sich beim Beweise des dritten Theorems handelt. Beim Beweise des vierten Theorems handelt es sich um die Abbildung eines Bereiches $\overline{\overline{B}}$ auf eine Halbebene, und zwar entsteht $\overline{\overline{B}}$ aus $\overline{B}$ auf analoge Weise, wie $\overline{B}$ aus B. Der oben behauptete allgemeine Abbildungssatz gelangt auf die Bereiche $\overline{B}$ und $\overline{\overline{B}}$ in der Weise zur Anwendung, daß das Eintreten des Falles der Vollkugel und des Falles der Vollkugel mit Ausschluß eines Punktes als unmöglich

1) S. Poincaré. (l. c.).

erkannt wird. Man braucht dazu nur die Bemerkung zu machen, daß die Bereiche $\overline{\overline{B}}$ und $\overline{\overline{\overline{B}}}$ je als Teilbereich eines weiteren einfach zusammenhängenden Bereiches aufgefaßt werden können, der entsteht, wenn man $\overline{\overline{B}}$ bezw. $\overline{\overline{\overline{B}}}$ über eine seiner Begrenzungslinien hinweg ein Stück fortsetzt.

Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes. Man erkennt zunächst, daß der Fall der ganzen Vollkugel nur für geschlossene einfach zusammenhängende Flächen B eintreten kann, welche die Ebene überall mit gleicher und zwar endlicher Blätterzahl bedecken und in ihrem Innern nur endlich viele Windungspunkte haben. Der Beweis für die Möglichkeit der konformen Abbildung einer solchen Fläche auf die schlicht zu denkende vollständige Oberfläche einer Kugel ist bereits durch Herrn Schwarz geführt worden[1]).

Ist der abzubildende einfach zusammenhängende Bereich B nicht von der soeben geschilderten Beschaffenheit, so ist es möglich, eine unendliche Folge von Bereichen $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ zu konstruieren, welche folgenden Bedingungen genügen:

Jeder der Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ liegt vollständig im Innern der Fläche B und ist, wie diese, einfach zusammenhängend. Jeder der Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ ist endlichvielblättrig, hat in seinem Innern nur endlich viele Windungspunkte und wird von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien, z. B. von lauter geradlinigen Strecken begrenzt. Der Bereich B_{n+1} enthält den Bereich B_n vollständig in seinem Innern; und zwar gilt diese Bemerkung für jeden Wert des Index n. Ist P irgend ein Punkt der Fläche B, so gibt es einen bestimmten Wert des Index n, so daß für diesen und für alle höheren Werte des Index n der Punkt P im Innern von B_n liegt. (Vgl. Poincaré, l. c.)

Die Konstruktion einer allen angeführten Bedingungen genügenden Folge von Bereichen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar.

Wird jetzt mit P_0 irgend ein im Innern des Bereiches B_1 befindlicher Punkt, der nicht Windungspunkt ist, bezeichnet, so gehört zu der unendlichen Folge der Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ eine unendliche Folge Greenscher Funktionen $u_1, u_2, \ldots$, wobei mit u_n diejenige zum Bereich

---

1) S. den Schluß der Abhandlung: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Berliner Monatsberichte, 1870. S. auch Ges. Abhandlungen Bd. II.

B_n gehörende Greensche Funktion bezeichnet ist, welche auf der ganzen Begrenzung dieses Bereiches verschwindet und im Punkte P_0 unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$. Die Differenz $u_{n+1} - u_n$ ist im ganzen Innern des Bereichs B_n positiv. Für die mit wachsendem Index n wachsenden Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ kann es nun unter Umständen eine obere Schranke geben, unterhalb deren sämtliche Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ liegen. In der Tat gibt Herr Poincaré (l. c.) für die von ihm gebildeten Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ eine obere Schranke an. Um dies jedoch zu können, macht er (l. c.) die einschränkende Voraussetzung, daß der Bereich, um dessen konforme Abbildung auf einen schlichten Bereich es sich handelt, drei Punkte der Ebene nicht überdeckt. In Anlehnung an Poincaré's Abhandlung stellt Herr Johansson in seiner Arbeit „Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis“ [1]) die Forderung der Existenz einer Majorante geradezu an die Spitze. Das einfache Beispiel, in welchem der Bereich B die schlicht zu denkende Ebene selbst mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes ist und in welchem die Bereiche B_n von lauter konzentrischen Kreisen mit P_0 als Mittelpunkt begrenzt sind, lehrt jedoch, daß die Voraussetzung der Existenz einer Majorante eine Einschränkung darstellt.

Die Begründung der Alternative: Kreisfläche mit endlichem oder Kreisfläche mit unendlich großem Radius (= ganze Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes) stellt den Kernpunkt der folgenden Untersuchung dar.

Die Funktion u_n möge an der Stelle P_0 folgende Entwickelung haben:

$$u_n = \log \frac{1}{r} + c_n + ((0)).^{2)}$$

Da für jeden Wert des Index n die Bemerkung gilt, daß $(u_{n+1} - u_n)$ ein im Gebiete B_n überall positives Potential ist, und da $(c_{n+1} - c_n)$ den Wert der Funktion $(u_{n+1} - u_n)$ im Punkte P_0 darstellt, so ergibt sich:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n < c_{n+1} < \ldots .$$

---

1) Math. Annalen, Bd. 62, 1906.

2) Das Zeichen ((0)) soll hier und im Folgenden die Zusammenfassung aller der Glieder der Entwicklung bezeichnen, welche an der Stelle, für deren Umgebung die Entwicklung gilt, verschwinden.

Nun sind zwei Fälle möglich:

$$\text{Erster Fall: } \lim_{n=\infty} c_n = c = \text{endliche Größe}$$

$$\text{Zweiter Fall: } \lim_{n=\infty} c_n = \infty.$$

Erster Fall. In diesem Falle kann man, weil $(c_{n+1} - c_n)$ den Wert des positiven Potentiales $(u_{n+1} - u_n)$ im Punkte P_0 darstellt, mit Hülfe des Harnackschen Satzes über positive Potentiale schließen, daß die Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ gleichmäßig gegen ein Potential u konvergieren, welches im Punkte P_0 wie $\log \frac{1}{r}$ unendlich wird. Ist dann v das dem Potentiale u zugeordnete Potential, so vermittelt die Funktion

$$e^{-(u+iv)}$$

eine konforme Abbildung der vollständigen Fläche B auf die schlicht zu denkende Fläche des Einheitskreises.

Zweiter Fall. In dem Falle, in welchem $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$ ist, stellen die Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ eine nicht konvergierende Folge von Funktionen dar. Man konstruiere dann die Potentiale

$$U_1, U_2, \ldots,$$

welche sich von den Potentialen $u_1, u_2, \ldots$, bezw. nur dadurch unterscheiden, daß sie im Punkte P_0 mit der komplexen Koordinate z_0 anstatt der Unstetigkeit

$$\log \frac{1}{r} = \Re \log \left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

die Unstetigkeit

$$r^{-1} \cos \varphi = \Re \left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

besitzen. Um die Konvergenz der Potentiale $U_1, U_2, \ldots$ zu beweisen, werden zwei Hülfsätze aufgestellt.

Erster Hülfssatz. In der z-Ebene seien zwei die Ebene schlicht überdeckende einfach zusammenhängende Bereiche Σ_1 und Σ_2 gegeben, die beide ganz im Endlichen liegen und den Punkt $z = 0$ in ihrem Innern enthalten. Die Begrenzungslinien von Σ_1 und Σ_2 mögen bez. mit σ_1 und σ_2 bezeichnet werden. Es sei d die Maßzahl der Länge des kürzesten Abstandes der Begrenzungslinien σ_1 und σ_2 vom Punkte $z = 0$. Wird mit U_{σ_1} dasjenige Potential bezeichnet, welches in Σ_1 (excl. $z = 0$) eindeutig und regulär ist, auf σ_1 verschwindet und im Punkte $z = 0$ unendlich wird wie $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$, wird

ferner mit U_{σ_2} das für den Bereich Σ_2 entsprechend gebildete Potential bezeichnet, so ist die Differenz

$$|U_{\sigma_1} - U_{\sigma_2}| < \frac{2}{d}$$

für das ganze Gebiet, welches den Bereichen Σ_1 und Σ_2 gemeinsam ist.

Der Beweis ergibt sich, wenn man beachtet, daß

$$\left|U_{\sigma_1} - \Re\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{d} \quad \text{innerhalb } \Sigma_1,$$

$$\left|U_{\sigma_2} - \Re\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{d} \quad \text{innerhalb } \Sigma_2.$$

Zweiter Hülfssatz. Es sei Σ ein Bereich, welcher nur den folgenden Bedingungen unterworfen ist: Der Bereich Σ überdeckt die z-Ebene nirgends mehrfach, liegt ganz im Endlichen, enthält den Punkt $z = 0$ in seinem Innern und hat eine Begrenzungslinie σ, deren kürzester Abstand vom Punkte $z = 0$ unterhalb einer gegebenen endlichen Größe γ liegt. Mit u_σ werde die zum Bereiche Σ gehörende Greensche Funktion bezeichnet, welche im Punkte $z = 0$ wie $\Re \log\left(\frac{1}{z}\right)$ unendlich wird und auf der Begrenzung σ verschwindet; ferner werde mit c_σ das konstante Glied in der Entwickelung der Funktion u_σ an der Stelle $z = 0$ bezeichnet, sodaß man hat:

$$u_\sigma = \Re \log\left(\frac{1}{z}\right) + c_\sigma + ((0)).$$

Dann gibt es eine von der besonderen Wahl des Bereiches Σ unabhängige endliche Zahl C, so daß stets ist

$$c_\sigma < C.$$

Beweis. Der Bereich Σ sei zunächst so gewählt, daß seine Begrenzungslinie σ vom Nullpunkt eine kürzeste Distanz hat, welche gleich der gegebenen Größe γ ist. Man fasse dann die über der z-Ebene ausgebreitete zweiblättrige Riemannsche Fläche ins Auge, welche die Verzweigung der Funktion $\sqrt{z-a}$ geometrisch darstellt; hierbei ist mit a ein Punkt der Begrenzung σ bezeichnet, in welchem die Linie σ ihren kürzesten Abstand vom Punkte $z = 0$ erreicht. Aus der genannten Riemannschen Fläche denke man sich in dem einen Blatt die Fläche des Einheitskreises herausgeschnitten. Dadurch geht die geschlossene Riemannsche Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche H mit einer Begrenzungslinie über. Nun erkennt man leicht, daß der Bereich Σ

vollständig im Innern von H liegt. Bildet man daher für die Fläche H die Greensche Funktion u_z, welche auf der Begrenzung von H verschwindet und im Punkte $z = 0$ unendlich wird wie $\Re \log\left(\frac{1}{z}\right)$, so ist, falls u_z an der Stelle $z = 0$ die Entwicklung hat

$$u_z = \Re \log\left(\frac{1}{z}\right) + C_a + ((0)),$$

$c_\sigma < C_a$. Wählt man einen beliebigen anderen Bereich Σ, der den Bedingungen des zu beweisenden Hülfssatzes genügt und dessen Begrenzungslinie vom Nullpunkt die kürzeste Entfernung γ hat, so tritt an Stelle der Größe C_a eine Größe C_b. Man sieht jedoch ohne weiteres, da $|a| = |b|$, daß $C_a = C_b$ ist. Wird also der gemeinschaftliche Wert mit C bezeichnet, so hat man

$$c_\sigma < C.$$

Der Beweis kann nun folgendermaßen zu Ende geführt werden[1]). Es sei Σ ein Bereich, für welchen die kürzeste Distanz gleich $d < \gamma$ ist. Der Bereich Σ geht dann durch die Transformation $\bar{z} = \frac{\gamma}{d} \cdot z$ in einen Bereich $\overline{\Sigma}$ über, für welchen die kürzeste Distanz gleich γ ist, und es ergibt sich

$$c_\sigma < C - \log\left(\frac{\gamma}{d}\right) < C.$$

Man kann den Hülfssatz auch in folgender Form aussprechen.

Andere Form des zweiten Hülfssatzes[2]). Es sei ein die z-Ebene schlicht überdeckender ganz im Endlichen liegender Bereich Σ gegeben, der den Nullpunkt in seinem Innern enthält. Faßt man die Gesamtheit aller ganz im Endlichen gelegenen Bereiche Σ' ins Auge, welche den Nullpunkt im Innern enthalten, die Ebene schlicht überdecken und mittelst eindeutig umkehrbarer konformer Abbildung in den Bereich Σ übergeführt werden können, derart, daß der Nullpunkt bei der Abbildung in sich übergeht und daß

---

1) Die Zuendeführung des Beweises gelang mir erst, nachdem ich meinen Satz (und zwar in der zweiten Form) Herrn Carathéodory mitgeteilt hatte, der darauf einen vollständigen von dem hier gegebenen verschiedenen Beweis des Satzes (in der zweiten Form) fand, aus welchem ich das Schlußglied meines eigenen Beweises entnehmen konnte.

2) In dieser Form erinnert der Satz sofort an gewisse von den Herren Landau, Hurwitz und Carathéodory behandelten Fragen. Der Satz ist jedoch wesentlich neu. Insbesondere gibt die Forderung der Schlichtheit der Abbildung dem Satze ein charakteristisches Gepräge.

das Vergrößerungsverhältnis an der Nullstelle den Wert eins hat, so gibt es eine nicht verschwindende Kreisfläche K, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und ganz im Innern aller Bereiche Σ' liegt.

Zusatz: Die genannte Kreisfläche K wird unendlich groß, wenn der Bereich Σ in der Weise verändert wird, daß r_σ (s. oben) positiv unendlich wird.

Die beiden vorstehenden Hülfssätze gestatten nun zu zeigen, daß die Potentiale $U_1, U_2, \ldots$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen bilden.

Es handelt sich darum nachzuweisen, daß, wenn ε eine beliebig klein gegebene positive von null verschiedene Größe ist, bei hinreichender Vergrößerung des Index n

$$|U_n - U_{n+\nu}| < \varepsilon$$

wird für das ganze Gebiet B_n und bei willkürlicher Wahl einer positiven ganzen Zahl ν.

In der Tat wird durch hinreichende Vergrößerung des Index n bewirkt, daß die beiden oben erklärten Zahlen c_n und $c_{n+\nu}$ beliebig groß werden. Bildet man daher den Bereich $B_{n+\nu}$ konform auf die Fläche eines die Ebene schlicht überdeckenden Kreises Σ_1 ab derart, daß bei der Abbildung der Punkt P_0 in den Nullpunkt übergeht und daß das Vergrößerungsverhältnis an der Stelle P_0 gleich eins ist, so wird bei hinreichender Vergrößerung von n auf Grund des zweiten Hülfssatzes nicht nur der Radius des Kreises Σ_1 sondern auch der kürzeste Abstand der Begrenzung des Gebietes Σ_2 vom Nullpunkte beliebig groß, wenn mit Σ_2 das Gebiet bezeichnet wird, in welches der Bereich B_n bei der betrachteten konformen Abbildung des Bereiches $B_{n+\nu}$ auf die Kreisfläche Σ_1 übergeht. Bei dieser konformen Abbildung gehen die Funktionen $U_{n+\nu}$ und U_n in Funktionen U_{σ_1} und U_{σ_2} über, welche auf den Begrenzungslinien σ_1 bezw. σ_2 von Σ_1 bezw. Σ_2 verschwinden und im Nullpunkte wie $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$ unendlich werden. Wendet man jetzt auf die Funktionen U_{σ_1} und U_{σ_2} den ersten Hülfssatz an, so ergibt sich die gewünschte Ungleichheit. Das Grenzpotential U, gegen welches die Potentiale U_1, $U_2, \ldots$ gleichmäßig konvergieren, wird im Punkte P_0 wie $\Re\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ unendlich und ist sonst auf der ganzen Fläche B eindeutig und regulär.

Wird mit V das zum Potentiale U konjugierte Potential bezeichnet, so vermittelt die Funktion

$$U + iV$$

eine eindeutig umkehrbare konforme Abbildung der Fläche B auf einen die Ebene schlicht überdeckenden einfach zusammenhängenden Bereich B', welcher den unendlich fernen Punkt der Ebene in seinem Innern enthält und dessen vollständige Begrenzung von einem im Endlichen liegenden Punkt gebildet wird.

Daß der einfach zusammenhängende Bereich B' die Ebene schlicht überdeckt, ergibt sich aus der Bemerkung, daß jede der Funktionen $U_n + i V_n$ eine konforme Abbildung des Bereiches B_n auf die schlicht zu denkende ganze Ebene mit Einschluß des unendlich fernen Punktes und mit Ausschluß einer auf der Achse des Imaginären befindlichen endlichen geradlinigen Strecke vermittelt. Daß die Begrenzung des Bereiches B' punktförmig ist, ergibt sich leicht indirekt. Würde nämlich die Begrenzung nicht durch einen einzigen Punkt gebildet, so gäbe es, weil B'_n einfach zusammenhängend ist, unendlich viele Grenzpunkte des Bereiches B'. Man könnte daher für die Funktionen $u_1, u_2 \ldots$ eine Majorante aufstellen und schließen, daß $\lim_{n=\infty} c_n$ endlich ist entgegen der Voraussetzung.

Hiermit ist der oben behauptete allgemeine Abbildungssatz bewiesen.

Man kann jetzt nachträglich auch die Konvergenz gewisser anderer Ansätze beweisen.

In der Tat erkennt man jetzt sofort, daß die Funktionen U_1, $U_2, \ldots$ auch, wenn $\lim_{n=\infty} c_n$ endlich ist, gegen ein Grenzpotential U konvergieren. Die Funktion $U + i V$ vermittelt dann eine konforme Abbildung des Bereiches B auf die ganze Ebene mit Ausschluß einer auf der Achse des Imaginären liegenden geradlinigen Strecke von endlicher Länge.

Ebenso kann man den Ansatz der Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ durch eine geringe Modifikation auf eine Form bringen in welcher derselbe nicht nur im Falle $\lim_{n=\infty} c_n = c$, sondern auch im Falle $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$ konvergiert. Der neue Ansatz besteht darin, daß an Stelle der Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ bezw. die Funktionen

$$\bar{u}_1 = u_1 - c_1, \; \bar{u}_2 = u_2 - c_2, \ldots$$

gesetzt werden, wobei die Größen $c_1, c_2, \ldots$ die oben betrachteten Konstanten sind. Dieser Ansatz bedeutet geometrisch die Ausführung einer sukzessiven Folge konformer Abbildungen, von welchen die n-te den Bereich B_n in eine die Ebene schlicht überdeckende Kreisfläche mit dem Radius e^{c_n} und dem Nullpunkte als Mittelpunkt

überführt derart, daß dem Punkte P_0 der Nullpunkt entspricht und daß das Vergrößerungsverhältnis im Punkte P_0 den Wert eins hat. Die Konvergenz des Ansatzes ergibt sich aus dem elementaren Zusammenhange, in welchem die Funktionen

$$U_n + i\,V_n \text{ und } e^{-(\bar{u}_n + i\bar{v})}$$

stehen.

Der Fall der algebraischen Kurven.

Ist die Kurve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, um deren Uniformisierung es sich handelt, algebraisch, so stimmen, wie bereits zu Anfang bemerkt wurde, die uniformisierenden Transzendenten, deren Existenz im ersten und zweiten Theorem behauptet wird, mit gewissen Funktionen überein, deren Existenz von den Herren Klein und Poincaré zuerst behauptet und mittelst des Kontinuitätsprinzips erschlossen worden ist[1]). Die Transzendenten, deren Existenz in dem dritten und vierten Theorem behauptet wird, stimmen, wenn die zu Grunde gelegte Kurve algebraisch ist, mit denjenigen Transzendenten überein, deren Existenz der Verfasser in der vorhergehenden Note „Ueber die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven“ bewiesen hat[2]).

Was die zuerst bezeichneten Transzendenten anbetrifft, so kann von dem hier erreichten Standpunkte aus mit Leichtigkeit ein vollständiger Beweis der betreffenden Klein-Poincaréschen Theoreme gewonnen werden, und zwar ein Beweis, bei welchem von dem Kontinuitätsprinzip kein Gebrauch gemacht wird.

Wird z. B. eine algebraische Kurve vom Geschlecht $p \geqq 2$ betrachtet, so handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß in diesem Falle von den drei sich gegenseitig ausschließenden Möglichkeiten: endliche Kreisfläche, ganze Ebene excl. unendlich ferner Punkt, ganze Ebene incl. unendlich ferner Punkt, die erste zutrifft. Daß die letzte Möglichkeit nicht zutrifft, ist unmittelbar klar. Daß aber auch die zweite Möglichkeit nicht zutreffen kann, ergibt sich aus der Bemerkung, daß anderenfalls die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eindeutige analytische Funktionen der Hülfsvariablen mit min-

1) Es sind speziell diejenigen Existenzsätze gemeint, welche sich auf automorphe Funktionen mit einem Grenzkreis beziehen.

2) Der Inhalt der Theoreme Ia bis IIb der vorhergehenden Note geht übrigens über die hier im dritten und vierten Theorem aufgestellten Behauptungen wesentlich hinaus.

destens vier von einander unabhängigen Perioden ihres Arguments würden.

Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ können durch ein ähnliches und ebenso einfaches Ausschlußverfahren vollständig erledigt werden[1]).

Schlussbemerkungen.

Durch die vorhergehende und die vorliegende Arbeit des Verfassers sind alle diejenigen auf algebraische und überhaupt analytische Kurven sich beziehenden Uniformisierungsprobleme erledigt, welche auf Gruppen reeller linearer Substitutionen führen[2]).

---

1) Der Fall $p = 0$ ist von Herrn Schlesinger in zwei Abhandlungen (Journal für Mathematik Bd. 105 und 110) besonders untersucht worden. Derselbe Fall wurde auch von Herrn Johansson (S. die Literaturangaben in der vorhergehenden Note des Verfassers) besonders betrachtet. Herr Johansson stützt sich dabei zum Teil auf gewisse Spezialuntersuchungen zur Kontinuitätsmethode, welche Herr Fricke (Math. Annal. Bd. 59) gegeben hat. Die betreffenden Untersuchungen des Herrn Johansson lassen sich, wie ich an anderer Stelle auszuführen gedenke, soweit vervollkommnen, daß die Anwendung der Kontinuitätsmethode vollständig vermieden wird.

2) Den aus lauter reellen linearen Substitutionen gebildeten Gruppen bezw. den zugehörenden automorphen Funktionen und Uniformisierungsproblemen hat Poincaré in seinen grundlegenden Abhandlungen besondere Beachtung geschenkt. Poincaré schließt übrigens bei seiner Bestimmung des Begriffs der „Fuchsschen Gruppe" solche reellen linearen Substitutionen, welche eine Vertauschung der beiden Halbebenen ($\Re(iz) > 0$ und $\Re(iz) < 0$) bewirken, von der Betrachtung aus. Die Theorie dieser Gruppen ist später von Herrn Fricke, der dieselben als Hauptkreisgruppen bezeichnet, besonders eingehend durchforscht worden. Hervorgehoben sei hier nochmals der bereits in der vorhergehenden Mitteilung zitierte von Herrn Fricke (Aut. F., Bd. II, pag. 46 oben) formulierte auf orthosymmetrische Riemannsche Flächen sich beziehende Uniformisierungssatz. Durch die Beschäftigung mit diesem Satze, der sich (nach Fortlassung der Stigmata) als ein besonders ausgezeichneter Spezialfall des von Herrn Klein (Math. Ann. Bd. XIX) formulierten Uniformisierungstheorems auffassen läßt (vgl. Fricke: „Ueber die Poincaréschen Reihen der (—1)-ten Dimension", Dedekind-Festschrift, Braunschweig, 1901; s. insbesondere § 1 der Abhandlung), wurde ich auf die hier und in der vorhergehenden Mitteilung von mir erörterten die Uniformisierung beliebiger reeller algebraischer und überhaupt reeller analytischer Kurven vom orthosymmetrischen und diasymmetrischen Typus betreffenden Fragestellungen geführt. Ein bestimmtes auf diasymmetrische Riemannsche Flächen sich beziehendes Uniformisierungstheorem ist von Herrn Fricke nicht formuliert worden. (Man lese jedoch die von Herrn Fricke, Aut. F. Bd. I, pag. 177—182, gegebenen Entwickelungen).

Ich will noch erwähnen, daß Poincaré und Fricke in Anlehnung an Klein die von mir als hyperbolische Substitutionen zweiter Art bezeichneten Substitutionen überhaupt nicht als hyperbolisch, sondern als loxodromisch bezeichnen. Auch ist die von mir gemachte Unterscheidung von hyper-

Die betreffenden uniformisierenden Transzendenten hängen, was besonders hervorgehoben zu werden verdient, von der besonderen Wahl eines Schnittsystems innerhalb des zu uniformisierenden Gebildes nicht ab, ein Umstand, auf dem die Möglichkeit beruhte, die genannten Transzendenten in der Weise, wie dies hier und in der vorhergehenden Mitteilung geschehen ist, unabhängig von jeder Zerschneidung zu charakterisieren.

Die anderen von Herrn Klein (Math. Annalen Bd. XIX und XXI) aufgestellten auf Gruppen mit imaginären Substitutionen führenden Uniformisierungstheoreme („Fundamentaltheoreme") bleiben weiterer Forschung vorbehalten. Der Unabhängigkeitssatz (Unabhängigkeit der uniformisierenden Transzendenten von der besonderen Wahl der Zerschneidung) gilt übrigens bei diesen in vieler Hinsicht interessanten Theoremen nicht[1]).

Zum Schluß seien noch zwei Bemerkungen gemacht, welche vielleicht geeignet sind, die Bedeutung der vier oben aufgestellten Theoreme in ein noch helleres Licht zu setzen.

Die erste Bemerkung entspricht einer Betrachtung, welche der Verfasser am Schluß der unmittelbar vorhergehenden Note angestellt hat. Faßt man alle diejenigen analytischen Gebilde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit einer unabhängigen Veränderlichen in eine Klasse zusammen, welche der Bedingung genügen, daß je zwei derselben durch eine biuniforme Transformation, d. i. eine umkehrbar eindeutige wechselseitige analytische Zuordnung der inneren (s. oben) Punkte der Gebilde in einander übergeführt werden können[2]), so kann man auf Grund des ersten der obigen vier Theoreme jeder solchen Klasse ein invariantes Normal-

---

bolischen Substitutionen der ersten und zweiten Art nicht mit der von Herrn Fricke (Aut. F.) eingeführten Unterscheidung von Substitutionen erster und zweiter Art zu identifizieren, welche bei Fricke den Unterschied von Transformationen mit Umlegung und ohne Umlegung der Winkel ausdrückt. Daß den von mir als hyperbolisch zweiter Art bezeichneten Substitutionen nicht nur untergeordnete, sondern eine selbständige Bedeutung zukommt, welche eine besondere Bezeichnung dieser Substitutionen rechtfertigen, geht, wie ich glaube, aus meinen Untersuchungen hervor.

1) Während der Unabhängigkeitssatz im Hauptkreisfalle oft betont worden ist, ist auf das Nichtbestehen desselben in den erwähnten Kleinschen Fällen meines Wissens bisher nicht besonders hingewiesen worden.

2) Es läßt sich leicht dartun, daß jede Kurve $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch biuniforme Transformation in eine Kurve (x_1, y_1) transformiert werden kann. Der hier aufgestellte allgemeine Klassenbegriff für beliebige analytische Kurven stimmt, falls es sich speziell um algebraische Kurven handelt, mit dem für diese Kurven von Riemann aufgestellten Klassenbegriff überein.

gebilde in Gestalt einer Gruppe linearer Substitutionen zuordnen. Zieht man nur reelle analytische Kurven in Betracht, so wird der Begriff der Klasse zweckmäßigerweise dadurch verengert, daß nur solche biuniformen Transformationen zugelassen werden, bei welchen die reellen Kurvenpunkte sich wechselseitig entsprechen. Die Existenz eines invarianten Normalgebildes in Gestalt einer Gruppe linearer Substitutionen ergibt sich dann aus dem dritten Theorem.

Die zweite Bemerkung ergibt sich, wenn man die genannten vier Theoreme mit gewissen Resultaten in Verbindung bringt, welche Herr C. Runge[1]) (Acta math. Bd. 6, pag. 229 ff.) entwickelt hat.

Der Begriff des analytischen Gebildes mit einer unabhängigen Veränderlichen hängt nach Weierstraß mit der Aufstellung unendlich vieler gleichmäßig konvergenter Reihen mit rationalen Gliedern zusammen. Jede dieser Reihen stellt das Innere (s. oben) des monogenen Gebildes nur zu einem Teile dar, unter den Reihen befindet sich jedoch stets mindestens eine, welche die Umgebung eines beliebig gewählten inneren Punktes des Gebildes liefert. Es ist nun ein Problem von fundamentaler Bedeutung, ob es möglich ist, das ganze Innere des Gebildes mit einem Schlage durch gleichmäßig konvergente Reihen mit rationalen Gliedern darzustellen. Diese Frage kann auf Grund der hier bewiesenen Uniformisierungssätze, welche geeignete Hülfsveränderliche liefern, und auf Grund der Rungeschen Resultate in bejahendem Sinne beantwortet werden.

Damit ist ein Problem, welches, wie man wohl sagen darf, im Sinne der Weierstraßischen Gedankenbildungen liegt, durch die Anwendung von Prinzipien gelöst, welche dem Riemannschen Ideenkreise eigentümlich sind.

---

1) C. Runge: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen (l. c.; s. insbesondere § 1 der Abhandlung).

Ueber die Radioaktivität der Luft auf dem offnen Meere.

Von

C. Runge.

(Mit 3 Figuren).

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Mai 1907.

Bei Gelegenheit einer Seereise von Hamburg nach Algier im Sommer 1905 habe ich mit den von Herrn Gerdien mit Unterstützung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften konstruierten Apparaten des Göttinger geophysikalischen Instituts die Radioactivität der Luft über dem Meere untersucht. Es wurde ein Kupferdraht von etwa 18 m Länge mit dem einen Ende an dem vorderen Maste aufgeholt mit dem andern Ende an der Brücke befestigt. Beide Enden waren gegen das Schiff isoliert und das untere Ende wurde mit dem negativen Pol einer Batterie von Zambonischen Säulen in leitende Verbindung gebracht, dessen positiver Pol mit dem Schiff verbunden war. Dadurch erhielt der Draht gegen das Schiff eine negative elektrische Spannung von einigen Tausend Volt. Am Morgen des 12. August war die Insel Ouessant passiert und der Kurs auf die nordwestliche Ecke von Spanien genommen worden, die wir am 14. August morgens erreichten. Der Draht wurde am 12. August um Mittag mit der Batterie verbunden und am 13. August um 8 Uhr abends wieder abgeschaltet. Es wehten mäßige östliche Winde; in dieser Richtung war das Land anfänglich vielleicht 120 Seemeilen, gegen Ende der Exposition etwa 300 Seemeilen entfernt.

Nachdem der Draht von der Batterie abgeschaltet war, wurde er so rasch wie möglich auf einen kleinen Rahmen gewickelt, auf

dem er in ein Blättchenelektroskop eingesetzt werden konnte. Das Elektroskop wurde nun wiederholt geladen und es wurde beobachtet, mit welcher Geschwindigkeit die Blättchen zusammenfielen. Die Beobachtung ist auf der See nicht ganz so leicht auszuführen wie auf dem Lande, weil durch die Schiffsbewegungen die beiden Blättchen beständig an dem Skalenbilde hin- und hergeführt werden. Während das eine Blättchen gerade einen Teilstrich der Skala passiert, liest man die Stellung des andern Blättchens ab und findet so die Divergenz der beiden Blättchen. Diese trägt man als Ordinate mit der Zeit als Abscisse auf und erhält so ein Bild, wie sich das Elektroskop entlädt. Die Punkte liegen bei den ersten Entladungen des Elektroskops, soweit die Genauigkeit der Beobachtungen geht, für jede Entladung auf einer Graden. Das Gefälle der Graden ist dem Strom proportional der das Elektroskop entlädt. Nach einer Anzahl von Entladungen aber liegen die Punkte nicht mehr auf einer Graden, weil nun die Entladung so lange Zeit in Anspruch nimmt, daß sich der Entladungsstrom inzwischen merklich ändert. Dann muß man das Gefälle der Kurve für eine festgesetzte Stellung der Blättchen bestimmen. Wenn für alle Entladungen das Gefälle für dieselbe Stellung der Blättchen bestimmt wird, so erhält man Werte, die den Entladungsströmen in den betreffenden Augenblicken proportional sind. Es war mir bequemer den reziproken Wert des Gefälles zu bestimmen durch die Zeit die verstrich, während die Blättchen von einer Divergenz von 18 Skalenteilen auf eine Divergenz von 14 Skalenteilen zusammensanken, für die Kurven ist dabei die Zeit auf der Tangente gemessen, die bei der Divergenz von 16 Skalenteilen die Kurve berührt. In der folgenden Tabelle enthält die mit T überschriebene Kolonne diese Zeiten. Die mit t bezeichnete Kolonne giebt die Zeiten von dem Augenblick der Abschaltung des Drahtes bis zu dem Augenblick dem der beobachtete Wert von T entspricht. Die dritte Kolonne enthält die Logarithmen von T. Sie sind in der Figur 1 und 2 zu den Abszissen t aufgetragen. Der Logarithmus des Entladungsstroms ist nur durch eine Konstante von $-\log T$ verschieden. Er wird demnach durch dieselbe Figur als Funktion der Zeit graphisch dargestellt, nur daß man die Skala der Ordinaten umkehren und von einem andern Nullpunkt anfangen lassen muß, der aber ganz willkürlich bleibt, so lange man über die Einheit nichts festgesetzt hat, in der man den Strom messen will.

t Minuten	T Secunden	$\log T$
7.9	145	2.161
12.2	180	2.255
16.0	180	2.255
20.1	202	2.305
24.9	205	2.312
31.0	240	2.380
35.8	243	2.386
41.1	257	2.410
47.2	305	2.484
56.4	360	2.556
66.1	387	2.588
76.2	478	2.679
90.6	647	2.811
110.3	900	2.954
137.6	1660	3.220
280.0	18700	4.272
1303.0	44700	4.650
2540.0	50400	4.702
3800.0	57600	4.760

Fig 1 (siehe S. 214) stellt die Beobachtungen in den ersten zwei Stunden dar. Der spätere Verlauf ist in Fig. 2 (siehe S. 215) zur Anschauung gebracht mit einem kleineren Maßstab für t und einem größeren Maßstab für $\log T$.

Die Beobachtungen verraten eine starke radioaktive Wirkung des Drahtes und zwar geht aus den letzten Beobachtungen unzweifelhaft hervor, daß sie nicht allein von der Radiumemanation herrühren kann. $\log T$ nimmt in 2500^m um 0,110 zu. Der Logarithmus des Entladungsstroms nimmt also in derselben Zeit um ebensoviel ab und es würde danach, wenn der Logarithmus gleichmäßig abnähme, etwa 114 Stunden dauern, bis er um 0,301 abgenommen hätte d. h. bis der Strom auf die Hälfte seines Betrages gesunken wäre. Es ist indessen auf die letzten Beobachtungen

nicht viel zu geben, weil die Isolation des Elektroskops nicht vollkommen war. Es muß hier wahrscheinlich ein wesentlicher

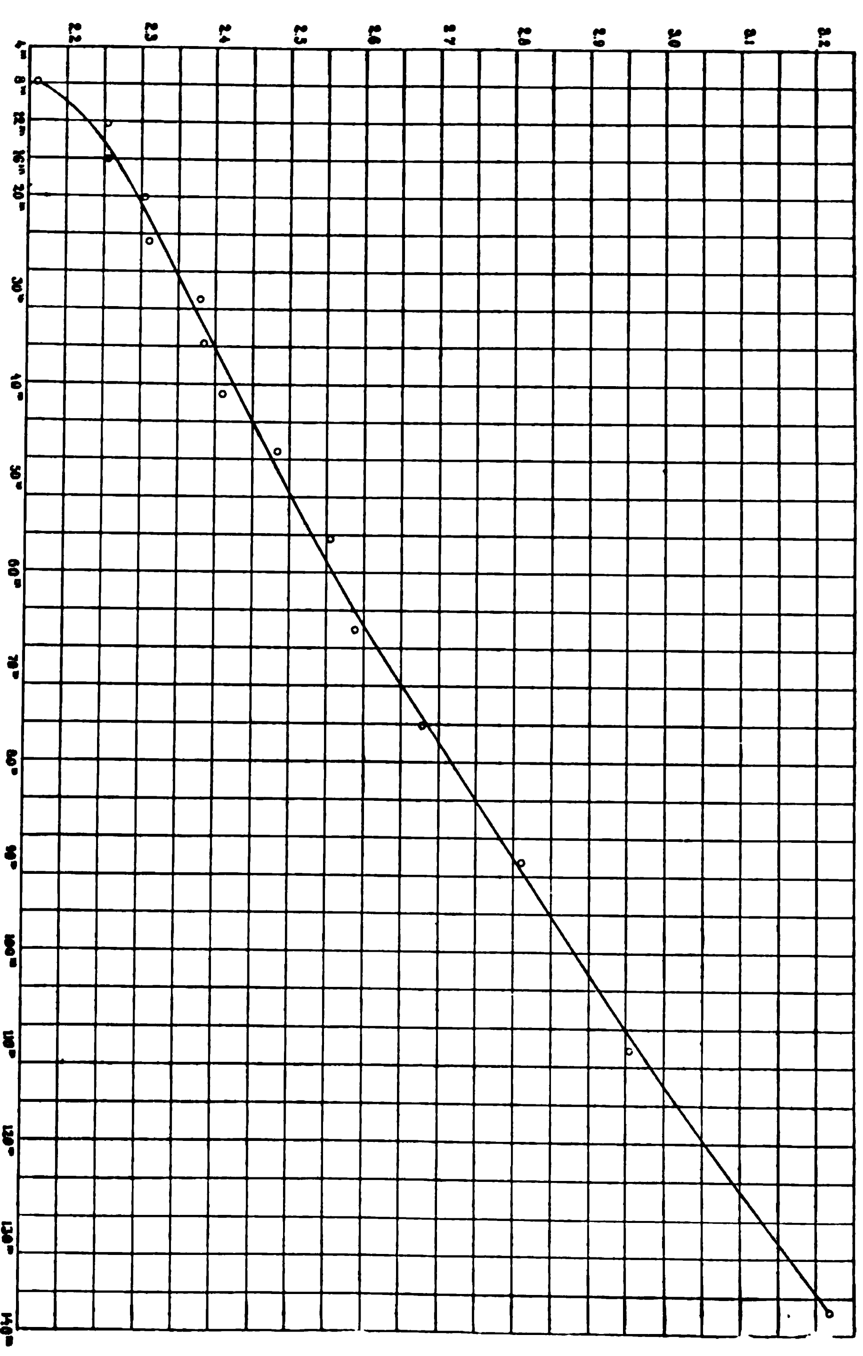


Fig. 1

Teil des Entladungsstroms auf die mangelhafte Isolation geschoben werden. Wenn man diesen Teil abzöge, so würde der übrig bleibende Entladungsstrom kleiner und damit seine relative Abnahme d. i. die Abnahme seines Logarithmus größer. Radium kann nicht die Ursache des übrig bleibenden Entladungsstromes sein, weil seine Wirkung um diese Zeit unmerklich geworden sein würde. Daß Thor die Ursache wäre, ist auch unwahrscheinlich. Denn damit der drittletzte und der letzte Wert der von Thor

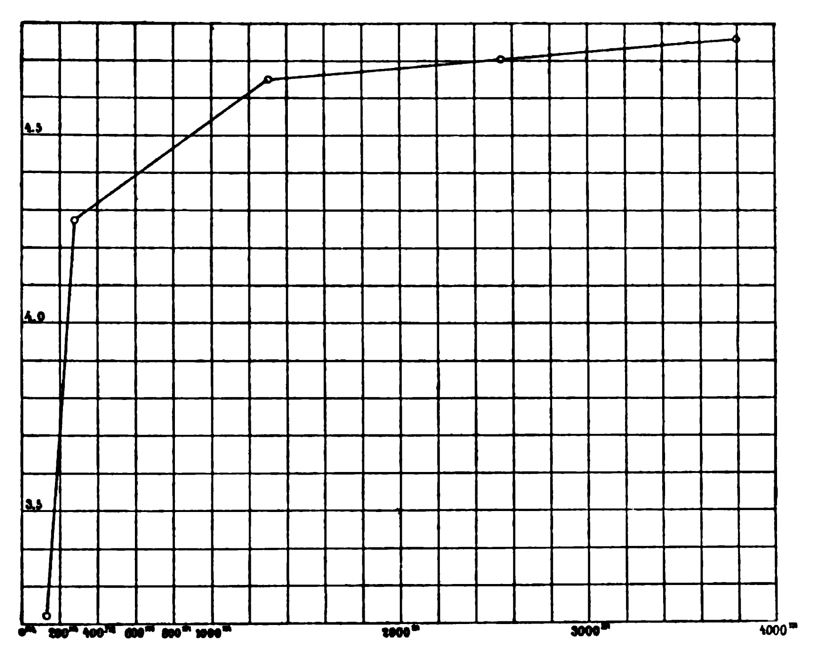


Fig. 2

induzierten Aktivität zugeschrieben werden könnte, die in 660^m auf die Hälfte also in 2500^m etwa auf $^1/_{14}$ sinkt, müßte der Isolierungsfehler beinahe den ganzen letzten Entladungsstrom ausmachen. Das paßt aber schlecht zu dem vorletzten Wert. Jedenfalls zeigt die nahezu lineare Abnahme des Logarithmus in den letzten drei Beobachtungen, daß der durch die mangelhafte Isolation verursachte Entladungsstrom noch nicht erreicht war. Dieser kann daher nur ein kleiner Bruchteil der in den ersten 137^m beobachteten Entladungsströme gewesen sein. Die Korrektur würde klein gegen die Beobachtungsfehler sein.

Es frägt sich, ob die in den ersten 137^m beobachteten Entladungsströme dem Radium zugeschrieben werden können oder ob

noch andere radioaktive Elemente sich verraten. Um die vom Radium induzierte Wirkung mit der auf See beobachteten Radioaktivität zu vergleichen, habe ich in dem von Radium durchseuchten physikalischen Institut der technischen Hochschule zu Hannover den analogen Versuch gemacht, daß ich einen Kupferdraht mit derselben Batterie von Zambonischen Säulen auf ein negatives Potential brachte und das Abklingen seiner radioaktiven Wirkung mit demselben Elektroskop untersuchte, das für die Versuche auf See gedient hatte. Dabei ergiebt sich indessen eine Schwierigkeit. Denn in geschlossenen Räumen wird die induzierte Radioactivität keine gleichmäßige sein. Bei Beginn der Exposition wird der hochgeladene Draht die Zersetzungsprodukte der Radiumemanation aus seiner Umgebung an sich ziehen und sie werden sich nicht rasch genug nachbilden, um sich in gleichmäßigem Strome auf ihm niederzuschlagen. Auf der See dagegen durchschneidet der Draht mit gleichmäßiger Geschwindigkeit immer frische Luftschichten, sodaß hier bei gleichmäßiger Beschaffenheit der Luft in gleichen Zeitelementen immer die gleiche Menge radioaktiver Produkte auf ihm sich absetzt. Um den Laboratoriumsversuch zum Vergleich heranzuziehn, muß man zurückgehn auf die Abklingungskurve des in einem Zeitteilchen auf dem Draht niedergeschlagenen Materials.

Es sei der Draht $d\tau$ Minuten exponiert. t Minuten nach der Exposition sei seine durch den Entladungsstrom in der oben angegebenen Weise gemessene radioaktive Wirkung gleich

$$f(t)\,d\tau.$$

Dann läßt sich berechnen, wie groß seine radioaktive Wirkung t Minuten nach seiner Abschaltung sein würde, wenn er a Minuten in derselben Atmosphäre exponiert worden wäre. Wir brauchen uns die Zeit a seiner Exposition nur in Elemente $d\tau$ zerlegt vorzustellen und zu bedenken, daß die in diesen Elementen auf dem Draht niedergeschlagenen Produkte t Minuten nach der Abschaltung des Drahtes verschiedenen Alters sind, wenn wir ihre Geburt in dem Augenblick annehmen, wo sie auf dem Draht niedergeschlagen werden. Ihr Alter verteilt sich zwischen den Grenzen $t+a$ bis t. Je nach ihrem Alter ist aber die von ihnen herrührende radioaktive Wirkung verschieden; sie ist für ein $t+\tau$ Minuten altes Element

$$f(t+\tau)\,d\tau$$

und daher ist die Gesamtwirkung

$$\int_0^a f(t+\tau)\,d\tau$$

vorausgesetzt, daß während der Exposition in gleichen Zeiten gleiche Mengen auf dem Draht niedergeschlagen werden. Das ist nun zwar im Laboratorium nicht der Fall. Hier wurden die jüngeren Elemente in geringerer Zahl niedergeschlagen und daher könnte man die Gesamtwirkung in der Form ausdrücken

$$\int_0^a \varepsilon(\tau)\,f(t+\tau)\,d\tau$$

wo $\varepsilon(\tau)$ ein echter Bruch ist, der mit τ wächst und für $\tau = a$ den Wert 1 annimmt. Wird nun die Dauer a der Exposition klein genug gewählt, so wird $\varepsilon(\tau)$ nur wenig von 1 verschieden sein. Man wird dann $\varepsilon(\tau)$ mit großer Annäherung durch einen Mittelwert ersetzen und vor das Integral ziehen können. Damit wird die Gesamtwirkung proportional

$$\int_0^a f(t+\tau)\,d\tau.$$

Dies Integral ist also der Laboratoriumsbeobachtung zugänglich und aus ihm läßt sich die Funktion $f(t)$ finden. Hat man aber $f(t)$, so kann man das Integral auch für jeden beliebigen anderen Wert von a berechnen und somit feststellen, ob die auf der See gefundene Radioaktivität auf Radium zurückzuführen ist.

Im Laboratorium habe ich $a = 6$ Minuten genommen. Setzt man

$$F(t) = \int_0^\infty f(t+\tau)\,d\tau \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \int_0^a f(t+\tau)\,d\tau$$

so ist

$$F'(t) = \Big[f(t+\tau)\Big]_{\tau=0}^{\tau=\infty} = -f(t).$$

Mithin wird

$$\varphi(t) = \int_0^a f(t+\tau)\,dt = -F(t+a) + F(t)$$
$$= -F(t+a/2+a/2) + F(t+a/2-a/2)$$

Wir entwickeln die rechte Seite nach Potenzen von $a/2$ und finden

$$\varphi(t) = f(t+a/2)\,a + 2/3!\; f''(t+a/2)\,(a/2)^3 + \cdots$$

Um die Funktion $f(t+a/2)$ aus der beobachteten Funktion $\varphi(t)$ zu finden, kann man in ähnlicher Weise verfahren, wie ich in der

Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 42 S. 205 angegeben habe. Man bildet die 2ten, 4ten, 6ten Differenzen von $\varphi(t)$

$$\Delta^2 \varphi(t) \doteq (\varphi(t+a/2)-\varphi(t))-(\varphi(t)-\varphi(t-a/2))$$
$$\Delta^4 \varphi(t) = (\Delta^2 \varphi(t+a/2)-\Delta^2 \varphi(t))-(\Delta^2 \varphi(t)-\Delta^2 \varphi(t-a/2)) \text{ u. s. w.}$$

und erhält dann $f(t+a/2)$ in eine Reihe entwickelt

$$f(t+a/2)\,a = \varphi(t)+C_1\Delta^2\varphi(t)+C_2\Delta^4\varphi(t)+\cdots$$

wo

$$C_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}.$$

Die Konvergenz der rechten Seite ist daraus zu beurteilen, daß

$$1+|C_1|+|C_2|+\cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

In meinem Fall war schon $\Delta^4\varphi(t)$ nicht mehr zu berücksichtigen, weil es in den Beobachtungsfehlern unterging. Dagegen habe ich das Korrektionsglied $C_1\Delta^2\varphi(t)$ in Rechnung gezogen. Die Logarithmen der beobachteten Werte $\varphi(t)$ wurden aufgetragen und graphisch ausgeglichen. Die graphische Ausgleichung lieferte dann die Werte $\varphi(t)$, $\varphi(t+a/2)$, $\varphi(t+2a/2)$, ... aus denen $\Delta^2\varphi(t)$ gewonnen wurde. Für Werte von t von 20 bis 50 Stunden ergab sich nur eine geringe Abnahme des Entladungsstroms, obwohl ein Entladungsstrom noch deutlich wahrnehmbar war. Der nach 50 Stunden übrig bleibende Reststrom wurde von den ersten Werten des Entladungsstroms abgezogen und die Differenz als Wert von $\varphi(t)$ angenommen.

Die folgende Tabelle enthält die auf diese Weise gewonnenen Werte der Logarithmen von $1/f(t)$. Für die Logarithmen kommt es auf eine additive Konstante nicht an. Die hingeschriebene Charakteristik entspricht der zu Grunde gelegten Entladungsdauer in Sekunden.

t in Minuten	$-\log f(t)$	Formel
10	2.026	2.026
13	2.094	2.088
16	2.115	2.116
19	2.118	2.123

t in Minuten	$-\log f(t)$	Formel
22	2.115	2.122
25	2.112	2.117
28	2.110	2.112
31	2.110	2.110
34	2.111	2.110
37	2.115	2.113
40	2.120	2.118
45	2.135	2.132
50	2.152	2.151
55	2.175	2.174
60	2.200	2.201
70	2.265	2:265
80	2.340	2.337
100	2.502	2.502
150	2.973	2.979
200	3.512	3.505

Die beobachteten Werte von $f(t)$ lassen sich durch die Formel darstellen:

$$f(t) = 0{,}03332.10^{-\lambda_1 t} - 0{,}0990\,10^{-\lambda_2 t} + 0{,}09774\,10^{-\lambda_3 t}$$

wo

$$\lambda_1 = 0{,}07955$$
$$\lambda_2 = 0{,}014828$$
$$\lambda_3 = 0{,}011836$$

Die drei Glieder entspringen aus den drei Zerfallprodukten der Radiumemanation *Ra A*, *Ra B*, *Ra C* (vergl. Rutherford, Radioactivity 2. edition Chap. IX). In der 3. Kolonne sind die aus der Formel berechneten Werte von $-\log f(t)$ zum Vergleich mit den beobachteten zusammengestellt.

Man kann nun für die Berechnung von

$$F(t) = \int_0^\infty f(t+\tau)\,d\tau.$$

Die Formel für $f(t)$ benutzen und findet

$$\log e \,.\, F(t) = 0{,}03332 \cdot \frac{10^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{0{,}0990}{\lambda_2} 10^{-\lambda_2 t} + \frac{0{,}09774}{\lambda_3} 10^{-\lambda_3 t}.$$

Da es auf den konstanten Faktor $\log e$ nicht ankommt, so sind in der folgenden Tabelle die Logarithmen der rechten Seite für $\log F(t)$ gesetzt:

t	$\log F(t)$
10	0.206
15	0.180
20	0.154
25	0.126
30	0.097
35	0.065
40	0.030
45	9.994
50	9.955
60	9.874
70	9.788
80	9.698
90	9.604
100	9.507
120	9.307
140	9.100
160	8.887
180	8.670
200	8.451

Die Tabelle ist bis auf geringe Abweichungen in Uebereinstimmung mit der von Miss Brooks gefundenen durch α Strahlen gemessenen Abklingungskurve für lange Exposition (Rutherford, Radioactivity 2 edit. pag. 308). Ich vermute aber, daß für $t < 10$ sich Abweichungen zeigen würden, weil bei der von mir benutzten Methode, den Entladungsstrom zu messen, auch die β Strahlen in Betracht kommen.

Hiermit haben wir nun die Mittel zu untersuchen, ob und wie

weit die auf der See beobachtete Radioaktivität dem Radium zuzuschreiben ist. Käme Radium allein in Betracht, so müßte der beobachtete Entladungsstrom proportional $F(t)$ sein. Die Logarithmen der Entladungszeiten der Tabelle 1 müßten demnach zu $\log F(t)$ addiert eine Konstante ergeben.

Wir interpolieren die Logarithmen der Entladungszeiten graphisch für die Werte $t = 10, 15, 20 \ldots$, für welche $\log F(t)$ ausgerechnet ist und finden:

t	Logarithmus der Entladungs-zeiten	$\log F(t)$	Summe
10	2.210	0.206	2.416
15	2.258	0.180	2.438
20	2.293	0.154	2.447
25	2.322	0.126	2.448
30	2.357	0.097	2.454
35	2.391	0.065	2.456
40	2.425	0.030	2.455
45	2.458	9.994	2.452
50	2.490	9.955	2.445
60	2.565	9.874	2.439
70	2.640	9.788	2.428
80	2.716	9.698	2.414
90	2.795	9.604	2.399
100	2.880	9.507	2.387
120	3.055	9.307	2.362
140	3.245	9.100	2.345

Wir ersehen aus der 4. Kolonne dieser Tabelle, daß ein erheblicher Bestandteil des Entladungsstromes durch die Annahme des Radium erklärt werden kann. Denn die Summe weicht von einem mittleren Wert um etwa 0,05 nach oben oder unten ab, was einer Abweichung von etwa 12 Prozent entspricht. Es ist aber nicht minder deutlich, daß Radium allein die beobachteten Werte nicht erklärt. Wir sahen schon oben, daß die bei $t = 1303$,

2540, 3800 beobachteten Entladungszeiten auf die Wirkung eines andern radioaktiven Elementes schließen lassen. Die Berücksichtigung der von ihm induzierten Radioaktivität, würde die Unterschiede in den Werten der vierten Kolonne vermindern und möglicherweise beseitigen.

Auch in den beiden ersten Werten der vierten Kolonne verrät sich die radioaktive Wirkung eines andern Elementes und das Resultat der Ueberlegung würde demnach sein, daß außer Radium noch eine andere Ursache vorhanden ist, deren Abklingungskurve logarithmisch aufgetragen zwischen $t = 20$ und $t = 50$ etwa der Abklingungskurve der von Radium induzierten Aktivität parallel ist, vorher aber steiler und nachher flacher verläuft.

Ich habe auf der See außer im Biscayischen Meerbusen auch noch im englischen Kanal und an der Südküste von Spanien die Radioaktivität der Luft untersucht. In beiden Fällen war das Land viel weniger weit entfernt als bei dem oben beschriebenen Versuch. Immerhin scheint es mir von Interesse, das Resultat der Beobachtungen mitzuteilen.

A. Im englischen Kanal.

t	T	$\log T$
14.8^m	1400$^{sec.}$	3.146
49.2	2220	3.346
81.5	3840	3.584
147.5	15600	4.193
566.5	59040	4.771

B. An der Südküste von Spanien.

t	T	$\log T$
6.4^m	95$^{sec.}$	1.978
9.3	107	2.029
12.9	129	2.111
16.6	134	2.127
19.6	136	2.134
23.8	155	2.190
28.0	156	2.193
32.6	174	2.240
37.1	182	2.260
42.8	184	2.265
47.3	213	2.328
53.5	228	2.358
59.0	252	2.401
66.2	298	2.474

t	T	$\log T$
74.2^{m}	368$^{sec.}$	2.566
83.8	420	2.623
97.1	548	2.739
111.7	814	2.911
154.5	2280	3.358
366.5	28740	4.458
1051.5	36600	4.564

Der erste Draht wurde vor der Themsemündung am 10. Aug. 10^{h} morgens mit der Batterie verbunden und etwa bei Ouesssant am 12. Aug. 8^{h} morgens wieder abgeschaltet. In der Nacht vom 10. zum 11. Aug. zerriß er und wurde am 11. Aug. früh wieder zusammengeknüpft. Die Expositionszeit betrug demnach einige Stunden weniger als 46^{h}. Es scheint mir nicht unwahrscheinlich, daß durch das eine Ende des zerrissenen Drahtes die Batterie von Zambonisäulen kurz geschlossen wurde. Dadurch ist sie vielleicht erschöpft worden und hat als der Draht wieder angeknüpft wurde, eine geringere Spannung gehabt.

Die Entladungszeiten sind etwa 8mal größer als die im biscayischen Meerbusen beobachteten. Das Wetter war klar, Wind am 10. Aug. Süd zu West, am 11. Aug. kein Wind. Der andere Draht wurde am 15. Aug. um 3 Uhr nordwestlich von Cap Vincent an der portugiesischen Küste mit der Batterie verbunden und am 17. Aug. um 1 Uhr an der marrokanischen Küste etwa halbwegs zwischen Ceuta und Oran abgeschaltet. Das Wetter war klar. Wind am 15. Aug. nordwestlich, am 16. Aug. morgens nordwestlich, abends westlich, am 17. Aug. westlich. Die Radioaktivität dieses Drahtes ist wesentlich stärker als die im biscayischen Busen beobachtete. Die längere Expositionszeit kann nicht als die Ursache davon angesehen werden. Denn bei einer Exposition von 32 Stunden und mehr wird bei rasch abfallenden Abklingungskurven wie den vorliegenden der Hauptbetrag der induzierten Aktivität von den letzten zwei bis drei Stunden der Exposition herrühren. Die größere Radioaktivität an der spanischen Südküste wird wohl ebenso wie die kleinere im englischen Kanal eine lokale Ursache haben.

In der nachfolgenden Tabelle sind die graphisch interpolierten

Logarithmen der Entladungszeiten mit $\log F(t)$ zusammengestellt und die Summen der entsprechenden Logarithmen gebildet, um zu zeigen, wie die beobachteten Werte von der durch Radium allein induzierten Wirkung abweichen.

t	A $\log T$	B $\log T$	C $\log F(t)$	$A+C$	$B+C$
10		2.060	0.206		2.266
15	3.147	2.112	0.180	3.327	2.292
20	3.173	2.150	0.154	3.327	2.304
25	3.198	2.185	0.126	3.324	2.311
30	3.224	2.215	0.097	3.321	2.312
35	3.256	2.242	0.065	3.321	2.307
40	3.288	2.270	0.030	3.318	2.300
45	3.317	2.300	9.994	3.311	2.294
50	3.353	2.335	9.955	3.308	2.290
60	3.421	2.420	9.874	3.295	2.294
70	3.494	2.502	9.788	3.282	2.290
80	3.573	2.595	9.698	3.271	2.293
90	3.653	2.688	9.604	3.257	2.292
100	3.741	2.782	9.507	3.248	2.289
120	3.921	2.990	9.307	3.228	2.297
140	4.116	3.205	9.100	3.216	2.305
160		3.423	8.887		2.310

Die Radioaktivität des im englischen Kanal exponierten Drahtes (A) ist der im biscayischen Meerbusen gefundenen proportional und weist auf die Wirkung desselben radioaktiven Körpers neben Radium hin. Dagegen stimmt die Abklingungskurve für den an der spanischen Küste exponierten Draht (B) von $t = 15^m$ bis $t = 160^m$ mit der Abklingungskurve der durch Radium allein induzierten Aktivität überein. Nur vor $t = 15$ ist eine Abweichung deutlich zu erkennen. Hier ist der Entladungsstrom stärker als er bei der alleinigen Wirkung von Radium sein würde. Auch die bei $t = 366^m$ nnd 1051^m beobachteten Entladungszeiten sind weder durch Radium noch durch Thor zu erklären, es sei denn, daß das

Elektroskop hier einen größeren Isolationsfehler erhalten hätte, als bei den andern beiden Drähten vorhanden war. In der Fig. 3 (s. S. 226) sind die Logarithmen der Entladungszeiten für die drei Drähte als Funktionen der Zeit t aufgetragen wie sie beobachtet worden sind, nur sind sie um eine solche Konstante geändert, daß sie zwischen $t = 20$ und $t = 50$ ungefähr die gleiche Kurve ergeben. Die ausgezogene Linie entspricht den Logarithmen der Entladungszeiten wie sie sich bei der Wirkung von Radium allein ergeben müßten.

Eine Bestimmung der Radioaktivität der Luft, die ich vor der Seereise auf dem Hainberge bei Göttingen gemacht habe, ergab, daß die auf dem Draht induzierte Wirkung genau zusammengesetzt war aus der Wirkung von Radium und von Thor und auf keine anderen radioaktiven Elemente schließen läßt. Die Entladungsströme wurden mit demselben Elektroskop gemessen wie auf See; aber man konnte bei dem feststehenden Instrument die Ablesungen an einem Blättchen allein machen und konnte mit Vorteil eine Lupe anwenden. Wenn das Blättchen einen bestimmten Skalenteil passierte, wurde eine Stoppuhr in Gang gesetzt und festgehalten, sobald es einen bestimmten andern Skalenteil erreichte. Der Entladungsstrom wurde der so erhaltenen Entladungsdauer umgekehrt proportional gesetzt. Das hat kein Bedenken, wenn der Strom während der Entladungsdauer hinreichend konstant bleibt, was hier der Fall war. Der beobachtete Entladungsstrom setzt sich aus den folgenden beiden Beträgen zusammen. Der eine von Radium herrührende ist der oben angegebenen Funktion $F(t)$ proportional und zwar gleich

$$0{,}5430\, F(t).$$

Der andere Bestandteil rührt vom Thor her und kann aus der von Rutherford angegebenen Formel berechnet werden. Denn es ist hier ganz gleich, ob die Abklingungskurve mit Hilfe der α oder den β Strahlen oder beiden gemessen wird, weil von den beiden Zerfallprodukten der Thoremanation nur das eine Strahlen aussendet. Für unendlich lange Exposition ist der Entladungsstrom t Sekunden nach der Abschaltung porportional

$$\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \text{ [1]} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.75 \times 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1} \\ \lambda_2 &= 2.08 \times 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1} \end{aligned}$$

---

1) Rutherford, Radioactivity 2. edit. Chap. X.

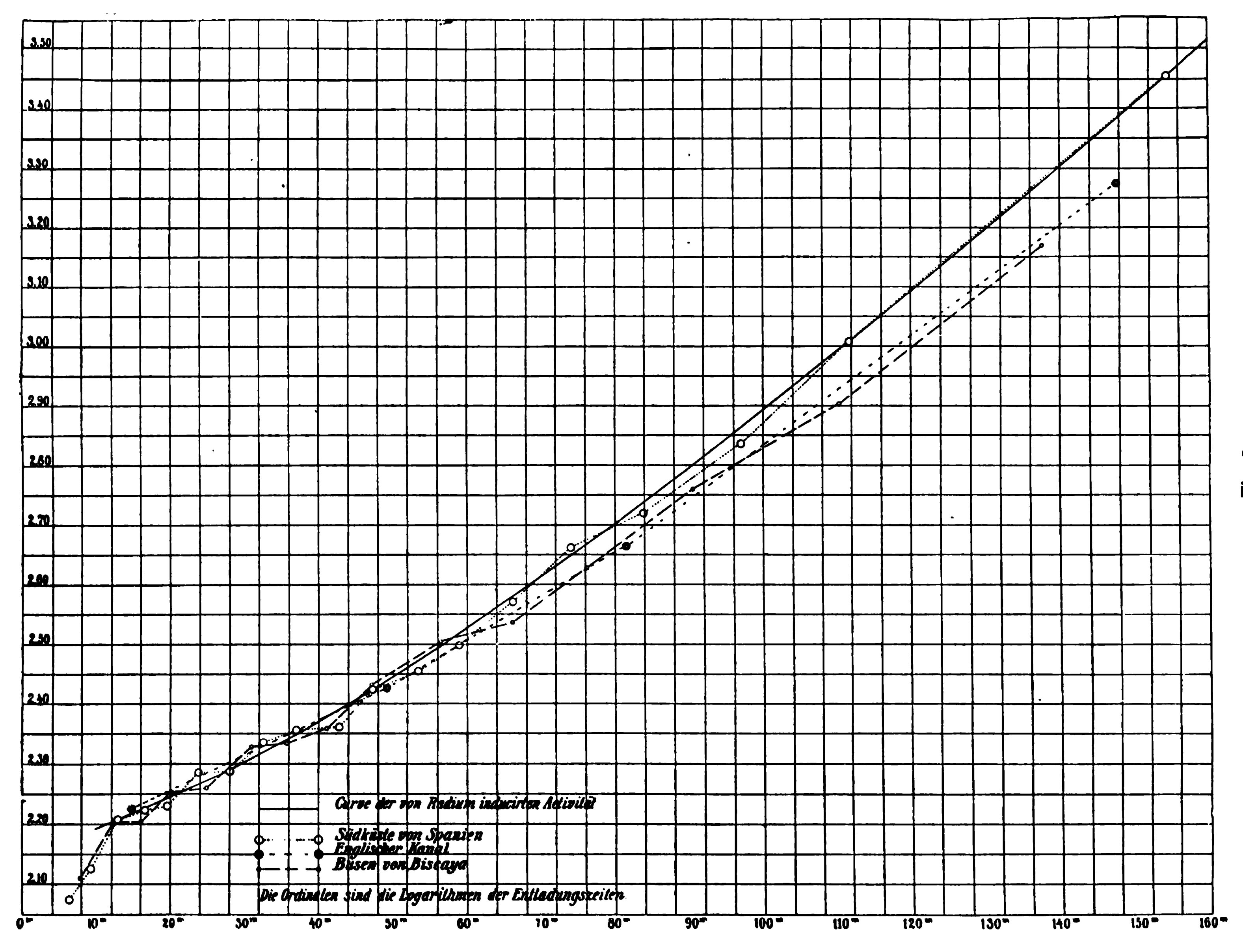

3.50
3.40
3.30
3.20
3.10
3.00
2.90
2.80
2.70
2.60
2.50
2.40
2.30
2.20
2.10
Curve der von Radium inducirten Activität
Südküste von Spanien
Englischer Kanal
Busen von Biscaya
Die Ordinaten sind die Logarithmen der Entladungszeiten.
0 m
10 m
20 m
30 m
40 m
50 m
60 m
70 m
80 m
90 m
100 m
110 m
120 m
130 m
140 m
150 m
160 m

Fig. 3

oder wenn t die Minutenzahl bedeutet und 10 als Basis eingeführt wird, proportional

$$\Phi(t) = \frac{10^{-0,000456 \cdot t}}{4,56} - \frac{10^{-0,00541 \cdot t}}{54,1}.$$

Für eine Expositionsdauer von a Minuten ist dann der Entladungsstrom proportional

$$\Phi(t) - \Phi(t+a).$$

In unserm Falle ist er gleich

$$3,279\ (\Phi(t) - \Phi(t+a)).$$

Die folgende Tabelle enthält die beiden berechneten von Radium und von Thor herrührenden Bestandteile. Die dritte Kolonne giebt ihre Summe; die vierte die beobachteten Werte. Diese sind die mit 100 multiplizierten reziproken Werte der in Sekunden gemessenen Entladungszeiten während das Blättchen des Elektroskops auf der Skala von 15 auf 10 fiel. Bis $2^h 45^m$ nach der Abschaltung sind die beobachteten Werte graphisch interpoliert. Von da ab sind die Einzelbeobachtungen aufgeführt, weil die Beobachtungen nun weniger dicht aufeinander folgen und daher eine graphische Interpolation nicht mehr mit Sicherheit ausgeführt werden kann.

Zeit von dem Augenblick der Abschaltung an	Entladungsstrom der Radium-Induktion berechnet	Entladungsstrom der Thor-Induktion berechnet	Summe der beiden Beträge berechnet	Entladungsstrom beobachtet	Differenz
15^m	0.821	0.501	1.322	1.319	− 0.003
30	0.678	0.501	1.179	1.182	+ 0.003
45	0.535	0.500	1.035	1.039	+ 0.004
1^h	0.406	0.497	0.903	0.905	+ 0.002
1 15	0.300	0.494	0.794	0.791	− 0.003
1 30	0.218	0.490	0.708	0.705	− 0.003
1 45	0.156	0.486	0.642	0.636	− 0.006
2	0.110	0.480	0.590	0.584	− 0.006
2 15	0.077	0.475	0.552	0.556	+ 0.004

Zeit von dem Augenblick der Abschaltung an	Entladungsstrom der Radium-Induktion berechnet	Entladungsstrom der Thor-Induktion berechnet	Summe der beiden Beträge berechnet	Entladungsstrom beobachtet	Differenz
$2^h 30^m$	0.054	0.469	0.523	0.521	− 0.002
2 45	0.037	0.464	0.501	0.498	− 0.003
3 15	0.017	0.451	0.468	0.461	− 0.007
3 20	0.015	0.449	0.464	0.463	− 0.001
3 25	0.013	0.447	0.460	0.446	− 0.014
8 13	—	0.334	0.334	0.341	+ 0.007
8 21	—	0.331	0.331	0.338	+ 0.007
8 28	—	0.329	0.329	0.333	+ 0.004
19 23	—	0.166	0.166	0.168	+ 0.002
19 36	—	0.163	0.163	0.165	+ 0.002
19 48	—	0.161	0.161	0.161	0.000
20 48	—	0.151	0.151	0.154	+ 0.003
21 3	—	0.149	0.149	0.148	− 0.001
21 42	—	0.143	0.143	0.143	0.000
23 30	—	0.128	0.128	0.128	0.000
23 46	—	0.126	0.126	0.124	− 0.002
24 1	—	0.124	0.124	0.121	− 0.003
33 3	—	0.070	0.070	0.078	+ 0.008
45 52	—	0.0314	0.0314	0.0307	− 0.0007
48 15	—	0.0270	0.0270	0.0262	− 0.0008
49 26	—	0.0250	0.0250	0.0239	− 0.0011
50 42	—	0.0231	0.0231	0.0232	+ 0.0001
68 55	—	0.0074	0.0074	0.0082	+ 0.0008
72 52	—	0.0057	0.0057	0.0069	+ 0.0012
77 20	—	0.0043	0.0043	0.0056	+ 0.0013

Die Beobachtung $33^h 3^m$ nach der Abschaltung: 0,078 zeigt eine zu große Abweichung. Sie erklärt sich wahrscheinlich daraus, daß diese Beobachtung des Nachts gemacht wurde, wobei viel-

leicht der Schein der Lampe das Blättchen erwärmte, das dadurch seine normale Gestalt veränderte. Auch bei den letzten drei Beobachtungen sind die Abweichungen relativ groß. Abgesehen hiervon stimmen die beobachteten Werte mit den berechneten vorzüglich überein. Die Radium- und Thorinduktion erklären die beobachteten Werte so weit die Genauigkeit der Beobachtung reicht. Nach den Entladungszeiten muß die Radiuminduktion drei bis vier Mal stärker gewesen sein als bei den auf der See beobachteten Drähten, was zum Teil an der stärkeren Ladung gelegen haben mag, die auf dem Lande mit einer Influenzmaschine aufrecht erhalten wurde an Stelle der auf See verwendeten Batterie von Zambonischen Säulen. Die Thorinduktion ist schon am Anfang fast so stark wie die Radiuminduktion und überwiegt dann alsbald durch ihr langsameres Abklingen.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XVII.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni 1907.

I. Ueber sauerstoffhaltige Derivate des Sylvestrens.

Sauerstoffhaltige Verbindungen der Sylvestren-Reihe sind bisher noch nicht bekannt geworden. Ich habe daher gesucht, diese Lücke auszufüllen, um so mehr als ein Studium der sauerstoffhaltigen Terpenderivate sich bisher für Constitutionsfeststellungen immer als besonders geeignet erwiesen hat. Das Verfahren, welches ich ausgearbeitet habe, um in halogenisierten Terpenverbindungen Halogen durch Hydroxyl zu ersetzen [1]) hat sich auch unter Anwendung von Sylvestrenbihydrochlorid als sehr brauchbar heraus gestellt.

Man kann sowohl zu dem Terpineol als auch zu dem Terpin der Sylvestren-Reihe leicht gelangen, wenn man in folgender Weise verfährt:

Je 10 g Sylvestrenbichlorhydrat, $C_{10}H_{16}.2HCl$, vom Schmelzpunkt 72° werden mit einer heißen Lösung von 10 g Aetzkali in 500 ccm Wasser in einem geeigneten verschlossenen Gefäß auf der Schüttelmaschine durchgeschüttelt und das Gefäß dabei so warm gehalten, daß sich das Chlorid nicht wieder fest ausscheiden kann. Nach etwa 5 Stunden wird das Product mit Wasserdampf abdestilliert und falls es sich als noch chlorhaltig erweist, nochmals mit frischer Kalilauge durchgeschüttelt, bis alles Chlor aus der

1) Annalen 350, 153.

organischen Substanz herausgenommen ist und dann wieder mit Wasserdampf destilliert.

Die flüchtigen Zersetzungsproducte, enthalten neben etwas Kohlenwasserstoff wesentlich das Sylveterpineol, das in bekannter Weise isoliert und durch Destillation gereinigt werden kann. In den alkalischen Rückständen von der Wasserdampfdestillation ist das Sylveterpin zu suchen. Man gewinnt es durch Extraktion mit Chloroform. Wird das Chloroform abdestilliert und der Rückstand mit Aether versetzt, so wird die darin schwerlösliche Substanz fest und kann aus Essigester umkrystallisiert werden. In diesem löst sich das Rohprodukt leicht, das reine Produkt etwas schwerer.

Die Ausbeuten an den neuen Substanzen lassen wenig zu wünschen übrig. Sie betragen etwa 70 % der Theorie an Terpineol und 25 % der Theorie an Terpin.

Ueber das Verhalten ist folgendes mitzuteilen:

Sylveterpin, $C_{10}H_{18}(OH)_2$.

Die Verbindung bildet aus Essigester umkrystallisiert, scharf ausgebildete, durchsichtige Krystalle vom Schmelzpunkt 135—136° und ist in Wasser und in Alkohol viel löslicher als die Terpine der Dipentenreihe.

0,1305 g gaben 0,3325 CO_2 und 0,1402 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{20}O_2$	Gefunden
C. 69,70	69,49
H. 11,71	12,02

Das Glycol ist optisch activ im Sinne des Ausgangsmaterials,

$S = 0,7940$, L (Methylalkohol) $= 8,9907$, $d = 0,816$,
$t = 15°$, $p = 8,12\,\%$, $l = 1\,dm$, $\alpha = +1°49'$
$[\alpha]_D = +27,43°$.

Sylveterpineol, $C_{10}H_{17}OH$.

Die flüchtige Verbindung besitzt einen intensiven, von den sonst bekannten Terpineolen ganz verschiedenen Geruch und siedet bei gewöhnlichem Druck in der Hauptmenge zwischen 210—214°.

$d = 0,924$, $n_D = 1,4822$ bei 22°, $M = 47,53$ (ber. für $C_{10}H_{17}OH\Gamma = 47,96$)

beim Durchschütteln mit concentrirter Chlorwasserstoffsäure erstarrt der Alkohol schnell unter Bildung des bei 72° schmelzenden Sylvestrenbihydrochlorids.

Schüttelt man das Sylveterpineol unter den üblichen Bedin-

gungen mit 1 %igem Kaliumpermanganat in der Kälte, so erhält man das zugehörige Glycerin $C_{10}H_{17}(OH)_3$, welches sich in bekannter Weise isolieren läßt.

Die Verbindung siedet unter 11mm bei 165° und bildet ein fast farbloses dickes Oel, welches keine Neigung zum Erstarren zeigt:

0,1319 g gaben 0,3085 CO_2 und 0,1290 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O_3$	Gefunden
C. 63,77	63,79
H. 10,72	10,96

Bei der weiteren Oxydation mit Chromsäure und verdünnter Schwefelsäure (auf 2 Mol. Glycerin, 2 Mol. CrO_3 und 3 Mol. SO_4H_2) entstand aus dem Glycerin ein aldehydartig riechendes Oel, welches Silberlösung stark reducierte, aber in einer zur Untersuchung genügenden Menge bisher nicht erhalten wurde.

Sylvecarvon, $C_{10}H_{14}O$.

Reines Sylvestren wurde in das Nitrosochlorid übergeführt und aus dem in nur mäßiger Ausbeute entstehenden Chlorid Salzsäure abgespalten. Das resultierende Oxim wurde nicht in festem Zustand erhalten. Beim Kochen desselben mit Mineralsäuren trat ein carvacrolartig riechendes Oel auf. Das Oxim wurde daher durch Kochen mit Oxalsäure hydrolytisch gespalten und dabei die Entstehung eines Oels beobachtet, das einen eigenartigen, an kein bekanntes Keton erinnernden Geruch besaß. Die Substanz ging an Semicarbazid und lieferte damit ein in Methylalkohol ziemlich schwer lösliches Semicarbazon, das in Nädelchen vom Schmelzpunkt 175—177° krystallisierte.

0,0892 g gaben 0,2077 CO_2 und 0,0688 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{14}NNHCONH_2$	Gefunden
C. 63,68	63,51
H. 8,27	8,65

Man hat es also mit einer Verbindung von der Zusammensetzung des Carvons zu tun. Die weitere Untersuchung mußte aus Mangel an dem so schwer zugänglichen Ausgangsmaterial vorläufig abgebrochen werden.

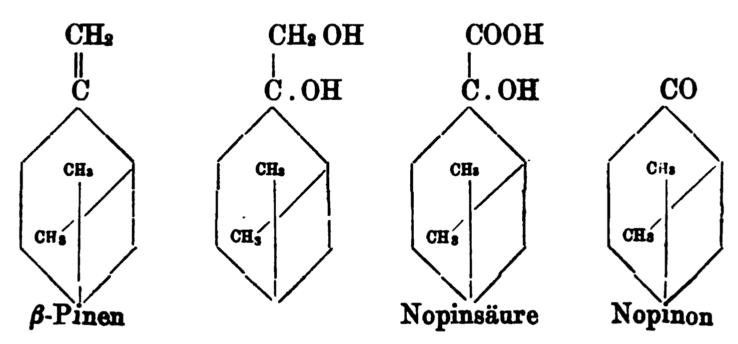
II. Ueber Nopinon.

[Mitbearbeitet von Arnold Blumann.]

Unter den Oxydationsprodukten des Terpentinöls mit Permanganat entdeckten bekanntlich 1896 v. Baeyer und Villiger[1])

1) Ber. 29, 25. 1923.

die **Nopinsäure**, $C_{10}H_{16}O_3$, welche bei weiterer Oxydation das **Nopinon** $C_9H_{14}O$ lieferte. Anfangs wurden diese Substanzen als Abbauproducte des gewöhnlichen Pinen (α-Pinen) angesprochen. Später kam man zu der Ansicht, daß in dem Terpentinöl noch ein isomerer Kohlenwasserstoff, das Nopinen (β-Pinen), enthalten sei, dessen Abbau bei der Oxydation im Sinne folgenden Schema's verlaufen kann:



Das Nopinon war bisher aber nur in so spärlicher Menge erhalten worden, daß — außer dem Siedepunkt — noch nicht einmal die physikalischen Constanten bestimmt worden sind.

Es war daher wünschenswert, das Keton in etwas größerer Menge zu bereiten, um so mehr, da man die Hoffnung hegen konnte, mit seiner Hülfe eine Reihe von interessanten Synthesen durchzuführen. In wie weit das bisher gelungen ist, wird aus dem folgenden hervorgehen.

Darstellung der Nopinsäure und von Nopinon.

Das von den Entdeckern für Gewinnung der Nopinsäure eingeschlagene Verfahren[1]) ist, wenn man größere Mengen der Säure darstellen will, etwas sehr umständlich. Ich habe nun mit Erfolg versucht, die Darstellung der Nopinsäure aus β-Pinen haltigen Terpentinölen dadurch erheblich zu vereinfachen, daß zur Abscheidung der Säure aus den ursprünglichen Oxydationslaugen die **Schwerlöslichkeit des Natriumsalzes** benutzt wurde, welche schon von v. **Baeyer** und **Villiger** erwähnt worden ist und welche eine charakteristische Eigenschaft aller α-Oxysäuren zu sein scheint.

Es wurde folgendes Verfahren eingeschlagen: Je 300 g Pinen werden frisch aus Terpentinöl herausfractioniert und mit einer

1) Ber. 29, 22. 25 (1896).

Auflösung von 700 g Kaliumpermanganat in 9 Liter Wasser unter Zusatz von 150 g Aetznatron auf der Schüttelmaschine durchgeschüttelt. Die Flüssigkeit erwärmt sich dabei erheblich und die Oxydation ist in etwa 20 Minuten beendet, während ohne Zusatz von Alkali etwa 2 Stunden erforderlich sind, bis das Permanganat verbraucht ist. Alkali bewirkt also eine starke Beschleunigung der Oxydation. Nun wird nicht angegriffener Kohlenwasserstoff im Dampfstrom abgeblasen, vom Braunstein abfiltrirt und die Oxydationsflüssigkeit unter Einleiten von Kohlensäure auf etwa 3 Liter eingedampft. Nach dem Erkalten krystallisiert nopinsaures Natrium aus, das abgesaugt und durch Umkrystallisieren gereinigt wird.

Die Ausbeute richtet sich natürlich nach dem Gehalt des angewandten Terpentinöls an β-Pinen (Nopinen) und wird im Durchschnitt höchstens auf 2,5—5 % von Gewicht des angewandten Pinen an nopinsaurem Natrium zu veranschlagen sein. Das Verfahren ist auch sehr anwendbar, um vergleichende Versuche über den Gehalt an β-Pinen in verschiedenen Terpentinölsorten anzustellen, welche sehr verschiedene Ausbeuten an Nopinsäure liefern.

Zuletzt hier verarbeitetes amerikanisches Terpentinöl lieferte z. B. viel bessere Ausbeute an Nopinsäure als französisches Oel. Dieselben Erfahrungen hat die Firma Schimmel & Co. gemacht, welcher ich für die große Liberalität, mit welcher sie mir nach dem oben angegebenen Verfahren nopinsaures Natrium herstellte, zu sehr großem Dank verpflichtet bin, da mit Hülfe dieses Materials die Untersuchung ganz wesentlich gefördert werden konnte.

Die Nopinsäure ist optisch activ. Diese Tatsache ermöglichte es, der Frage näher zu treten, ob im rechts- und im links drehenden Terpentinöl dasselbe die Nopinsäure liefernde β-Pinen enthalten sei, oder die beiden sich entsprechenden Spiegelbildformen. Im ersteren Fall mußte man zu identischen, im letzteren zu optisch sich entgegengesetzt verhaltenden Nopinsäuren gelangen, wenn man die optisch differenten Terpentinsorten oxydierte.

Das Resultat war folgendes:

1) Nopinsäure (Schmelzp. 126°) aus rechts drehendem amerikanischem Terpentin:

$$S = 1{,}2939, \quad L(\text{Aether}) = 6{,}7411, \quad d = 0{,}781, \quad t = 17^\circ,$$
$$p = 16{,}1\,\%, \quad l = 1\text{ dm}, \quad \alpha_D = -1^\circ 58'$$
$$[\alpha]_D = -15{,}64^\circ.$$

2) Nopinsäure (Schmelzp. 126°) aus linksdrehendem französischen Terpentin:

$$S = 0{,}9956, \quad L\,(\text{Aether}) = 4{,}7875, \quad d = 0{,}782, \quad t = 17{,}5^0,$$
$$p = 17{,}22\,\%, \quad l = 1\,\text{dm}, \quad \alpha_D = -2^0\,6'$$
$$[\alpha]_D = -\mathbf{15{,}60^0}.$$

Die Nopinsäuren aus den beiden verschiedenen Quellen sind also vollständig identisch und daraus darf man schließen, daß der Ausgangskohlenwasserstoff in den beiden verschieden drehenden Oelen chemisch und physikalisch derselbe ist. Das stimmt vollkommen mit meinen neulich [1]) mitgeteilten Beobachtungen über das s. g. Amidoterebenten überein, von dem nachgewiesen wurde, daß es ein Derivat des β-Pinens ist und welches in derselben activen Modification erhalten wird, sei es, daß man von rechts drehendem oder links drehendem Terpentinöl ausgeht.

Für Gewinnung des Nopinons schlägt v. Baeyer vor, die freie Nopinsäure (ohne Zusatz von Mineralsäure) mit Bleisuperoxyd zu oxydieren. Beim Arbeiten mit wenigen Gramm geht das gut durchzuführen. In größerem Maßstabe giebt das Verfahren aber sehr mangelhafte Ausbeute und ist wegen der Bildung der großen Mengen unlöslicher Bleiverbindungen sehr lästig. Oxydation bei Anwesenheit überschüssiger freier Säure ist, wie v. Baeyer auch schon angegeben hat, wegen der Veränderlichkeit des Nopinons durch Säuren (s. unten) zu vermeiden. Man kann nun sehr schnell und bequem unter directer Verwendung des bei der Oxydation des β-Pinens gewonnenen Natriumsalzes die Oxydation in folgender Weise leiten:

Je 10 g nopinsaures Natrium werden in 100 ccm heißem Wasser gelöst und eine Auflösung von 3 gr Kaliumpermanganat in 75 ccm Wasser hinzugegeben. Dabei bleibt das nopinsaure Natrium ganz unverändert. Mischt man nun aber der Flüssigkeit 2 gr conc. Schwefelsäure hinzu, die vorher mit 20 ccm Wasser verdünnt wurde, so setzt sofort eine lebhafte Kohlensäureentwickelung ein und das Permanganat wird schnell verbraucht. Leitet man, sobald die Oxydation begonnen hat, Wasserdampf durch die Masse, so wird das entstandene Nopinon mitgeführt, durch Aussalzen und Ausäthern der Flüssigkeit isoliert und durch Destillation in ganz reinem Zustand erhalten. Bei Anwendung der angegebenen Menge Schwefelsäure reagiert der Reactionsrückstand vollständig neutral und enthält noch unoxydiertes nopinsaures Salz. Um dies auszunutzen, säuert man den Kolbeninhalt

1) Annalen **346**, 243.

mit Schwefelsäure an und gewinnt dann bei der Dampfdestillation noch weitere Mengen Nopinon, die aber nicht mehr ganz so rein sind als die ersten Antheile und daher zweckmäßig nicht mit jenem vermischt werden. Die Gesamtausbeute an Keton war bei dem eingeschlagenen Verfahren auch nicht sehr gut, sie betrug aus 100 gr nopinsaurem Natrium durchschnittlich 43 gr Nopinon.

Eigenschaften des Nopinon.

Das reine Nopinon siedet constant bei 209° und erstarrt in einer Kältemischung sehr leicht zu einer Krystallmasse, die etwas oberhalb 0° wieder schmilzt. Die physikalischen Constanten wurden an Präparaten von verschiedenen Darstellungen übereinstimmend wie folgt, ermittelt:

$$d = 0{,}981, \quad n_D = 1{,}4787 \text{ bei } 20^0, \quad M = 39{,}87.$$

Für $C_9H_{14}O$ berechnet sich $M = 39{,}51$. Die Art der Atomverkettung im Nopinon bedingt also ein Refractionsincrement, das auf etwa 0,4 zu veranschlagen ist.

Das Nopinon ist rechtsdrehend und zwar wurde gefunden:

1) $\alpha = +18^0 10'$, $l = 1$ dm, $d = 0{,}983$, $t = 18^0$, $[\alpha]_D = +18{,}48$

2) $\alpha = +18^0 11'$, $l = 1$ dm, $d = 0{,}9845$, $t = 16^0$, $[\alpha]_D = +18{,}47$

Die optische Activität des Nopinons ist von besonderem Interesse, weil wir im Nopinon die erste Terpenverbindung ohne Seitenkette vor uns haben, an welcher optische Aktivität beobachtet wird.

Außerordentlich auffallend ist die starke Steigerung, welche die Drehungsintensität des Nopinons in alkoholischer Lösung erfährt, was auf die Entstehung einer Verbindung hinzudeuten scheint. Diesbezüglich wurde ermittelt:

1) $S = 1{,}0632$, L(Alkohol) $= 7{,}5388$, $d = 0{,}832$, $t = 18^0$,
$p = 12{,}36\ \%$, $l = 1$ dm, $\alpha = +3^0 50'$
$[\alpha]^D = +37{,}27$

2) $S = 1{,}0419$, L(Alkohol) $= 7{,}5705$, $d = 0{,}829$, $t = 14^0$,
$p = 12{,}1\ \%$, $l = 1$ dm, $\alpha = +3^0 45'$
$[\alpha]_D = +37{,}39$

3) $S = 1{,}0580$, L(Alkohol) $= 14{,}0584$, $d = 0{,}82$, $t = 18^0$,
$p = 7\ \%$, $l = 2$ dm, $\alpha = +4^0 22'$
$[\alpha]_D = +38{,}04$.

In anderen Lösungsmitteln erwies sich die Drehung des Nopinons geringer als in unverdünntem Zustand, wie sich aus folgendem ergiebt:

S = 1,0055, L (Aether) = 13,0559, d = 0,7405, t = 14°,
p = 7,15 %, l = 2 dm, $\alpha = +1^{0} 10'$
$[\alpha]_D = +11,02$

S = 1,0292, L (Benzol) = 7,2959, d = 0,899, t = 17°,
p = 12,36 %, l = 1 dm, $\alpha = +1^{0} 13'$
$[\alpha]_D = +10,95$

S = 1,0920, L (Benzol) = 13,9292, d = 0,893, t = 17°,
p = 7,27 %, l = 2 dm, $\alpha = +1^{0} 24'$
$[\alpha]_D = +10,79$.

Daß das Nopinon sich sehr leicht mit Benzaldehyd zu der schön krystallisierenden bei 106—107° schmelzenden Verbindung $C_9H_{12}O: CHC_6H_5$ condensieren läßt, habe ich früher[1]) schon angegeben. Das Nopinon zeigt aber auch eine große Neigung zur Selbstcondensation. Das tritt in auffallender Weise hervor, wenn man eine alkoholische Lösung von Nopinon mit Chlorwasserstoffsäure sättigt. Nach einigen Stunden scheidet sich eine krystallinische Verbindung aus der Lösung aus, die abfiltriert und mit Aether — in dem sie in der Kälte sehr schwer löslich ist — nachgewaschen wird. Man kann die Verbindung auch umkrystallisieren und dann in dicken Prismen krystallisiert erhalten. Dabei findet aber gewöhnlich schon eine partielle Zersetzung statt und daher ist die Analyse zweckmäßig mit nicht umkrystallisierter Substanz auszuführen. Das Chlorid ist dadurch charakterisiert, daß es sich bei 148° unter Gasentwickelung zersetzt. Die Analyse dieser Substanz führt zu der Formel $C_{18}H_{29}OCl_3$:

1) 0,1379 gr gaben 0,2981 CO_2 und 0,0978 H_2O
2) 0,1592 „ „ 0,1851 AgCl
3) 0,1334 „ „ 0,1580 „

Berechnet für $C_{18}H_{29}OCl_3$	Gefunden		
	1	2	3
C. 58,77	58,95	—	—
H. 7,95	7,94	—	—
Cl. 28,93	—	28,68	29,29

Es ist danach ganz klar, daß das Nopinon sich unter dem Einfluß der Salzsäure unter Wasseraustritt (ganz analog wie z. B. Cyklo-Hexanon)[2]) condensirt, daß die dabei entstandene Kohlenstoffdoppelbindung gleichzeitig unter Addition von 1 Mol.

1) Diese Annalen **313**, 365 (1900). Auf analoge Condensationsproducte werde ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen.

2) Ber. **29**, 2965 (1896); **40**, 70 (1907).

HCl gelöst wird und daß ferner der Vierring in den beiden zur Vereinigung gekommenen Molekülen gleichfalls unter Salzsäureaufnahme gesprengt wird. Mit Zugrundelegung der Nopinonformel läßt sich der Vorgang folgendermaßen verdeutlichen:

O, CH_3, H_3C; 2 [...] = H_2O + [...] CH_3, CH_3 = [...] O, CH_3, CH_3 + 3HCl

= $\frac{CH_3}{CH_3}$>C(Cl)– [...] Cl, O [...] CCl, CH_3 CH_3

Das schwer lösliche bei 148° sich zersetzende Trichlorid giebt nun sehr leicht — z. B. schon beim längeren Kochen mit Lösungsmitteln oder bei der Digestion mit 1 Mol. Natriumäthylat 1 Mol. HCl ab und verwandelt sich in ein aus Alkohol in Nadeln krystallisirendes, bei 125—126° ohne Zersetzung schmelzendes Bichlorid, welches in Alkohol und namentlich auch in Aether viel leichter löslich ist als das Trichlorid. Leitet man in die alkoholische Lösung des Bichlorids Chlorwasserstoff ein, so krystallisiert nach einiger Zeit wieder das Trichlorid vom Zersetzungspunkt 148° aus. Das eine Salzsäure-Molekül, das sich an die Doppelbindung, welche die beiden condensirten Nopinonmoleküle verknüpft, leicht anlagert, wird augenscheinlich auch entsprechend leicht wieder abgespalten. Ganz ähnlich verhält sich übrigens die HCl-Verbindung des Cyklo-Hexen-Hexanons (s. l. c.).

Analyse des Bichlorids $C_{18}H_{28}OCl_2$:

0,1037 gr gaben 0,2490 CO_2 und 0,0798 H_2O

0,0950 „ „ 0,0830 AgCl

Berechnet für $C_{18}H_{28}Cl_3O$	Gefunden
C. 65,24	65,49
H. 8,52	8,61
Cl. 21,41	21,60

Durch Einwirkung von Bromwasserstoffsäure auf Nopinon lassen sich den Chloriden analoge Bromverbindungen herstellen. Die leichte Bildung und die Schwerlöslichkeit des Trichlorids kann zum Nachweis von Nopinon sehr gut verwerthet werden.

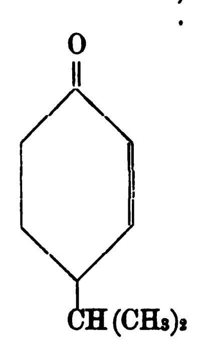
Ueberführung von Nopinon in Isopropylhexenon.

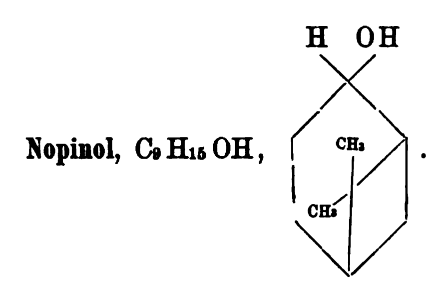
Wenn man Nopinon längere Zeit mit verdünnter Schwefelsäure kocht, so verschwindet der charakteristische Geruch des Nopinons und macht dem nach Cuminol Platz. Diesen Geruch besitzt aber auch das mit Nopinon isomere Isopropylhexenon, welches ich vor einiger Zeit durch Aboxydation des β-Phellandrens mit Luftsauerstoff gewonnen habe[1]). Die Untersuchung des Umlagerungsproducts aus Nopinon hat nun auch die Identität mit jenem Keton ganz unzweideutig erwiesen. Das Umlagerungsproduct des Nopinons entsteht in nur geringer Ausbeute, denn man beobachtet beim Erwärmen des Ketons mit Schwefelsäure die Bildung reichlicher Mengen mit Wasserdampf nicht flüchtiger Producte, was jedenfalls mit der Neigung des Nopinons zur Selbstcondensation zusammenhängt.

Die mit Wasserdampf flüchtigen Antheile der Umlagerung wurden zunächst an Semicarbazid gebunden. Das mehrfach umkrystallisierte Semicarbazon, welches sich schneller ausschied als Nopinon-Semicarbazon, schmolz bei 183—184° und gab mit dem aus β-Phellandren gewonnenen Isopropylhexenon-Semicarbazon keine Schmelzpunktsdepression, wohl aber mit Nopinon-Semicarbazon. Dann wurde aus dem Semicarbazon das Keton regeneriert und in alkoholisch-ammoniakalischer Lösung mit Schwefelwasserstoff behandelt. Es entstand eine Schwefelwasserstoff-Verbindung, welche nach dem Umkrystallisieren aus Aether unter Zusatz von etwas Alkohol bei 119° schmolz. Auch diese Reaction spricht dafür, daß das schon bekannte Δ, 2 Isopropylhexenon vorlag:

---

1) Diese Annalen 343, 31—35 (1905).



Nopinol, $C_9H_{15}OH$, 

Nopinon wurde in bekannter Weise in feuchter ätherischer Lösung mit metallischem Natrium reduciert. Der gewonnene Alkohol erstarrt leicht aber nicht vollkommen. Durch Absaugen wurden die festen (α) von den öligen (β) Bestandtheilen geschieden und getrennt untersucht.

a) Krystallisiertes α-Nopinol.

Der Siedepunkt lag bei 204—205°, der Schmelzpunkt des aus Methylalkohol schön krystallisierenden Präparats bei 102°. Es sublimiert leicht in langen weißen Nadeln und riecht ähnlich wie Campher.

0,1012 g gaben 0,2874 CO_2 und 0,1063 H_2O.

Berechnet für $C_9H_{16}O$	Gefunden
C. 77,07	77,45 %
H. 11,51	11,74 %.

Das umkrystallisierte Präparat zeigte schwache Linksdrehung:

$$S = 0{,}9381,\quad L\ (\text{Aether}) = 6{,}5473,\quad d = 0{,}752,$$
$$t = 18^\circ,\quad p = 12{,}53\ \%,\quad l = 1\ \text{dm},\quad \alpha_D = -0^\circ 31'$$
$$[\alpha]_D = -5{,}32^\circ.$$

Nach vierwöchentlicher Berührung mit verdünnter Schwefelsäure zeigte sich das Nopinol **ganz unverändert**.

Zur weiteren Charakterisierung wurde der Alkohol durch Combination mit Phenylisocyanat in das Urethan $CO\genfrac{}{}{0pt}{}{NHC_6H_5}{OC_9H_{15}}$ übergeführt.

Die Verbindung schmolz nach dem Umkrystallisieren bei 131—132°.

0,1249 g gaben 0,3381 CO_2 und 0,0911 H_2O.

Berechnet für $C_{16}H_{21}O_2N$	Gefunden
C. 74,07	73,76
H. 8,17	7,94

b) Flüssiges *β*-Nopinol.

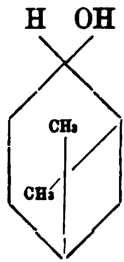
Die von dem krystallisierten Nopinol abgesaugten flüssigen Antheile wurden, um etwa noch vorhandenes Nopinon sicher zu entfernen, nochmals mit einem großen Überschuß von Natrium reduciert. Das so gewonnene Product gab weder mit Semicarbazid noch beim Behandeln mit gasförmiger Salzsäure (s. oben) eine Reaction auf Nopinon. Nachdem es durch Ausfrieren von allen Antheilen festen Nopinols soweit wie möglich befreit war, hinterblieb eine dickflüssige Masse, welche mit Phenylisocyanat reagierte und dabei ein Phenylurethan vom Schmelzpunkt 95—96° gab:

0,1096 g gaben 0,2974 CO_2 und 0,0806 H_2O

0,1238 g gaben 6,2 cm N bei 18,5° und 744^{mm}

Berechnet für $C_{16}H_{21}O_2N$	Gefunden
C. 74,07	47,01
H. 8,17	8,23
N. 5,42	5,65

Da das Phenylurethan aus flüssigem Nopinol andere Eigenschaften besitzt als das aus dem festen Alkohol gewonnene, darf man schließen, daß man es hier wirklich mit zwei Modificationen der Verbindung:



zu thun hat. Das erhellt auch daraus, daß das flüssige Nopinol eine stärkere Activität aufwies als das bei 102° schmelzende:

$$S = 1,1613, \quad L\ (\text{Aether}) = 7,6718, \quad d = 0,759,$$
$$t = 17^0, \quad p = 13,15\ \%, \quad l = 1\ \text{dm}, \quad \alpha_D = -1^0 30'$$
$$[\alpha]_D = -15,03^0.$$

Für das Bestehen der Isomerie zwischen α- und β-Nopinol sieht man die Ursache ein, wenn das die beiden Methyl tragende Kohlenstoffatom des Vierrings nicht in derselben Ebene liegt, wie die Kohlenstoffatome des Sechsrings. In diesem Fall kann das OH in cis- oder in trans-Stellung zu der Gruppe $C(CH_3)_2$ treten.

Pinakon des Nopinons.

Bei der Reduction des Nopinons mit Natrium in alkoholischer Lösung entstehen auch mit Wasserdampf nicht flüchtige Antheile, welche bei der Destillation unter 11mm zwischen 195—200° siedeten, zunächst glasartig erstarrten, aber aus Aether in bei 106—107° schmelzenden Krystallen erhalten werden konnten.

0,1259 g gaben 0,3573 CO_2 und 0,1250 H_2O.

Berechnet für $C_{18}H_{30}O_2$	Gefunden
C. 77,64	77,40
H. 10,86	11,11

Man hat es also augenscheinlich mit dem dem Nopinon zugehörigen Pinakon zu thun.

Nopinonen C_9H_{14}.

Beim Erwärmen des flüssigen β-Nopinols mit Chlorzink[1]) entsteht in wenig guter Ausbeute ein bei etwa 157—160° siedender Kohlenwasserstoff, den man eigentlich Nopinen benennen sollte. Da dieser Name schon für das allerdings noch nicht isolierte β-Pinen theilweise im Gebrauch ist, soll der Kohlenwasserstoff vorläufig als Nopinonen bezeichnet werden. Die nähere Untersuchung steht noch aus.

Homonopinol (Methylnopinol), $C_{10}H_{17}OH$, Pinenhydrat.

Aus dem Nopinon wurde nach bekanntem Verfahren durch Umsetzung des Ketons mit Methylmagnesiumjodid der homologe tertiäre Alkohol aufgebaut[2]). Die gewonnene Verbindung siedete

1) Das feste α-Nopinol ist gegen Chlorzink viel beständiger.

2) Nach freundlicher privater Mittheilung hat auch Hr. W. H. Perkin jun. neuerdings diese Reaction ausgeführt und dabei den erwarteten tertiären Alkohol mit den weiter unten angegebenen Eigenschaften gleichfalls erhalten.

unter 10 mm zwischen 96—100° und erstarrte alsbald zu einer von flüssigen Antheilen durchtränkten Krystallmasse. Die flüssigen Bestandtheile erwiesen sich als unangegriffenes bezw. regeneriertes Nopinon, wie durch die Ueberführung in das vorher beschriebene so characteristische Trichlorid $C_{18}H_{29}OCl_3$ leicht zu constatieren war. Der neue Alkohol kann durch Absaugen auf porösen Tonplatten vom anhaftenden Nopinon befreit werden, was aber mit nennenswerthen Verlusten verbunden ist. Besser verfährt man so, daß man die ursprünglich gewonnene halbfeste Masse mit Hülfe der Vacuumpumpe auf einem Porzellansieb absaugt und die ablaufenden flüssigen Antheile nochmals mit Methylmagnesiumjodid umsetzt.

Das reine Homonopinol erhält man nach dem Umkrystallisieren aus verdünntem Holzgeist in verfilzten bei 58—59° schmelzenden Nadeln. Der Siedepunkt liegt zwischen 204—205°. Der Alkohol ist sehr leicht flüchtig, besitzt an Kampfer erinnernden Geruch und ist gegen Permanganat ganz beständig. Ausbeute 80 % der Theorie.

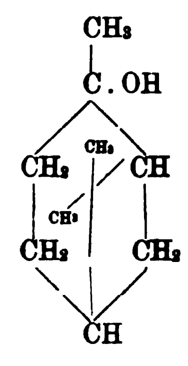
1) 0,1412 g gaben 0,4014 CO_2 und 0,1468 H_2O.
2) 0,1073 g gaben 0,3049 CO_2 und 0,1149 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden 1	Gefunden 2
C . 77,85	77,53	77,50
H . 11,77	11,63	11,98

Das Homonopinol zeigte schwache Linksdrehung:

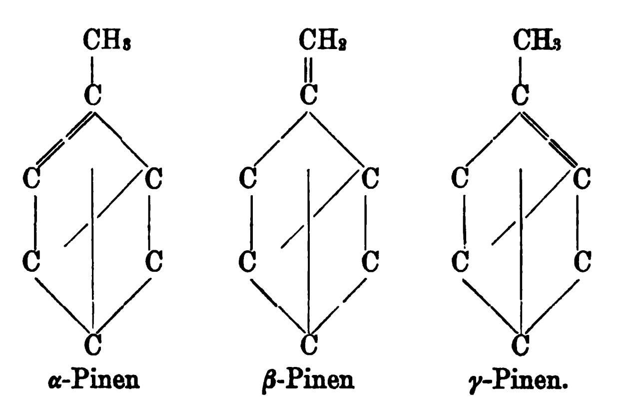
$$S = 1{,}2358, \quad L\ (\text{Aether}) = 5{,}6871, \quad d = 0{,}767,$$
$$t = 18^0, \quad p = 17{,}85\ \%, \quad l = 1\ \text{dm}, \quad \alpha_D = -0^0 41'$$
$$[\alpha]_D = -4{,}99^0.$$

Nach seiner Entstehungsweise muß dem Homonopinol (Methyl (1)-Nopinol) die Formel zukommen:



Es kann also auch als ein Hydrat des Pinens betrachtet und Pinenhydrat benannt werden.

Durch Abspaltung von 1 Mol. Wasser aus dieser Verbindung wäre theoretisch die Möglichkeit für die Bildung zunächst von drei Kohlenwasserstoffen gegeben, die ich als α-, β- und γ-Pinen unterscheiden will:



α-Pinen β-Pinen γ-Pinen.

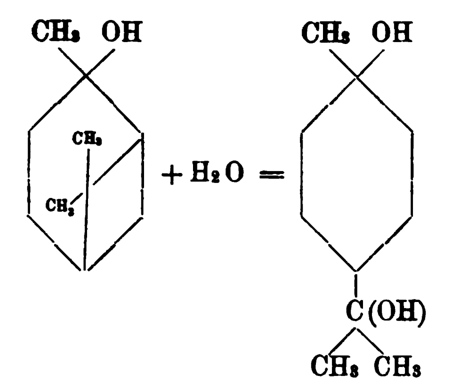
α-Pinen ist identisch mit dem gewöhnlichen Pinen, β-Pinen entspräche dem vorläufig noch nicht isolierten, also hypothetischen Nopinen. γ-Pinen wird sich vielleicht besonders leicht bilden, da ein tertiär gebundenes H-Atom für seine Entstehung unter H_2O-Abspaltung zu Gebote steht. Man kann aber voraussehen, daß der Kohlenwasserstoff sich unter Sprengung des Vierrings sehr leicht umlagern wird. Dann wäre die Entstehung von Limonen oder Terpinolen am wahrscheinlichsten.

Von diesen Gesichtspunkten aus bot ein Studium des Homonopinols ein ganz besonderes Interesse.

Verhalten des Homonopinols (Pinenhydrats) gegen wässrige Lösungen von Säuren.

Synthese von cis-Terpinhydrat.

Die Vierringbindung im Pinenhydrat erweist sich als ganz außerordentlich labil und löst sich bei Gegenwart auch der schwächsten Säuren unter Wasseraddition und Entstehung von Terpinhydrat auf:



Das muß auch bei der synthetischen Darstellung des Alkohols beachtet werden.

1. Pinenhydrat und verdünnte Schwefelsäure.

1 g Homonopinol wurde mit 500 ccm kalter 5 %iger Schwefelsäure durchgeschüttelt. Schon nach zwei Stunden war der Alkohol so gut wie vollständig in Lösung gegangen. Nun wurde die Flüssigkeit unter Kühlung mit Alkali neutralisiert und dann mit Essigester mehrfach extrahiert. In den Essigester ging eine leicht krystallisierende Substanz, die nach dem Umkrystallisieren aus Wasser bei 117° schmolz und sich als reines cis-Terpinhydrat erwies.

0,1289 g gaben 0,2973 CO_2 und 0,1316 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{22}O_3$	Gefunden
C . 63,09	62,90
H . 11,65	11,42

Die Ausbeute ist fast quantitativ. Zur weiteren Identificierung wurde das Terpinhydrat mit Eisessig-Salzsäure umgesetzt und dabei leicht das Dipentendihydrochlorid (Schmelzpunkt 48°) erhalten.

2. Pinenhydrat und Oxalsäure.

Bei halb- bis dreiviertelstündigem Schütteln mit viel kalt gesättigter wässeriger Oxalsäurelösung geht Homonopinol — abgesehen von einer geringen Emulsionsbildung — fast vollständig in Lösung. Zur Entfernung der öligen Ausscheidungen wurde die Flüssigkeit erst mit ganz wenig Essigester ausgeschüttelt, dann — nach Entfernung des so gewonnenen Extracts — mit größeren Mengen Lösungsmittel. Nach Abdestillieren des letzteren hinterblieb eine erhebliche Menge Terpinhydrat. Schon kalte wässerige Oxalsäure vermag also den Vierring im Pinenhydrat zu lösen.

Synthese von Terpenkohlenwasserstoffen.

Nach dem vorstehend festgestellten Verhalten des Homonopinols (Pinenhydrats) gegen Säuren ist es durchsichtig, warum eine ganze Reihe von Versuchen, welche vorher angestellt wurden, um den Alkohol durch Wasserabspaltung in α- oder in β-Pinen überzuführen, fehlschlagen mußten. Von diesen Versuchen verdienen die folgenden einige Berücksichtigung.

1. Pinenhydrat und Ameisensäure.

10 g Homonopinol wurden mit 20 ccm 85 %iger Ameisensäure übergossen. Es findet Erwärmung und theilweise Lösung statt. Bei künstlicher Wärmezufuhr trübt sich die Flüssigkeit unter Abscheidung eines leichten Oels. Nun wurde noch etwa eine Minute gekocht, das entstandene sehr flüchtige Product mit Wasserdampf übergetrieben, das Destillat mit Alkali gut durchgeschüttelt, nochmals mit Dampf destilliert, über Pottasche getrocknet und dann über metallischem Natrium mehrfach rectificiert.

Es konnten verschiedene Fractionen aufgefangen werden 1) 175—179°, 2) 179—182°, 3) bis 190°.

Die erste Fraction zeigte: d = 0,853, n_D = 1,47586 bis 20°, M = 44,96 (ber. für $C_{10}H_{16}f^2$ = 45,24).

0,1035 g gaben 0,3328 CO_2 und 0,1107 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C. 88,24	87,69
H. 11,76	11,97

Man hat es also mit einem noch nicht absolut reinen Terpen mit zwei Aethylenbindungen zu thun. Der Kohlenwasserstoff gab in Ligroïnlösung sehr deutlich die Reaction auf Terpinen. Schmelzpunkt des erhaltenen Nitrosits lag bei 153°.

Die höheren Fractionen gaben beim Bromieren in Eisessiglösung etwas krystallisiertes Bromid von nicht ganz einheitlicher Beschaffenheit. Nach dem Umkrystallisieren schmolzen einige Antheile (gut ausgebildete durchsichtige Krystalle) unter Gasentwickelung und Grünfärbung zwischen 112—115°, zeigten also das characteristische Verhalten des Terpinolen-Tetrabromids, andere schmolzen ohne Zersetzung ein wenig höher. Ob Dipententetrabromid vorlag, ließ sich bei den geringen Substanzmengen nicht mit Sicherheit entscheiden, es ist aber als wahrscheinlich anzunehmen.

Es ist vorläufig darauf verzichtet worden, das sehr kostbare Ausgangsmaterial zur Wiederholung dieses Versuchs in größerem Maßstabe zu verwenden, denn schon auf Grund der beobachteten

Thatsachen darf es als absolut sicher gelten, daß die Reaction zwischen Homonopinol und Ameisensäure sich in der Weise abgespielt hat, daß die Säure den Alkohol erst zu **Terpin** aufgespalten und dieses dann weiter die bekannten Abwandlungen in Dipenten, Terpinolen, Terpinen und Terpineol [1]) erlitten hat. Immerhin wurde die Richtigkeit dieser Interpretation noch durch den Nachweis erhärtert, daß sich auch beim Schütteln von Homonopinol mit kalter Ameisensäurelösung Terpinhydrat bildet. Endlich verdient noch bemerkt zu werden, daß bei der Wasserabspaltung aus Homonopinol unter Anwendung von Ameisensäure fast gar keine harzigen Nebenproducte auftraten, wie sie sich bei den nachher zu beschreibenden Versuchen in sehr lästiger Weise bemerklich machen.

Homonopinol und Eisessig-Chlorwasserstoff.

Eine Eisessiglösung von Homonopinol wurde unter Abkühlen mit Chlorwasserstoffgas gesättigt und einige Tage sich selbst überlassen. Gießt man dann die Flüssigkeit auf Eis, so scheidet sich ein schnell erstarrendes Oel aus, das aber bei gewöhnlicher Temperatur sich bald wieder verflüssigt. Um die öligen von den festen Bestandtheilen zu befreien, wurde die ursprünglich erhaltene halbfeste Masse auf Tonteller gebracht, die durch eine gute Kältemischung kalt gehalten wurden. Die flüssigen Antheile werden dabei allmählich aufgesaugt und eine farblose, nunmehr auch bei gewöhnlicher Temperatur haltbare Krystallmasse hinterbleibt. Nach dem Umkrystallisiren aus wenig Methylalkohol schmolzen die Krystalle bei 48—49° und erwiesen sich als völlig identisch mit **Dipentendihydrochlorid.** Der Vorgang vollzieht sich also, wie von vorn herein zu erwarten gewesen war, gemäß der Gleichung:

CH₃ OH (Ring mit CH₃, CH₃) $+ 2HCl = H_2O +$ CH₃ Cl (Ring) $CH_3.CCl\text{–}HC_3$

1) Das Vorhandensein von geringen Mengen Terpineol in den höchstsiedenden Antheilen des Reactionsproducts wurde zwar bis jetzt nicht objectiv nachgewiesen, ist aber unzweifelhaft.

Verhalten des Homopinols gegen trockene, Wasser abspaltende Mittel.

1) Homonopinol wurde mit dem doppelten Gewicht entwässerten Chlorzinks eine halbe Stunde auf dem Wasserbad erwärmt. Es hatten sich viel Polymerisationsproducte gebildet und wenig mit Wasserdampf flüchtiger Kohlenwasserstoff von ausgesprochenem Limonen-Geruch. Die Hauptmenge siedete zwischen 170—180°.

2) Homonopinol wurde mit der dreifachen Menge Kaliumbisulfat $2^1/_2$ Stunde auf 130° erhitzt. Ausbeute mangelhaft. Siedepunkt des mit Wasserdampf abgeblasenen Products ganz unconstant von 163—200°. Ein herausfractionierter, bei 163—164° übergehender Antheil wurde analysiert.

0,1036 g gaben 0,3362 CO_2 und 0,1074 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C . 88,24	88,50
H . 11,76	11,60

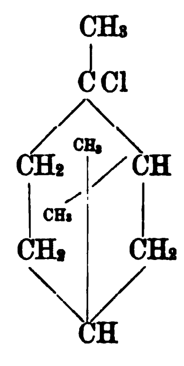
Hier lag also ein Kohlenwasserstoff von der Zusammensetzung eines Terpens und einem dem Pinen nahe kommenden Siedepunkt vor. Die Anwesenheit von Pinen konnte aber durch Reactionen nicht nachgewiesen werden und die Umsetzung müßte unter Aufwendung von sehr viel Substanz wiederholt werden, wenn über die Natur der entstandenen Producte ganz Zuverlässiges ermittelt werden sollte.

3) Ein Versuch durch Erhitzen über scharf getrocknetem Natronkalk aus dem Homonopinol Wasser abzuspalten verlief resultatlos.

Andere Versuche zur Erreichung des oben erörterten Zwecks stehen noch aus.

Pinenhydrat (Homopinol) und Chlorphosphor.

Denkt man sich in dem tertiären Alkohol das Hydroxyl durch Chlor ausgetauscht, so kommt man zu der Verbindung:



die man mit Recht als Pinenmonochlorhydrat bezeichnen darf und welcher die Formel zukommt, die man früher dem s. g. „künstlichen Kampher", d. h. dem bei der Einwirkung von trockener Halogenwasserstoffsäure auf trockenes Pinen entstandenen Product zuschrieb.

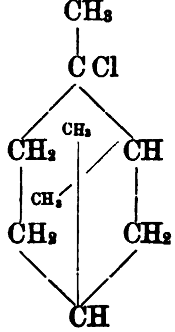
Um zu der theoretisch wichtigen Substanz zu gelangen wurde Pinenhydrat in Ligroïnlösung unter Abkühlung mit 1 Mol. PCl_5 in Umsetzung gebracht. Je 5 g Homonopinol wurden in 25 ccm trockenem Ligroïn gelöst und unter Eiskühlung allmählich 6,7 g PCl_5 eingetragen. Nachdem aller Chlorphosphor verschwunden war, wurde die Lösung zunächst mit Eiswasser, dann mit verdünnter Natronlauge durchgeschüttelt und der nach dem Trocknen und Abdestilliren des Ligroïns verbleibende Rückstand im Vacuum fractioniert. Ein constanter Siedepunkt konnte nicht erzielt werden, die Hauptmenge ging bei 13mm zwischen 95—105° über. Es machte sich aber schon bei der Destillation im Vacuum eine Abgabe von ClH bemerklich. Beim Destillieren unter gewöhnlichem Druck (Siedepunkt etwa 200—205°) trat noch weitergehende Zersetzung unter Salzsäure-Entwickelung ein.

Eine Chlorbestimmung einer im Vacuum um 100° siedenden Fraction ergab:

0,2469 g gaben 0,1834 AgCl.

Berechnet für $C_{10}H_{17}Cl$	Gefunden
Cl . 20,54	18,37.

Das durch Austausch von OH im Homonopinol gegen Cl im ersten Schritt jedenfalls entstehende Chlorid ist in seinem Verhalten völlig verschieden von dem bei der Einwirkung von ClH auf trockenes Pinen entstehenden Chlorid $C_{10}H_{17}Cl$. Damit ist ein neuer ganz stringenter Beweis dafür beigebracht, daß die Addition von 1 Mol. HCl an trockenes Pinen im ersten Schritt nicht unter Auflösung der Aethylenbindung, sondern unter Auflösung des Vierrings erfolgt. Denn bei Auflösung der Aethylenbindung im Pinen durch HCl müßte die Verbindung



entstehen, die, wie man sieht, identisch ist mit dem Homonopinylchlorid, dessen Bildung man bei der Umsetzung von Homonopinol mit PCl_5 als erstes Reactionsproduct erwarten muß.

Wird das Product der Einwirkung von Chlorphosphor auf Homonopinol in Eisessiglösung mit Salzsäuregas gesättigt, so entsteht in reichlicher Menge Dipentendihydrochlorid. Mischt man unter den bekannten Cautelen eine Auflösung des Monochlorids mit Amylnitrit und Salpetersäure, so scheidet sich ein schwer lösliches, chlorhaltiges Nitrosat ab. Bei der Umsetzung des neuen Chlorids mit Anilin und Verarbeitung des Reactionsproducts in früher beschriebener[1]) Weise erhält man Kohlenwasserstoffe, welche in der Hauptmenge zunächst zwischen 179—190° destillierten und sich reich an Dipenten erwiesen, welches leicht in Form des bei 125° schmelzenden Tetrabromids zur Abscheidung gebracht werden konnte.

Aus dem Verhalten des Chlorids aus Homonopinol darf man schließen, daß das ursprüngliche Umsetzungsproduct sehr unbeständigen Charakter besitzt, indem es sehr zur Salzsäureabspaltung neigt, und zu gleichzeitiger Auflösung des Vierrings.

Nach den bisher vorliegenden Beobachtungen ist es daher nicht ausgeschlossen, daß bei der Einwirkung von Chlorwasserstoff auf feuchtes Pinen sich dasselbe Zwischenproduct bildet, wie bei der Umsetzung von Homonopinol mit PCl_5; denn in beiden Fällen tritt als Endproduct der Reaction Dipentenbichlorhydrat auf, falls den Zwischenproducten überschüssige Chlorwasserstoffsäure geboten wird.

III. Ueber die Synthese höherer Homologer des Terpins und höherer homologer Terpene.

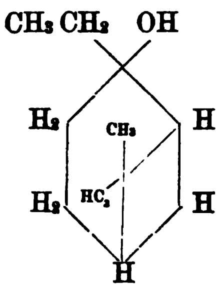
Nachdem sich herausgestellt hatte, daß sich das Homonopinol leicht zu Terpinhydrat aufspalten läßt und in Folge dessen auch die aus Terpin erhältlichen Terpenkohlenwasserstoffe synthetisch aus dem Homonopinol bereitet werden können, lag der Gedanke nahe, den Versuch zu machen, diese Reaction auch auf die Gewinnung höherer Homologer zu übertragen. Daß das in der That durchführbar und damit ein ganz neuer Weg zur Herstellung höherer homologer Terpene gebahnt ist, geht aus folgendem Versuch hervor.

Nopinon wurde mit Magnesiumjodaethyl nach Grignard in Umsetzung gebracht und bei der Isolierung des gewon-

1) Annal. 350, 148, 150; Ber. 40, 604.

nenen Productes so verfahren, wie es bei der Darstellung des Homonopinols erst beschrieben worden ist.

Der erhaltene tertiäre Alkohol, den man Aethylnopinol nennen kann:



zeigte folgende Eigenschaften:

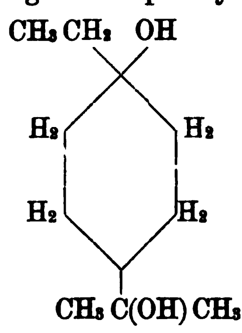
Siedepunkt nicht ganz constant von 212° bis oberhalb 220°. Aus den höchstsiedenden Antheilen setzten sich schon bei gewöhnlicher Temperatur sehr große schön ausgebildete Krystalle ab, die nach dem Abpressen bei 43—45° schmolzen und zwischen 219—223° siedeten. Die Analyse dieser Krystalle ergab:

0,2280 g gaben 0,6535 CO_2 und 0,2405 H_2O.

Berechnet für $C_{11}H_{20}O$	Gefunden
C. 78,49	78,17
H. 11,99	11,82

Beim Erwärmen mit Ameisensäure spaltet der Alkohol Wasser ab und es entstehen höhere homologe Terpene, die noch nicht eingehender untersucht sind.

Homologes Terpinhydrat.



Wird das eben beschriebene Aethylnopinol längere Zeit mit 5 %iger Schwefelsäure geschüttelt, so geht es allmählich in Lösung, wenn auch langsamer als Homonopinol (Methylnopinol). Die Verarbeitung des Reactionsproducts geschah ähnlich, wie es bei

den analogen Versuchen mit Methylnopinol beschrieben worden ist, nur wurden nach der Neutralisation der sauren Flüssigkeit mit Alkali die nicht gelösten flüchtigen Bestandtheile vor dem Ausziehen der Flüssigkeit mit Essigester durch Wasserdampf abgeblasen.

In den Essigester ging eine krystallisirende Substanz, die ziemlich viel heißes Wasser zur Lösung bedarf, aus dieser Lösung dann aber in gut ausgebildeten durchsichtigen Krystallen herauskommt. Die Verbindung schmilzt nach vorherigem Erweichen bei 75—76°.

0,1906 g gaben 0,4503 CO_2 und 0,2024 H_2O.

Berechnet für $C_{11}H_{22}O_2 + H_2O$	Gefunden
C. 64,64	64,43
H. 11,84	11,90.

Aus der Analyse folgt, daß ein wasserhaltiges Product vorliegt, daß man es also mit einer dem bekannten cis-Terpinhydrat in jeder Beziehung analogen Substanz zu thun hat.

Die Versuche zur Gewinnung einer weiteren Reihe homologer Terpine werden fortgesetzt.

Beitrag zur Theorie ungedämpfter elektrischer Schwingungen bei Gasentladungen

von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Mai 1907.

Durch die folgenden Betrachtungen werden die Untersuchungen von Simon über den selbsttönenden Lichtbogen in gewisser Weise ergänzt. Sie gehen allerdings auf der einen Seite nicht so tief wie die Arbeiten Simons; sie bleiben auf einem rein phänomenologischen Standpunkt und zeigen nicht, wie die Schwingungen durch den inneren Mechanismus der Entladung dauernd unterhalten werden. Auf der anderen Seite werden im folgenden die Differentialgleichungen, von denen das Problem abhängt, etwas vollständiger und allgemeiner untersucht, und es werden so einige neue Beziehungen gewonnen. Wir gehen zunächst über zu der Aufstellung der allgemeinen Bedingungen, von denen das Problem abhängt.

1.

In dem Hauptzweige befinde sich die Batterie mit der elektromotorischen Kraft E; der Widerstand des Hauptzweiges sei W, die Selbstinduction L. Zwischen den Endpunkten a und b des Zweiges liege die Entladungsstrecke; die Richtung Ea entspreche dem positiven Strome, die Stromstärke im Hauptzweige sei I. Die Spannungsdifferenz zwischen den Polen a und b der Entladungsstrecke sei e, die Stromstärke i. Parallel zu der Entladungsstrecke sei der Condensatorzweig geschaltet mit dem Widerstand w und der Selbstinduction l; die Potentialdifferenz zwischen den Platten des Condensators sei V, seine Capacität C. Die Strom-

stärke im Condensatorzweige sei j; als positive Stromrichtung gelte die vom Condensator zu dem Pole a der Entladungsstrecke. Bezeichnen wir mit c die Lichtgeschwindigkeit, so sind die Gleichungen des Problems:

$$L\frac{dJ}{dt} + WJ = E - e. \tag{1}$$

$$l\frac{dj}{dt} + wj = cV - e. \tag{2}$$

$$cj = -C\frac{dV}{dt}. \tag{3}$$

$$J + j = i. \tag{4}$$

Dazu kommt noch eine aus den Erfahrungstatsachen zu entnehmende Beziehung zwischen e und i. Wir haben dann im ganzen 5 Gleichungen zur Bestimmung der 5 Unbekannten I, i, j, e und V. Die Beziehung zwischen e und i wird im Falle eines stationären Stromes durch die statische Charakteristik der Entladung gegeben. In dem Falle einer oscillierenden Entladung, wie er insbesondere von Simon studiert worden ist, kann man annehmen, daß die Elektrodenspannung e nicht blos von der Stromstärke selber, sondern auch von ihren Differentialquotienten nach der Zeit abhänge. Wir werden uns in erster Annäherung mit dem folgenden Ansatze begnügen:

$$e = e_0 + \omega i + \lambda\frac{di}{dt}. \tag{5}$$

Die folgenden Betrachtungen gelten daher nur bei kleinen Abweichungen von dem stationären Zustande.

Eliminieren wir aus den Gleichungen (2) und (3) die Potentialdifferenz V, so ergibt sich:

$$Cl\frac{d^2j}{dt^2} + Cw\frac{dj}{dt} + c^2j + C\frac{de}{dt} = 0. \tag{6}$$

2.

Eliminiert man aus Gleichung (6) mit Hülfe von (5) die Spannung e, so ergibt sich:

$$Cl\frac{d^2j}{dt^2} + Cw\frac{dj}{dt} + c^2j + C\lambda\frac{d^2i}{dt^2} + C\omega\frac{di}{dt} = 0. \tag{7}$$

Ebenso folgt aus (1) mit Hülfe von (4) und (5):

$$(L+\lambda)\frac{di}{dt}+(W+\omega)i-L\frac{dj}{dt}-Wj = E-e_0. \tag{8}$$

Durch nochmalige Differentiation nach der Zeit ergiebt sich aus Gleichung (7):

$$Cl\frac{d^3j}{dt^3}+Cw\frac{d^2j}{dt^2}+c^2\frac{dj}{dt}+C\lambda\frac{d^3i}{dt^3}+C\omega\frac{d^2i}{dt^2} = 0.$$

Aus den drei letzten Gleichungen aber kann man entweder i oder j eliminieren und erhält so für j und i:

$$\begin{aligned}(9)\qquad & C\{Ll+\lambda(L+l)\}\frac{d^3j}{dt^3}+\\ & C\{W(l+\lambda)+w(L+\lambda)+\omega(L+l)\}\frac{d^2j}{dt^2}+\\ & \{C[Ww+\omega(W+w)]+c^2(L+\lambda)\}\frac{dj}{dt}+c^2(W+\omega)j\\ & = 0\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}(9')\qquad & C\{Ll+\lambda(L+l)\}\frac{d^3i}{dt^3}+\\ & C\{W(l+\lambda)+w(L+\lambda)+\omega(L+l)\}\frac{d^2i}{dt^2}+\\ & \{C[Ww+\omega(W+w)]+c^2(L+\lambda)\}\frac{di}{dt}+c^2\{(W+\omega)i-E+e_0\}\\ & = 0.\end{aligned}$$

Gleichung (9') zeigt, daß sich i aus einem constanten und aus einem variabelen Teile zusammensetzt. Der erste ist gegeben durch:

$$\frac{E-e_0}{W+\omega}.$$

Für den variabelen Teil gilt dieselbe Differentialgleichung wie für j.

3.

Wir wollen nun die Bedingung dafür aufstellen, daß die Gleichungen (9) durch eine periodische Function der Zeit befriedigt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß die Funktionen j und i die Zeit nur in dem Factor

$$T = e^{2\pi int}, \quad i = \sqrt{-1}$$

enthalten. Dann wird:

$$dT/dt = 2\pi inT, \quad d^2T/dt^2 = -4\pi^2n^2T, \quad d^3T/dt^3 = -8\pi^3in^3T.$$

Führt man diese Werte ein in Gleichung (9), so zerfällt sie in einen reellen und einen imaginären Teil; setzt man diese beiden Teile einzeln gleich 0, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(10) \quad 4\pi^2n^2C\{l(W+\omega)+L(w+\omega)+\lambda(W+w)\} = c^2(W+\omega),$$

und:

$$(11) \quad \frac{c^2(W+\omega)}{l(W+\omega)+L(w+\omega)+\lambda(W+w)} = \frac{C\{Ww+\omega(W+w)\}+c^2(L+\lambda)}{Ll+\lambda(L+l)}.$$

4.

Wir machen nun für i und e die Ansätze:

$$(12) \quad i = i_1 + A\cos S + A'\sin S, \quad e = e_1 + B\cos S + B'\sin S.$$

wo:

$$S = 2\pi nt.$$

Aus diesen Ansätzen ergiebt sich, daß zusammengehörende Werte von $e-e_1$ und $i-i_1$ durch die Punkte einer Ellipse dargestellt werden, deren Mittelpunkt die Coordinaten i_1 und e_1 besitzt. Setzen wir $S = 0$, so erhalten wir in A und B die Projectionen eines Ellipsenhalbmessers auf die Axen i und e; setzen wir $S = \pi/2$, $t = 1/4n$, so erhalten wir in A' und B' die Projectionen eines zweiten Halbmessers. Man erkennt leicht, daß die Halbmesser A, B und A', B' einander conjugiert sind. Wenn t und S wachsen, so verschiebt sich der Endpunkt des Ellipsenhalbmessers auf dem Umfange der Ellipse. Diese Verschiebung muß den Beobachtungen von Simon entsprechend im Sinne des Uhrzeigers erfolgen, wenn die Axe der i nach rechts, die der e nach oben gezogen wird. Daraus folgt die Bedingungsgleichung:

$$(13) \quad A'B - AB' = \text{positiv}.$$

Der für e gemachte Ansatz muß aber der Gleichung (5) genügen. Es ergeben sich somit für B und B' die Werte:

$$(12') \quad B = \omega A + 2\pi n\lambda A', \quad B' = \omega A' - 2\pi n\lambda A.$$

Es wird somit:

$$A'B - AB' = 4\pi n \lambda (A^2 + A'^2).$$

Die Bedingung dafür, daß der Endpunkt des Ellipsenhalbmessers sich auf ihrem Umfange mit wachsender Zeit im Sinne des Uhrzeigers verschiebt, ist somit:

$$(13) \qquad \lambda = \text{positiv}.$$

Gleichung (5) gibt außerdem noch die Beziehung:

$$(14) \qquad a_1 = a_0 + \omega \lambda_0.$$

5.

Wir machen nun für j den Ansatz:

$$j = X \cos S + X' \sin S.$$

Hier ist wie im vorhergehenden $S = 2\pi n t$; die Schwingungszahl n ist bestimmt durch Gleichung (10). Für X und X' ergeben sich aus Gleichung (6) die Werte:

$$(15) \qquad \begin{aligned} X &= -2\pi n C \cdot \frac{2\pi n C w B + (1 - 4\pi^2 n^2 C L) B'}{(1 - 4\pi^2 n^2 C L)^2 + 4\pi^2 n^2 C^2 w^2}, \\ X' &= 2\pi n C \cdot \frac{(1 - 4\pi^2 n^2 C L) B - 2\pi n C w B'}{(1 - 4\pi^2 n^2 C L)^2 + 4\pi^2 n^2 C^2 w^2}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (10) können diese Ausdrücke auch auf die folgende Form gebracht werden:

$$(15') \qquad \begin{aligned} X &= -(W+\omega) \frac{w(W+\omega) B + 2\pi n \{L(w+\omega) + \lambda(W+w)\} B'}{4\pi^2 n^2 \{L(w+\omega) + \lambda(W+w)\}^2 + w^2 (W+\omega)^2}, \\ X' &= (W+\omega) \frac{2\pi n \{L(w+\omega) + \lambda(W+w)\} B - w(W+\omega) B'}{4\pi^2 n^2 \{L(w+\omega) + \lambda(W+w)\}^2 + w^2 (W+\omega)^2}. \end{aligned}$$

6.

Wir gehen über zu der Berechnung des Stromes I im Hauptzweige X. Wir setzen:

$$(16) \qquad I = I_1 + Y \cos S + Y' \sin S.$$

Dann ergiebt sich aus Gleichung (1):

$$(17) \qquad W I_1 = E - e_1;$$

und:

$$(17') \quad \begin{aligned} Y &= -\frac{WB - 2\pi n L B'}{W^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}, \\ Y' &= -\frac{2\pi n L B + W B'}{W^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}. \end{aligned}$$

7.

Zwischen den Stromstärken I, i und j besteht endlich noch die durch Gleichung (4) gegebene Beziehung. Führen wir hier die für die Stromstärken gemachten Ansätze ein, so ergibt sich:

$$(18) \quad \begin{gathered} I_1 = i_1 \\ X + Y = A, \qquad X' + Y' = A'. \end{gathered}$$

Setzen wir hier die für X, X', Y, Y' gefundenen Werte ein, so erhalten wir noch zwei weitere Gleichungen zwischen den das Problem bestimmenden Größen:

$$(19) \quad \begin{aligned} &(W+\omega)\frac{w(W+\omega)B + 2\pi n\{L(w+\omega)+\lambda(W+w)\}B'}{4\pi^2 n^2\{L(w+\omega)+\lambda(W+w)\}^2 + w^2(W+\omega)^2} + \frac{WB - 2\pi n L B'}{W^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} \\ &\qquad = -A. \\ &(W+\omega)\frac{2\pi n\{L(w+\omega)+\lambda(W+w)\}B - w(W+\omega)B'}{4\pi^2 n^2\{L(w+\omega)+\lambda(W+w)\}^2 + w^2(W+\omega)^2} - \frac{2\pi n L B + W B'}{W^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} \\ &\qquad = A'. \end{aligned}$$

Stellen wir die Ergebnisse der bisherigen Rechnung zusammen, so haben wir zunächst zur Bestimmung der mittleren Stromstärken I_1 und i_1 die Gleichung (17). Die Amplituden X, X', Y, Y' werden durch die Gleichungspaare (15') und (17'), die Schwingungszahl n durch Gleichung (10) gegeben.

Zwischen den 12 Größen n, ω, λ, W, L, w, l, A, A', B, B', C bestehen dann noch die Gleichung (11), die beiden Gleichungen (12'), und die beiden Gleichungen (19). Gleichung (11) stellt eine Beziehung zwischen den Größen ω, λ, W, L, w, l und C dar. Die Gleichungen (12') und (19) sind homogen und linear in A, A', B, B'; man kann aus ihnen die Amplituden B, B' eliminieren, und erhält zwei neue Beziehungen zwischen den Größen A, A', n, ω, λ, W, L, w, l homogen in A und A'; die Condensatorcapacität kommt darin nicht vor. Es zeigt sich, daß die neuen Gleichungen nur zu befriedigen sind, wenn die Größen n, ω, λ. W, L, w, l noch 2 weiteren Bedingungen genügen. A und A' bleiben unbestimmt. Im ganzen haben wir also vier Beziehungen zwischen den Größen

ω, λ, W, L, w, l, n und C. Davon ist Gleichung (11) frei von der Schwingungszahl, Gleichung (10) enthält Schwingungszahl und Capacität; die zwei durch Elimination aus den Gleichungen (12') und (19) erhaltenen Beziehungen sind frei von der Capacität, enthalten aber die Schwingungszahl.

Für die Potentialdifferenz der Condensatorplatten ergiebt sich aus Gleichung 3:

$$V = V_1 + \frac{c}{2\pi n C}(X' \cos S - X \sin S). \tag{20}$$

Die Phasendifferenz zwischen V und j beträgt dann $\pi/2$. Die Integrationsconstante V_1 bestimmt sich durch die Bedingung, daß für $j = 0$ die Spannung $cV = e + l\frac{dj}{dt}$ sein muß.

8.

Ehe wir zu der specielleren Untersuchung der erhaltenen allgemeinen Gleichungen übergehen, wollen wir noch die Verhältnisse der in dem Kreise geleisteten elektrischen Arbeiten betrachten. Für die Arbeiten, die im Hauptzweige, im Condensatorzweige und in der Entladungsstrecke während eines Zeitelementes dt geleistet werden, ergeben sich die Ausdrücke:

$$dA =$$
$$I(E-e)\,dt = (I_1 + Y\cos S + Y'\sin S)(E - e_1 - B\cos S - B'\sin S)\,dt$$

$$d\alpha = j(V-e)\,dt =$$
$$(X\cos S + X'\sin S)\left\{\left(\frac{cX'}{2\pi nC} - B\right)\cos S - \left(\frac{cX}{2\pi nC} + B'\right)\sin S + V_1 - e_1\right\}dt$$

$$da = i\,e\,dt = (i_1 + A\cos S + A'\sin S)(e_1 + B\cos S + B'\sin S)\,dt.$$

Integriert man diese Ausdrücke über die Zeit einer Periode, $t = 0$ bis $t = 1/n$, so ergeben sich die folgenden Werte der entsprechenden Arbeiten:

$$\begin{aligned} A &= \frac{I_1(E-e_1)}{n} - \frac{YB + Y'B'}{2n}, \\ \alpha &= \qquad\qquad - \frac{XB + X'B'}{2n}, \\ a &= \frac{i_1 e_1}{n} + \frac{AB + A'B'}{2n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Die während einer Periode im Entladungszweige geleistete Arbeit kann mit Hülfe der Gleichungen (12') auch auf die folgende Form gebracht werden:

$$a = \frac{i_1 e_1}{n} + \frac{\omega(A^2 + A'^2)}{2n}. \tag{21'}$$

Die letztere Form des Ausdruckes ist besonders bemerkenswert; sie zeigt, daß die von den elektrischen Schwingungen im Entladungszweige herrührende Arbeit negativ wird, wenn ω einen negativen Wert besitzt. Es verschwindet dann eine gewisse Arbeit in der Entladungsstrecke, und diese muß sich in den anderen Teilen des Stromkreises wiederfinden. In der Tat ergiebt sich nun für die Summe der Arbeiten im Haupt- und im Condensatorzweige der Ausdruck:

$$A + \alpha = \frac{I_1(E - e_1)}{n} - \frac{B(X+Y) + B(X'+Y')}{2n}.$$

Oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (18):

$$A + \alpha = \frac{I_1(E - e_1)}{n} - \frac{AB + A'B'}{2n} = \frac{I_1(E - e_1)}{n} - \frac{\omega(A^2 + A'^2)}{2n}.$$

In der Tat wird also die Arbeit, die in der Entladungsstrecke in Folge der elektrischen Schwingungen verloren geht, in den beiden anderen Teilen des ganzen Kreises wieder gewonnen. Die Arbeit, die in dem ganzen Stromkreise während einer Periode geleistet wird, reduciert sich auf:

$$A + \alpha + a = \frac{I_1 E}{n}.$$

Die von den Selbstinductionen herrührenden elektromotorischen Kräfte sind in den vorhergehenden Rechnungen nicht berücksichtigt; es ist dies auch nicht nötig, denn die von ihnen während eines Zeitelementes dt geleistete Arbeit ist ein vollständiges Differential, und der Integralwert der Arbeit für eine ganze Periode ist daher gleich 0.

Zu bemerken ist noch, daß die Compensation zwischen den Arbeiten $A + \alpha$ und a von der besonderen Beziehung zwischen den Amplituden B, B' und A, A' unabhängig ist.

9.

Wir wenden im Folgenden die allgemeinen Formeln an auf den Fall, daß L und λ gleich Null sind. Dann ergibt sich aus Gleichung (10):

$$4\pi^2 n^2 Cl = c^2;$$

ferner wird Gleichung (11):

$$Ww + \omega(W + w) = 0.$$

Daraus folgt, daß ungedämpfte Schwingungen nur möglich sind bei negativem ω, d. h. bei einer nach der Axe der i abfallenden Charakteristik. Die Gleichungen (12′) geben:

$$B = \omega A \text{ und } B' = \omega A';$$

daher wird:

$$e - e_1 = \omega(i - i_1),$$

die im allgemeinen von dem Punkte i, e beschriebene Ellipse geht also in diesem Falle in eine gerade Linie über.

Die Gleichungen (17) und (18) bleiben unverändert; die Gleichungen (15′) geben:

$$X = -B/w, \quad X' = -B'/w;$$

die Gleichungen (17′):

$$Y = -B/W, \quad Y' = -B'/W.$$

Die Gleichungen (19) reducieren sich beide auf die schon aus (11) abgeleitete Bedingung:

$$1/W + 1/w = -1/\omega.$$

Man erhält also schließlich für die Größen I, j, i und e die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} IW &= E - e_1 - \omega(A\cos S + A'\sin S), \\ jw &= -\omega(A\cos S + A'\sin S), \\ iW &= E - e_1 + W(A\cos S + A'\sin S), \\ e &= e_1 + \omega(A\cos S + A'\sin S). \end{aligned}$$

10.

Wir kehren nun zurück zu den allgemeinen Gleichungen (19). Zur Abkürzung führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} L(w + \omega) + \lambda(W + w) &= T, \\ w(W + \omega) &= U, \\ 2\pi n &= \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{n}^2 T^2 + U^2 &= G^2, \\ W^2 + \mathfrak{n}^2 L^2 &= H^2. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich aus den Gleichungen (19) die beiden folgenden:

$$\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}B+\mathfrak{n}\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}B' = -A,$$

$$\mathfrak{n}\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}B-\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}B' = A';$$

oder mit Rücksicht auf (12'):

$$\left[\mathfrak{n}\lambda\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}+\mathfrak{n}\omega\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}\right]\frac{A'}{A} =$$

$$-1-\omega\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}+\mathfrak{n}^2\lambda\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}.$$

$$\left[\mathfrak{n}\lambda\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}+\mathfrak{n}w\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}\right]\frac{A}{A'} =$$

$$1+\omega\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}-\mathfrak{n}^2\lambda\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}.$$

Diese beiden Gleichungen aber sind nur dann mit einander verträglich, wenn die Coëfficienten von A'/A, beziehungsweise A/A', sowie ihre rechten Seiten einzeln gleich Null sind. Der Wert von A'/A bleibt dann unbestimmt, und es ergeben sich die beiden Bedingungen:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \lambda\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\} &= -\omega\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\}, \\ \omega\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}-\mathfrak{n}^2\lambda\left\{\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right\} &= -1. \end{aligned}$$

Die Combination dieser Gleichungen giebt weiter:

$$(22')\qquad \omega = -(\omega^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2)\left\{\frac{U^2}{wG^2}+\frac{W}{H^2}\right\}.$$

Somit:

$$(23)\qquad \omega = \text{negativ}.$$

Für die statische Charakteristik ist di/dt gleich Null; daher bezeichnet nach Gleichung (5) ω die Tangente des Winkels, unter dem diese statische Charakteristik gegen die Axe i geneigt ist. Es gilt also auch für unseren allgemeineren Fall der Satz, daß eine ungedämpfte Schwingung nur an solchen Stellen der statischen Charakteristik möglich ist, an denen die Charakteristik gegen die i-Axe abfällt.

λ ist nach Gleichung (13') positiv; der Eintritt ungedämpfter Schwingungen ist also an die weitere Bedingung gebunden:

$$\frac{UT}{wG^2} > \frac{L}{H^2}. \tag{24}$$

11.

Es liegt in den Verhältnissen, daß die Größen $\mathfrak{n}T/U$ und $\mathfrak{n}L/W$ im allgemeinen nur kleine Werte haben können. Man kann daher die in den früheren Gleichungen auftretenden Ausdrücke nach Potenzen jener Größen entwickeln und dabei zunächst ihre dritten Potenzen gegen 1 vernachlässigen. Dann ergeben sich an Stelle der Gleichungen (10), (11), (22) die folgenden:

$$\mathfrak{n}^2 Cl\left\{1 + \frac{wT}{lU}\right\} = c^2, \tag{25}$$

$$\frac{c^2}{1 + \frac{wT}{lU}} - \frac{c^2(L+\lambda)l}{Ll + \lambda(L+l)} = Cl\,\frac{Ww + \omega(W+w)}{Ll + \lambda(L+l)}, \tag{26}$$

$$\lambda\left\{\frac{1}{W} + \frac{1}{w} - \mathfrak{n}^2\left(\frac{T^2}{wU^2} + \frac{L^2}{W^3}\right)\right\} = -\omega\left\{\frac{T}{wU} - \frac{L}{W^2} - \mathfrak{n}^2\left(\frac{T^3}{wU^3} - \frac{L^3}{W^4}\right)\right\}, \tag{27}$$

$$\omega\left(\frac{1}{W} + \frac{1}{w}\right) = -1 + \omega\,\mathfrak{n}^2\left\{\frac{T^2}{wU^2} + \frac{L^2}{W^3}\right\} + \lambda\,\mathfrak{n}^2\left\{\frac{T}{wU} - \frac{L}{W^2}\right\}. \tag{28}$$

Vernachlässigt man schon die zweiten Potenzen von $\mathfrak{n}T/U$ und von $\mathfrak{n}L/W$ gegen 1, so wird Gleichung (28):

$$\frac{1}{W} + \frac{1}{w} = -\frac{1}{\omega}. \tag{29}$$

Mit Rücksicht hierauf gehen die Gleichungen (26) und (27) über in:

$$\frac{L\lambda}{L+\lambda} = \frac{L(w+\omega) + \lambda(W+w)}{W+\omega}, \text{ und: } \lambda = \omega^2\left(\frac{T}{wU} - \frac{L}{W^2}\right). \tag{30}$$

Gleichung (25) bleibt unverändert.

12.

In § 9 haben wir gesehen, daß die Schwingung zu einer geradlinigen längs der Charakteristik wird, sobald L und λ gleich Null werden. Im folgenden wollen wir untersuchen, wie sich unsere Formeln gestalten, wenn L allein gleich Null wird. Es wird in diesem Falle:

$$(31)\qquad \begin{aligned} T &= \lambda(W+w),\\ U &= w(W+\omega),\\ G^2 &= w^2(W+\omega)^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2(W+w)^2,\\ H^2 &= W^2. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf diese Werte kommt die zweite der Gleichungen (22) auf die folgende Form:

$$(32)\qquad \omega\left\{\frac{w(W+\omega)^2}{w^2(W+\omega)^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2(W+w)^2}+\frac{1}{W}\right\}-\mathfrak{n}^2\lambda^2\frac{(W+\omega)(W+w)}{w^2(W+\omega)^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2(W+w)^2} = -1.$$

An Stelle von Gleichung (22′) kann man zunächst die folgende setzen:

$$(33)\qquad \lambda = (\omega^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2)\left(\frac{UT}{wG^2}-\frac{L}{H^2}\right),\quad \text{oder } 1 = (\omega^2+\mathfrak{n}^2\lambda^2)\frac{(W+\omega)(W+w)}{G^2}.$$

Diese aber kann nur erfüllt sein, wenn:

$$W+\omega = \text{positiv}$$

ist. Nun wird der Punkt e_1, i_1, der Mittelpunkt der von dem Punkt e, i beschriebenen Ellipse, bestimmt durch die Gleichung (17):

$$e_1 = E - Wi_1.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die bekannte Construction des Punktes e_1, i_1; man trägt auf der Axe der Spannung die elektromotorische Kraft E ab, und zieht durch den so erhaltenen Punkt eine Parallele zur Stromaxe. Von dieser aus trägt man nach unten einen Winkel X ab, dessen Tangente gleich W ist. Der Schnitt seines Schenkels mit der Charakteristik gibt den Punkt e_1, i_1. Nun ist auf der anderen Seite ω nichts anderes, als die Tangente des Winkels, unter dem die statische Charakteristik gegen die i-Axe geneigt ist; bezeichnen wir diesen Winkel mit β, so ist $\omega = \operatorname{tang}\beta$. Die Bedingung $W+\omega$ = positiv geht daher über in:

$$(34')\qquad \operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta = \text{positiv};$$

das ist aber die bekannte Stabilitätsbedingung, die zuerst von **Kaufmann** aufgestellt worden ist, und zu der wir hier von allgemeineren Voraussetzungen aus gelangt sind.

Aus Gleichung (11) ergibt sich mit $L = 0$:

$$\omega = -\frac{Ww}{W+w} - \frac{c^2\lambda^2}{C} \cdot \frac{1}{l(W+\omega)+\lambda(W+w)}\,; \tag{35}$$

ω wird also in der Tat negativ; ferner wird:

$$W+\omega = \frac{W^2}{W+w} - \frac{c^2\lambda^2}{C} \cdot \frac{1}{l(W+\omega)+\lambda(W+w)} \tag{36}$$

positiv, wenn das erste Glied rechts größer ist als das zweite.

Aus den Gleichungen (10) und (25) ergibt sich mit $L = 0$ übereinstimmend:

$$\mathfrak{n}^2 C l \left\{1 + \frac{\lambda(W+w)}{l(W+\omega)}\right\} = c^2. \tag{37}$$

Da ω negativ, $W+\omega$ positiv ist, so würde $(W+w)/(W+\omega)$ mit zunehmendem W kleiner, wenn ω constant wäre. Die Schwingungszahl würde dann mit abnehmendem Strome wachsen, ein Resultat, das mit der Erfahrung in Widerspruch steht. Den Grund dafür wird man darin finden, daß $-\omega$ keineswegs constant ist, sondern mit abnehmendem Strome stark zunimmt. Wahrscheinlich erscheint außerdem, daß auch λ nicht constant ist, sondern mit abnehmendem Strome gleichfalls wächst. In Übereinstimmung steht die Formel mit der Beobachtung unter allen Umständen darin, daß sie für die Schwingungszahl einen kleineren Wert liefert, als die Kirchhoff-Thomsonsche Gleichung $\mathfrak{n}^2 Cl = c^2$.

Die allgemeine Betrachtung der Gleichung (32) ist etwas weitläufig; wir vereinfachen daher die Rechnung durch die Annahme, daß die höheren Potenzen von $\mathfrak{n}\lambda$, von der zweiten an, vernachlässigt werden können gegen die entsprechenden Potenzen von w. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus Gleichung (32) und in Übereinstimmung damit auch aus Gleichung (28):

$$\omega = -\frac{Ww}{W+w} + \omega\frac{\mathfrak{n}^2\lambda^2}{w^2}\,\frac{W(W+w)}{(W+\omega)^2} + \frac{\mathfrak{n}^2\lambda^2}{w^2}\,\frac{Ww}{W+\omega}\,. \tag{38}$$

Aus Gleichung (35) folgt dann, daß die Summe der beiden letzten Glieder der rechten Seite negativ sein muß. Um dies zu untersuchen, bringen wir Gleichung (38) auf die Form;

$$\omega = -\frac{Ww}{W+w} + \frac{\mathfrak{n}^2\lambda^2}{w^2}\,\frac{W}{W+\omega}\,\frac{\omega(W+w)+Ww+\omega w}{W+\omega}\,. \tag{38'}$$

Das zweite Glied rechts ist negativ, wenn der Ausdruck $\omega(W+w) + Ww$ negativ ist. Nun folgt aber aus Gleichung 38':

$$\{\omega(W+w)+Ww\}\cdot\left\{1 - \frac{\mathfrak{n}^2\lambda^2}{w^2}\,\frac{W(W+w)}{(W+\omega)^2}\right\} = \omega\,\frac{\mathfrak{n}^2\lambda^2}{w^2}\,\frac{Ww(W+w)}{(W+\omega)^2}\,. \tag{39}$$

Daraus aber ergiebt sich in der Tat in Übereinstimmung mit Gleichung (35), daß

$$\omega(W+w)+Ww$$

negativ ist.

Fassen wir die Ergebnisse der letzten Betrachtungen zusammen, so ergiebt sich folgendes: Wenn ungedämpfte elliptische Schwingungen im Sinne des Uhrzeigers möglich sein sollen, so müssen vor allem die allgemein gültigen Bedingungen,

$$\lambda = \text{positiv und } \omega = \text{negativ},$$

erfüllt sein. Dazu kommen aber im Falle eines verschwindenden, und ohne Zweifel auch im Falle eines kleinen L die Bedingungen:

$$W+\omega = \text{positiv und } \omega(W+w)+Ww = \text{negativ,}$$
$$\text{aber wenig von Null verschieden.}$$

Die angegebenen nur qualitativen Bedingungen sind mit einander verträglich; die 3 letzten folgen aus (22), (33), (35). Man wird also auch immer ein System von Werten n, C, ω, λ, W, w, l, finden können, welches die Gleichungen (32), (33), (35) und (37) befriedigt. Für ein solches System sind dann ungedämpfte Schwingungen möglich; unter welchen besonderen Verhältnissen solche Schwingungen aber wirklich eintreten, darüber vermag unsere Theorie nichts zu sagen; diese Frage kann nur durch eine Theorie gelöst werden, welche, wie die von Simon, auf die innere Mechanik des Lichtbogens zurückgeht.

Hervorgehoben möge werden, daß die Schwingungszahl nur dann mit zunehmender mittlerer Stromstärke wächst, wenn damit der Wert von $\lambda(W+w)/l(W+\omega)$ abnimmt. Ein solches Verhalten kann, wie schon erwähnt, dadurch bedingt sein, daß $-\omega$ und λ auf dem fallenden Zweige der Charakteristik mit wachsender Stromstärke abnehmen.

Zusatz. Erst nach dem Abschluß der vorstehenden Rechnungen erhielt ich die „Untersuchungen über den selbsttönenden Wellenstromlichtbogen von Gustaf Granquist“ von dem Verfasser freundlichst zugesandt. Seine theoretischen Betrachtungen sind allgemeiner als die vorstehenden, sofern sie sich auch auf die Gebiete der gedämpften und der instabilen Schwingungen beziehen; auf der anderen Seite sind sie specieller, da sie den Coëfficienten λ gleich 0 setzen; meine Rechnungen werden daher auch neben denen von Granquist Interesse besitzen. Die in § 9 abgeleitete Beziehung $Ww+\omega(W+w)=0$ ist in allgemeinerem Zusammenhange schon von Barkhausen in einer demnächst erscheinenden Göttinger Dissertation[1]) aufgestellt worden.

1) Das Problem der Schwingungserregung. Göttingen 1907.

Numerische Uebersicht der am Samoa-Observatorium im Jahre 1906 registrierten Fern- und Naherdbeben.

Von

F. Linke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni 1907 durch Herrn Prof. Wiechert.

Das im Samoa-Observatorium aufgestellte Wiechert'sche Pendel von 1000 kg Masse registrierte im Jahre 1906 329 Erdbeben, von den 188 aus einer Entfernung unter 1000 Kilometern stammten (Naherdbeben) und 141 fernere Herde hatten (Fernerdbeben).

Die Verteilung auf die einzelnen Monate ist folgende:

Monate	Nahbeben	Fernbeben	Bemerkungen
Januar	18	13	
Februar	17	7*	
März	35	11	
April	27	11	
Mai	18	11	
Juni	7	11	
Juli	13	10	
August	5*	25	Valparaiso-Beben
September	14	11	
Oktober	14	12	
November	10	9	
Dezember	10	10	
Jahr	188	141	

In den Fernbeben ist eine jährliche Periode nicht zu erkennen; die hohe Zahl im August gehört dem Schwarm der Valparaiso-Beben an.

Hingegen läge es nahe in der Verteilung der Nahbeben eine Periode anzunehmen mit einem Maximum im März und einem Minimum im August. Dem widerspricht jedoch die Verteilung im Jahre 1905, wo merkwürdigerweise gerade ein Maximum im August und ein Minimum im März gefunden wurde. Die Verteilung scheint also von Erscheinungen abzuhängen, die keine jährliche Periode haben. Im Jahre 1905 war das Maximum mit dem Ausbruche eines neuen Vulkans auf der Samoa-Insel Savaii verbunden, der in den ersten Monaten heftige Eruptionen hatte. Seit Dezember 1905 jedoch fließt die im Krater hervortretende Lava durch unterirdische Kanäle von mehr als 12 Kilometer Länge in die See ab und nur, wenn diese durch zufällige Vorkommnisse verstopft werden, tritt aus den Spalten des Lavafeldes die flüssige Lava zu Tage. So zuerst gegen Ende August 1906, besonders auch im Dezember 1906. Beziehungen zu den Nahbeben, die übrigens fast ausschließlich aus größerer Entfernung, als die des Kraters kommen, lassen sich im Jahre 1906 nicht finden. Zur Zeit des Maximums der Nahbeben floß die Lava sogar so ruhig ab, daß die Bevölkerung sich der Hoffnung auf ein baldiges Aufhören der vulkanischen Tätigkeit hingab. Allgemein ist die Zahl der Naherdbeben stark zurückgegangen.

Im vorigjährigen Berichte hatten sich eigenartige monatliche Perioden herausgestellt. Es waren die Anzahl der Erdbeben am Tage einer Mondphase mit denen der drei vorhergehenden und nachfolgenden Tage zusammengefaßt worden und dabei hatte sich folgende Verteilung ergeben:

Monatliche Perioden der Erdbeben 1905.

Mondphase	Nahbeben	Fernbeben
Erstes Viertel	16.6* %	23 %
Vollmond	23.0	33
Letztes Viertel	25.4	23
Neumond	35.0	21*

Bei der monatlichen Auszählung der Erdbeben von 1906 ergiebt sich:

Mondphase	Nahbeben	Fernbeben
Erstes Viertel	19.2* %	18.4* %
Vollmond	19.2	22.8
Letztes Viertel	25.8	25.0
Neumond	35.8	33.8

Es fällt sofort auf, daß die monatliche Periode der Naherdbeben in beiden Jahren dieselbe war; bei den Fernbeben jedoch ergiebt sich eine wesentlich andere Verteilung wie im vorigen Jahre. Sie gleicht vielmehr der der Nahbeben. Während man also geneigt ist, diese seltsame monatliche Periode der Nahbeben für reell anzunehmen, scheint eine Periode gleicher Art bei den Fernbeben nicht zu bestehen. Allerdings soll nicht übersehen werden, daß der Einfluß des Mondes in verschiedenen Gegenden ganz verschieden sein kann, sodaß sich wohl für Erdbeben eines begrenzten Gebietes eine Abhängigkeit von den Mondphasen ergeben kann, der aber im Mittel aus allen andren Gebieten verschieden ausfällt, je nachdem das eine oder andere von größern Erdbebenschwärmen heimgesucht wird. Theoretisch erklärbar erscheint in erster Linie ein Unterschied zwischen Solstitien und Syzygien. Und der ergiebt sich allerdings mit großer Deutlichkeit aus allen in Samoa während der zwei Jahre registrierten Erdbeben:

Phasen	Nahbeben		Fernbeben		Mittel
	1905	1906	1905	1906	
Neumond und Vollmond	58.2 %	54.0 %	55.0 %	56.6 %	56.0 %
Erstes und letztes Viertel	41.8	46.0	45.0	43.4	44.0

Die Bearbeitung der Registrierungen von Nahbeben wird in einiger Zeit veröffentlicht werden. Ueber die Fernerdbeben wurden durch das Geophysikalische Institut in Göttingen regelmäßige Berichte versandt.

Apia, den 1. Februar 1907.

Berichtigung.

In der Arbeit

Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen etc.

sind einige Vorzeichenfehler stehen geblieben.

Für Opal, Steinsalz, Alaun, Bleinitrat, Flußspat ist $\varkappa$ mit dem negativen Zeichen zu versehen, das bei $\varkappa'$ richtig gesetzt ist; bei Zinkblende fehlt das negative Zeichen sowohl bei $\varkappa$ als bei $\varkappa'$.

Außerdem muß S. 133, Z. 7 und 10 v. u. $D\varphi_h$ durch $D\varphi_h/h$ ersetzt werden.

W. Voigt.

Über die Einwirkung des Lichtes auf die Bildung der Schwefelsäure.

Von

Alfred Coehn.

Mit 3 Figuren im Text.

Vorgelegt von Eduard Riecke in der Sitzung vom 6. Juli 1907.

Die Photochemie hat — mit Ausnahme der Photographie — bisher keinerlei technische Anwendung gefunden. Da aber für die Förderung eines Wissensgebietes ein erheblicher Gewinn aus der Mitarbeit der Technik zu erhoffen ist, muß es — auch vom Standpunkte der wissenschaftlichen Photochemie — als eine lösenswerte Aufgabe erscheinen, solche photochemische Reaktionen zu studieren, welche die Technik zur Mitarbeit bewegen könnten. Neben anderen auch von diesem Gesichtspunkte ausgehend habe ich in Gemeinschaft mit Herrn stud. Hans Becker die Einwirkung des Lichtes auf die Bildung von Schwefelsäure untersucht.

1. Auf zwei verschiedenen Wegen kann Schwefeltrioxyd unter der Einwirkung des Lichtes entstehen.

Im Jahre 1870 beobachtete Morren[1]), daß in Schwefeldioxyd, wenn er es dem intensiven Sonnenlicht, das ihm in der Provence zur Verfügung stand, aussetzte, sich Nebel bildeten. Er konnte nachweisen, daß das Schwefeldioxyd im Licht in Schwefeltrioxyd und Schwefel zerfällt: $3\ SO_2 = 2\ SO_3 + S$.

Unsere Arbeit begann mit einer Wiederholung dieser Versuche, wobei wir uns als Lichtquelle einer Quecksilberbogenlampe aus Quarz (von der älteren, Ztschrft. f. Elektroch. **10.** 123. 1904 beschriebenen Form) bedienten. Das Schwefeldioxyd wurde in geschlossenem Gefäß oder auch langsam strömend dem Lichte ausgesetzt. Es gelang leicht, die Zerfallprodukte SO_3 und S nachzuweisen. Wurde unterhalb der Temperatur von 450° gearbeitet,

1) A. ch. ph. (4) **21**, 323, 1870.

so schied sich fester Schwefel an der der Lampe zugekehrten Gefäßwand aus; und war dieses durch Drehen des Bestrahlungsgefäßes allseitig geschehen, so wurden die wirksamen Strahlen vollständig absorbiert und der Fortgang der Reaktion war gehemmt.

2. Die Abscheidung von Schwefel bleibt aus bei dem zweiten Vorgange, durch welchen im Licht Schwefeltrioxyd entstehen kann und welcher dem Vorgange des gewöhnlichen Kontakt-Prozesses entspricht: $2\ SO_2 + O_2 = 2\ SO_3$. Während der Eintritt der entsprechenden Oxydation in Lösung bekannt ist[1]), findet sich über das Verhalten des gasförmigen Systems keine Angabe. Die Versuche zeigten, daß das Licht auch hier außerordentlich wirksam ist. Der Vorgang, welcher unter der Einwirkung des ihn am stärksten fördernden Katalysators, des Platins, erst bei 450° mit merklicher Geschwindigkeit verläuft, erlangt diese unter dem Einfluß des Lichtes bereits bei Zimmertemperatur. Bei Erhaltung des homogenen gasförmigen Systems, also etwas oberhalb 46°, der Siedetemperatur des Trioxyds, ist bereits nach kurzer Zeit das Auftreten dieses Stoffes zu konstatieren.

3. Für beide Reaktionen gemeinsam erwies es sich als erforderlich, daß die reagierenden Gase nicht über einen bestimmten Grad hinaus getrocknet wurden. Diese für zahlreiche chemische Reaktionen als notwendig erkannte Bedingung[2]) hat sich auch sonst für photochemische Vorgänge als giltig erwiesen[3]). Die Frage aber, ob auch hier, wie bei dem Kontakt-Verfahren mit Platin ein Optimum für den Feuchtigkeitsgehalt existiert, konnte verneinend beantwortet werden. Trocknung der Gase mit Phosphorsäure ließ die Reaktion praktisch vollständig ausbleiben; Trocknung mit konzentrierter Schwefelsäure förderte den Eintritt, weitere Zuführung von Feuchtigkeit setzte aber nicht wieder, wie beim Kontakt-Verfahren, die Reaktionsgeschwindigkeit herab.

4. Nachdem so die beiden Reaktionen in der primitiven Anordnung, welche die zur Verfügung stehende Quarzlampe nur gestattete, sich zu näherem Studium geeignet erwiesen hatten, wurde eine Quarzlampe konstruiert, welche die Konstanterhaltung der verchiedenen in Betracht kommenden Versuchsbedingungen ermöglichte.

---

1) Chasting, Ann. chim. 1877. 145.
2) Dixon, Journ. Chem. phys. Soc. **49**, 94 und 384. 1886.
3) Pringsheim, Wied. Ann. **32**, 384. 1887.

Figur 1.



I, II, III — Quarzwände.
Zwischen II u. III evakuierter Raum.
IV, V - - - Glaswände.
Sch Schliffverbindungen.
S Siegellackdichtungen.
D Quecksilberdichtungen.
E Quecksilberelektroden.
K Kork.
L Lampenkühlung
R Kühlung des Reaktionsraumes.

Nur die inneren — in der Figur durch ausgezogene Linien wiedergegebenen — Teile bestehen aus Quarz, wie das ähnlich schon F. Fischer[1]) vorgeschlagen hat. In der Lampe von Fischer

1) Physikal. Ztschrft. 6. 575. 1905.

befand sich aber die Kühlvorrichtung für den Reaktionsraum in dessen Centrum, wodurch in diesem Raum ein starkes Temperaturgefälle zwischen der gekühlten Wand und der heißen Quarzwand bestand. In unserer Lampe ist die Wasserkühlung des Reaktionsraumes zwischen den inneren Quarzwänden angebracht. Die Zuführung des Kühlwassers geschieht von unten her, und auf solche Weise ließ sich die Temperatur des Reaktionsraumes von der Erwärmung durch die Lampe vollkommen unabhängig machen. Wir fanden es bequem, mit Kühlwasser von 50° oder ohne Kühlwasser bei ca. 150° zu arbeiten. Dabei konnte die Temperatur bei 50° innerhalb 1°, bei 150° innerhalb weniger Grade konstant erhalten werden. Für die Homogen-Erhaltung des Systems bei dem SO_2-Zerfall ohne Sauerstoff (450°) konnte im Innern noch eine Heizvorrichtung angebracht werden. Hier soll nur die Rede sein von der Reaktion mit Sauerstoff, für welche 50° die untere Temperaturgrenze bedeutet. Daß die Absorption ultravioletten Lichtes durch Wasser verschwindend ist, ist bekannt und wurde für die hier in Betracht kommenden Strahlen noch besonders nachgewiesen. Die Lampe konnte bei einer Spannung von 24,5 Volt mit Stromstärken von 6—9 Amp. betrieben werden. Die Lichtstärke ließ sich, wie die Versuche ergaben, genügend konstant erhalten.

5. Mit dieser Lampe konnte nun auf zwei verschiedene Weisen operiert werden: mit vorüberströmenden oder mit ruhenden Gasen. Für die Versuchsreihen der ersten Gattung wurde in den inneren Schliff des mittelsten Quarzrohres ein unten offenes fast bis an den Boden reichendes Rohr aus Geräteglas eingeführt, das an seinem oberen Ende Ansätze für den Ein- und Austritt der Gase hatte. In der Mitte, also durch das Glasrohr, erfolgte der Eintritt, durch den ca. 1 mm breiten Ring zwischen Quarz und Glas der Austritt. Die schweflige Säure wurde einer Bombe entnommen, der Sauerstoff wurde aus Kalilauge an Nickelelektroden entwickelt, wobei er niemals ozonhaltig ist [1]. Besondere Vorrichtungen waren zur Konstanterhaltung der beiden sich vereinigenden Gasströme angebracht. Die zahlreichen Einzelheiten der Anordnung werden in der demnächst erscheinenden Dissertation von Herrn Hans Becker beschrieben werden. Bei den Versuchen wurde das Gasgemisch, welches zur Vermeidung von Schwefelabscheidung stets Sauerstoff in einem geringen Überschuß enthielt, durch die Lampe geleitet, so lange bis in der vorgelegten Barytlauge sich Baryumsulfat abschied. Dann wurde noch längere Zeit hindurch-

1) Coehn und Osaka, Ztschrft. f. anorg. Ch. **34**. 86. 1903.

geführt und darauf statt durch Barytlauge durch eine titrierte Jodlösung geleitet, in welcher nach der sich vortrefflich bewährenden, von Bodenstein [1]) verwendeten Methode Schwefeldioxyd, sodann die Gesamtsäure und daraus das Schwefetrioxyd bestimmt wurden.

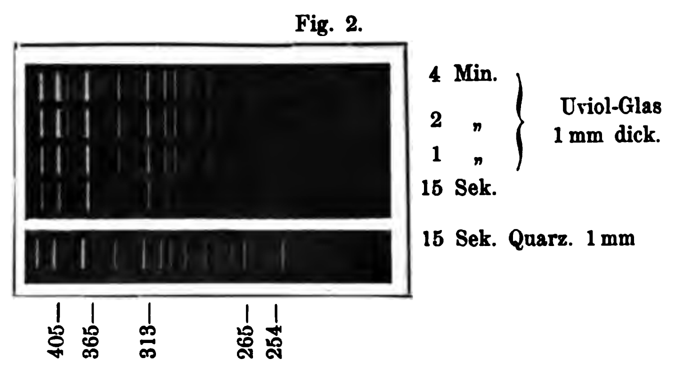
6. Gegenüber dieser durch längere Zeit beständige Aufmerksamkeit erfordernden Methode schien es einfacher, das Gasgemisch in zugeschmolzenen Röhren zu belichten. Um die Fehler bei den Analysen nicht anwachsen zu lassen, mußten die Röhren möglichst großen Inhalt haben. Die Dimensionen der Lampe erlaubten, Röhren von ca. 2 cm Durchmesser und von 20 cm Länge, also ca. 60 ccm Inhalt zu verwenden. Von solchen Röhren wurden 6—10 Stück mit Kapillaren an einander geschmolzen, mit demselben Gasgemisch gefüllt, dann einzeln abgeschmolzen und unter verschiedenen (dabei aber zur Kontrolle je zwei unter den gleichen) Bedingungen der Zeit, Temperatur, Lichtstärke etc. exponiert. Als Material für die Röhren wurde aus ökonomischen Gründen (der Preis einer Quarzröhre in den angegebenen Dimensionen sollte ca. 50 Mk. betragen) das von Schott und Gen. in Jena hergestellte — als Ultraviolett-durchlässig geltende — Uviolglas verwendet, an welches sich Kapillaren aus Geräteglas bequem ansetzen ließen. Es wurden zahlreiche Versuche angestellt, aber der Erfolg war nur sehr gering. Nach achtstündiger Belichtung bei 150° waren ca. 14% SO_3 entstanden, nach einer Stunde etwa 1%.

Nun aber war bei den Durchströmungsversuchen, bei welchen das Licht nur Quarzwände zu durchdringen hatte, bereits eine weitaus höhere Ausbeute erzielt worden. Es konnte die hier viel (zehnmal) dickere Schicht, aber es konnte auch das Uviolglas die Ursache des geringeren Erfolges sein. Um uns über den Unterschied des Uviolglases und des Quarzglases bezüglich ihrer Durchlässigkeit für Ultraviolett zu informieren, wurden Spektralaufnahmen mit dem uns von Herrn Geheimrat Voigt gütigst zur Verfügung gestellten Quarzspektrographen des physikalischen Instituts ausgeführt. Man erkennt an den beiden beifolgenden Aufnahmen die Quecksilberlinien und sieht deutlich, daß eine helle Quecksilberlinie 254 wohl durch Quarz aber nicht mehr durch Uviolglas hindurchgeht.

---

1) Zeitschr. f. Elektrochem. 11. 378. 1905.

Fig. 2.



7. Bezeichnete aber diese das für unsere Reaktion wirksame Strahlengebiet, so war es aussichtslos, mit Uviolglas besseren Erfolg zu erhoffen. Wir entschlossen uns daher, sechs Quarzröhren in den angegebenen Dimensionen mit angesetzten Quarzkapillaren zu verwenden. Die Füllung geschah genau wie bei den Uviolglasröhren, das Zusammenschmelzen und Trennen der sechs Röhren an den Kapillaren war mit dem Sauerstoffgebläse bequem ausführbar. Dann wurden die Röhren wie vorher die Uviolglasröhren bei 150° exponiert. Der Erfolg war ein ganz überraschender: Bereits nach einer Stunde waren ca. 65% umgesetzt. Wir verkürzten die Zeit bis herab zu fünf Minuten, wobei die Ausbeute bereits 20% betrug, so daß man an die Schnelligkeit photographischer Prozesse gemahnt wird.

Nun war es auffallend, daß um 65% herum auch die höchste Ausbeute lag, zu der wir bei den früheren Durchströmungsversuchen gelangt waren. Wurde jetzt — im geschlossenen Rohr — die Zeit der Belichtung bis zu acht Stunden verlängert, so stieg doch die Ausbeute nicht über die in einer Stunde erreichte von eben jenem Betrage.

8. Das durch eine Reihe von Untersuchungen bekannte Gleichgewicht zwischen Schwefeldioxyd, Sauerstoff und Schwefeltrioxyd liegt praktisch bei 100% Ausbeute an SO_3.

Unsere Resultate führten zu der Vermutung, daß im Licht ein anderes Gleichgewicht sich einstellt.

Wenn das aber der Fall ist, so muß dieses Gleichgewicht sich auch von der anderen Seite her erreichen lassen, d. h. SO_3 muß, worauf bisher keinerlei bekannte Tatsachen deuten, durch Licht zerlegt werden können. Schwefeltrioxyd wurde also in die Quarzröhren hineindestilliert, bei 50° und Atmosphärendruck abgeschmolzen und dann belichtet. Es zeigte sich, daß SO_3 durch Licht in SO_2 und O_2 zerlegt wird und zwar bis zu einem Gehalt,

welcher demjenigen der Bildungsversuche fast völlig entspricht. Die Zerlegung ging bis zu ca. 35% und änderte sich dann mit der Zeit nicht weiter.

9. Da bei den Analysen außer SO_3 und SO_2 aus dem nach der Absorption übrig bleibenden Gasvolumen auch O_2 bestimmt wurde, waren die Daten zur Ermittelung der Gleichgewichtskonstante gegeben. Ihr Wert war in einer Anzahl von Versuchen

$$K \cdot 10^6 = \frac{[SO_2]^2 \cdot [O_2]}{[SO_3]^2} = 3{,}1;\ 2{,}9;\ 2{,}7;\ 3{,}4;\ 3{,}5;\ 2{,}9 \text{ etc.}$$

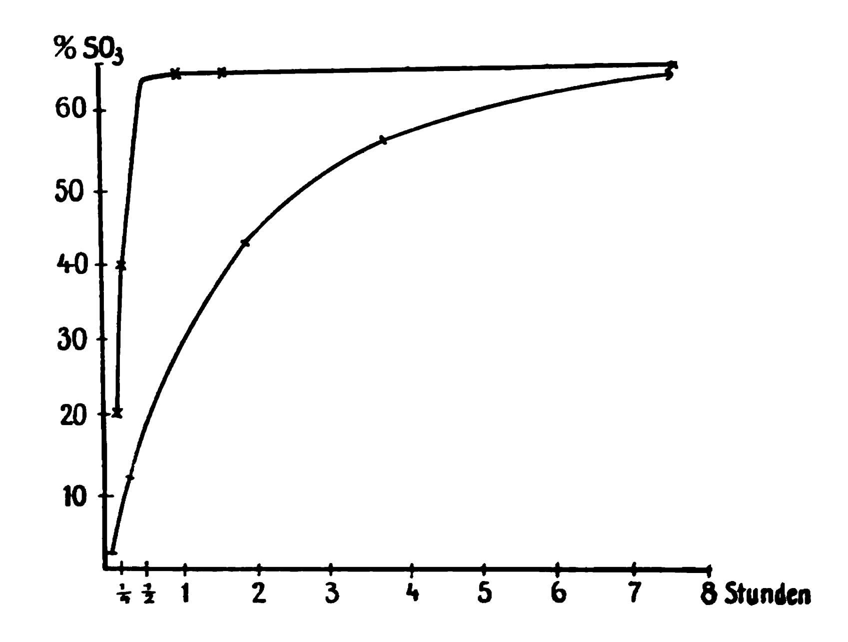
Mittel 3,2.

10. Bis dahin war mit annähernd der gleichen Sauerstoffkonzentration ($SO_2 : O_2$ ca. 2 : 1) gearbeitet worden. Es wurde nun die Sauerstoffkonzentration gesteigert bis hinauf zu dem Verhältnis $SO_2 : O_2$ ca. 2 : 10. Die Forderung, daß dabei die prozentische Ausbeute steigen, die Konstante erhalten bleiben muß fand sich erfüllt. Die Ausbeute stieg von ca. 65% auf ca. 73%. Die Konstante schwankte innerhalb der oben angegebenen Werte.

11. Ein Einfluß der Temperatur auf das Gleichgewicht war a priori nicht zu erwarten. Dementsprechend wurde die Konstante bei 50° und 150° übereinstimmend gefunden. Wohl aber zeigte sich der Einfluß der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit Während bei 150° eine Stunde bis zur Einstellung des Gleich-



Fig. 3.



gewichts in allen Fällen genügte, bedurfte es bei 50° einer Zeit von 3—5 Stunden. Die beifolgenden Kurven deuten den Verlauf an.

Die Daten liessen sich zur Ermittelung des Temperatur-Koeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit verwerten. Er beträgt für 10° ca. 1,2.

12. Was die Möglichkeit einer Verschiedenheit in den Wellenlängen für die Bildung und Zersetzung betrifft, so weist bisher nichts auf eine antagonistische Wirkung zweier Gebiete hin, wie das beim Ozon [1]) und anderen Reaktionen [2]) der Fall ist. Wie die Bildung des SO_3, so zeigte sich auch der Zerfall in Röhren aus Uviolglas bedeutend herabgesetzt. Nach vier Stunden war bei 150° der Zerfall nur bis zu 8% gelangt, gegenüber der in Quarzröhren bereits nach einer Stunde erreichten Gleichgewichtskonzentration von ca. 35%. Das Wellengebiet für Bildung wie für den Zerfall liegt also jedenfalls bei kürzeren als den vom Uviolglas ohne beträchtliche Absorption hindurchgelassenen.

13. Das Licht übt an dem vorliegenden Gleichgewicht zwei verschiedene Funktionen aus. Bei der Bildung des SO_3, dem unter Verlust freier Energie des Systems verlaufenden Vorgange, beschleunigt es nur die Einstellungsgeschwindigkeit des Gleichgewichts, wirkt also lediglich als Katalysator. Dagegen leistet es bei der Zerlegung des SO_3, des im Dunkeln stabilen Systems, eine Arbeit, die hier recht beträchtlich ist. Natürlich ist das durch Licht dem Lichtgleichgewicht von der einen oder anderen Seite zugeführte System nach Abstellen der Bestrahlung wieder instabil und muß eine Tendenz in der Richtung zum Dunkelgleichgewicht besitzen. Das aber macht gerade den vorliegenden Fall für ein näheres Studium des Gleichgewichts besonders günstig, daß das System $SO_2 + O_2$ dieser Tendenz zur Einstellung des Dunkelgleichgewichts praktisch nur unendlich langsam folgen kann, so daß das im Licht eingestellte Gleichgewicht erhalten bleibt. Wir haben es demnach hier nicht mit einem stationären Zustand zu tun — zu dessen Aufrechterhaltung dauernder Energieverbrauch erforderlich wäre.

14. Aus der Tatsache, daß das Licht bei der Bildung des SO_3 rein katalytisch, bei der Zerlegung arbeitleistend wirkt, ist weiter eine Folgerung für den Einfluß der Lichtstärke auf

1) Regener, Ann. d. Phys. 20. 1033. 1906.

2) Trautz, Verhdlgn. d. 78. Naturf. Vers. 1906. 114.

das Lichtgleichgewicht zu ziehen. Erfolgt die Zerlegung des SO_3 unter Arbeitsaufwand, so muß sie im Gleichgewicht in stärkerem Licht weiter vorgeschritten sein als in schwächerem.

Daraus aber folgt das scheinbare Paradoxon, daß in schwächerem Lichte — wenn nur die Zeit zur Einstellung des Gleichgewichts ausreichte — sich aus SO_2 und O_2 mehr SO_3 gebildet haben muß, als in stärkerem.

Auch diese Folgerung konnte bestätigt werden. Unsere Lampe erlaubte eine Variation der Betriebsstromstärke von 6 bis 9 Amp. Auf das Verhältnis zwischen Stromstärke und Lichtstärke soll hier nicht eingegangen werden: Man erkannte unmittelbar, daß eine erhebliche Änderung der Lichtstärke stattfand.

Die Belichtung von SO_3 innerhalb verschiedener Zeiten (eine bis acht Stunden) ergab, daß, während bei einer Stromstärke von 9 Amp. im Gleichgewicht ca. 35%, bei 6 Amp. im Gleichgewicht nur 28% zersetzt waren.

Entsprechend entstanden in dem stärkeren Licht bei 9 Amp. aus SO_2 und O_2 65% SO_3, in dem schwächeren Licht bei 6 Amp. dagegen 73%. Die Konstante für 6 Amp. schwankte zwischen 1,27 und $1{,}46 \cdot 10^{-6}$.

Es zeigt also die Gleichgewichtskonstante eine Abhängigkeit von der Lichtstärke in dem erwarteten Sinne:

$$K \text{ (Licht entspr. 9 Amp.) } \frac{[SO_2]^2 \cdot [O_2]}{[SO_3]^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-6}$$

$$K \text{ (Licht entspr. 6 Amp.) } \frac{[SO_2]^2 \cdot [O_2]}{[SO_3]^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$$

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen habe ich zu danken, daß sie diese Untersuchung förderte, indem sie die Mittel zur Beschaffung der oben beschriebenen Quarzlampe zur Verfügung stellte.

Göttingen, Institut für physikalische Chemie, Mai 1907.

Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$.

Von

Alfred Haar in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 7. Juli 1907.

Verschiedene Probleme der Mathematik und der mathematischen Physik haben die Aufmerksamkeit auf die Randwertaufgabe der Potentialgleichung:

$$\Delta U = 0$$

gelenkt. Durch eine Reihe von Arbeiten — ich nenne nur diejenigen von C. Neumann[1]), H. A. Schwarz[2]), H. Poincaré[3]), D. Hilbert[4]) — wurde der Beweis erbracht, daß eine und nur eine Lösung dieser Gleichung existiert, die auf einer geschlossenen Kurve gegebene stetige Randwerte annimmt. Nach Erledigung dieses Problems wandten sich die Mathematiker zu der allgemeinen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus, um auch in diesem Falle die analogen Fragen zu beantworten; ich erwähne nur die Abhandlung von D. Hilbert[5]), an die die vorliegende Arbeit anknüpft.

---

1) C. Neumann: „Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0".$$

Crelle's Journal, Bd. 59, S. 335.

2) H. A. Schwartz: Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 157.

3) H. Poincaré: American Journal of Mathematic, Bd. XII, S. 211.

4) D. Hilbert: „Ueber das Dirichlet'sche Prinzip", Crelle's Journal, Bd. 129, S. 65.

5) D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen". (Zweite Mitteilung.) Diese Nachrichten 1904, S. 213.

Durch diese Arbeiten sind aber die Randwertaufgaben, die in der mathematischen Physik auftreten, nicht erschöpft. In der Elastizitätstheorie spielt die Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

eine sehr wichtige Rolle; es wird hier der Nachweis erfordert, daß diese Gleichung eine Lösung besitzt, die innerhalb einer — gewissen Stetigkeitsbedingungen genügenden — Kurve regulär analytisch ist, und deren Randwerte, und die Werte ihrer Ableitung nach der inneren Normale auf dieser Kurve, gegebene stetige Funktionen sind[1]). Durch die Anwendung der Integralgleichungen gelang es mir den Beweis dieser Tatsache zu erbringen; ich beschränke mich an dieser Stelle auf eine kurze Andeutung des Gedankenganges meines Beweises.

In der (x, y) Ebene denken wir uns eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen:

$$x = a(s)$$
$$y = b(s)$$

gegeben, wobei wir annehmen, daß die periodischen Funktionen $a(s)$ und $b(s)$ dreimal stetig differenzierbar sind. Wir konstruieren die Greensche Funktion zweiter Art[2]) $G(x, y; \xi, \eta)$ der Potentialgleichung für diese Kurve C, die in Bezug auf x, y innerhalb C der Differentialgleichung:

$$\Delta G = 0$$

genügt, an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ logarithmisch unendlich wird, und deren, in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung auf C einen von s unabhängigen Wert besitzt. Rücken die Punkte x, y bezw. ξ, η in die Randpunkte $a(s), b(s)$ bezw. $a(t)$, $b(t)$ der Kurve C, so mögen die betreffenden Werte dieser Greenschen Funktion mit $G(s, t)$ bezeichnet werden.

In der Potentialtheorie wird gezeigt, daß wenn $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige periodische Funktionen sind — ihre Periode möge

1) Vergl. die Preisaufgabe der Pariser Academie (Comptes Rendus 1905, S. 1145).

Von den vielen Abhandlungen, die sich mit dieser Differentialgleichung beschäftigen, erwähne ich nur die neu erschienenen Arbeiten von G. Fubini (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo XXIII (1907) S. 59) und S. Zaremba (Bulletin de l'academie du Cracovie 1907, S. 148).

2) cf. D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (Dritte Mitteilung). Diese Nachrichten 1905, S. 309.

mit der Periode von $a(s)$ und $b(s)$ übereinstimmen —, die den Relationen:

$$\int_{(C)} q(s)\, ds = 0$$

$$p(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} G(s,t)\, q(s)\, ds = \text{const.}$$

genügen, eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion existiert, die auf C die Randwerte $p(s)$ annimmt, und deren normale Ableitung auf C mit der Funktion $q(s)$ übereinstimmt [1]).

Setzen wir jetzt zur Abkürzung:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2(x,y;\,\xi,\eta),$$

so sind:

$$r^2(x,y;\,\xi,\eta)\, lr(x,y;\,\xi,\eta) \text{ und } r^2(x,y;\,\xi,\eta)$$

für jeden Wert der Parameter ξ und η Lösungen der Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta U = 0. \tag{1}$$

Daher stellt das über die Randkurve C erstreckte Integral:

$$U(x,y) = \int_{(C)} r^2(x,y;\,a(t),b(t))\, lr(x,y;\,a(t),b(t))\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} r^2(x,y;\,a(t),b(t))\, \psi(t)\, dt$$

— wobei $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ beliebige stetige Funktionen bedeuten mögen — eine innerhalb C reguläre Lösung unserer Differentialgleichung dar, deren Randwerte auf C durch die Formel:

$$U(s) = \int_{(C)} r^2(s,t)\, lr(s,t)\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} r^2(s,t)\, \psi(t)\, dt,$$

und deren normale Ableitung durch:

$$\frac{dU}{dn} = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)\, lr(s,t)}{\partial n}\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)}{\partial n}\, \psi(t)\, dt$$

dargestellt wird, wobei:

$$r(a(s),b(s);\,a(t),b(t)) = r(s,t),$$

$$\left[\frac{\partial r^2(x,y;\,a(t),b(t))}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = \frac{\partial r^2(s,t)}{\partial n}$$

gesetzt ist. —

1) cf. D. Hilbert: l. c. S. 310.

Um nun eine Lösung unserer Differentialgleichung zu konstruieren, deren Randwerte auf C mit der gegebenen dreimal stetig differenzierbaren Funktion $f(s)$, und deren Ableitung nach der inneren Normale daselbst mit $g(s)$ übereinstimmt, genügt es die Funktionen φ und ψ so zu bestimmen, daß eine reguläre Potentialfunktion existiere, die auf der Kurve C die Randwerte:

$$f(s) - U(s)$$

annimmt, und deren normale Ableitung gleich:

$$g(s) - \frac{\partial U}{\partial n}$$

wird. Ist nämlich $u(x, y)$ diese Potentialfunktion, so ist

$$U(x, y) + u(x, y)$$

offenbar eine unsere Bedingungen erfüllende Lösung der Differentialgleichung (1). —

Damit aber eine solche Potentialfunktion existiere, ist nach unseren früheren Bemerkungen hinreichend, daß die Relationen:

$$\int_{(C)} \left(g(s) - \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = 0$$

$$f(s) - U(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s, t) \left(g(t) - \frac{\partial U}{\partial n}\right) dt$$

erfüllt seien. Diese Relationen geben zwei Integralgleichungen für die unbekannte Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, auf deren Lösung unser Problem zurückgeführt ist. — Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$K(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s, \sigma) \frac{\partial r^2(\sigma, t)\, lr(\sigma, t)}{\partial n}\, d\sigma$$

$$\mathsf{K}(s, t) = r^2(s, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s, \sigma) \frac{\partial r^2(\sigma, t)}{\partial n}\, d\sigma$$

$$L(s) = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s, t)\, lr(s, t)}{\partial n}\, dt$$

$$\Lambda(s) = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s, t)}{\partial n}\, dt,$$

so lauten unsere Integralgleichungen:

$$\int_{(C)} (r^2(s,t)\, l r(s,t) + K(s,t))\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} \mathrm{K}(s,t)\, \psi(t)\, dt \tag{2}$$
$$= f(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} G(s,t)\, g(t)\, dt$$

$$\int_{(C)} L(s)\, \varphi(s)\, ds + \int_{(C)} \Lambda(s)\, \psi(s)\, ds = \int_{(C)} g(s)\, ds. \tag{3}$$

Ich bemerke, daß die letzte Gleichung keine Integralgleichung im gewöhnlichen Sinne ist, sie ist mit einer Gleichung für die Fourier-Koeffizienten der Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ äquivalent. Bezeichnen wir nämlich mit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bezw. mit $y_0, y_1 y_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen:

$$x_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds; \quad x_{2p-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos ps\, ds;$$
$$x_{2p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s) \sin ps\, ds$$
$$y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(s)\, ds; \quad y_{2p-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(s) \cos ps\, ds;$$
$$y_{2p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(s) \sin ps\, ds$$

— indem wir der Einfachheit halber die Gesamtlänge der Kurve C gleich 2π nehmen — und entsprechend:

$$l_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(s)\, ds, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Lambda(s)\, ds; \quad g_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s)\, ds,$$

so ist jene Gleichung mit der Gleichung:

$$l_0 x_0 + \lambda_0 y_0 = g_0 \tag{3'}$$

äquivalent. Die erste Integralgleichung ist eine Integralgleichung erster Art mit den zwei unbekannten Funktionen φ und ψ; sie ist mit einem linearen Gleichungssystem für die Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen äquivalent, denen noch die Bedingung (3′) auferlegt wird. Herr Prof. Hilbert hat in seiner Vorlesung über Integralgleichungen im S.S. 1906, für die Behandlung der Integralgleichung:

$$F(s) = \int_{(C)} l r(s,t)\, \Phi(t)\, dt$$

eine Methode angegeben, die auch in diesem Falle zum Ziele führt; sie besteht darin, daß man diese Integralgleichung auf ein System linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten der von Herrn Hilbert in seiner vierten Mitteilung[1]) behandelten Art zurückführt. — In der Integralgleichung (2) kommt aber noch eine andere Funktion $\psi(s)$ vor, wodurch erreicht wird, daß es unendlich viele Funktionenpaare $\varphi(s)$, $\psi(s)$ gibt, die jene Integralgleichung befriedigen. — Es ist zweckmäßig diese Willkür dazu zu benutzen, ein solches Lösungspaar herauszugreifen daß:

$$x_0 = 0, \text{ und } y_2 = y_3 = \cdots = 0$$

sein soll. Ich beweise dann, indem ich das genannte Hilbertsche Verfahren anwende, folgenden Satz:

Entweder gibt es bei beliebig gewählten dreimal stetig differenzierbaren Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ ein Lösungssystem unserer Integralgleichungen (2) und (3), oder aber es besitzen die zugehörigen homogenen Gleichungen:

$$\text{2a)} \qquad \int_{(C)} (r^2(s,t)\, lr(s,t) + K(s,t))\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} \mathsf{K}(s,t)\, \psi(t)\, dt = 0$$

$$\text{3a)} \qquad \int_{(C)} L(s)\, \varphi(s)\, ds + \int_{(C)} \varLambda(s)\, \psi(s)\, ds = 0$$

ein nicht verschwindendes Lösungssystem, bei dem

$$x_0 = 0 \text{ und } y_2 = y_3 = \cdots = 0$$

ist, wo x_p und y_p die frühere Bedeutung haben. Die Randwertaufgabe der vorgelegten Differentialgleichung kann als bewiesen betrachtet werden, wenn die zweite Alternative ausgeschlossen wird. —

Um dies zu erreichen betrachte ich die Funktion:

$$U(x,y) = \int_{(C)} r^2(x,y;a(t),b(t))\, lr\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} r^2(x,y;a(t),b(t))\, \psi(t)\, dt,$$

wo $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ Lösungen der homogenen Gleichungen (2a) und (3a) sind. Dann drücken diese Gleichungen aus, daß eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion $u(x,y)$ existiert, die in ihren Randwerten und in den Werten der normalen Ableitung mit $U(x,y)$ übereinstimmt. Da aber $U(x,y)$ und $u(x,y)$ innerhalb (C) reguläre Lösungen der Differentialgleichung:

$$\text{1)} \qquad \varDelta\varDelta U = 0$$

1) D. Hilbert. Diese Nachrichten 1906, S. 219.

sind, so folgt — nach einem bekannten Satze [1]) — daß diese Funktionen identisch sind, und daher ist die Funktion $U(x,y)$ eine Potentialfunktion. Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\Delta(r^2(x,y;\xi,\eta)\, lr(x.y;\xi,\eta)) = 4\, lr(x,\eta;\xi,\eta) + 4,$$
$$\Delta(r^2(x,y;\xi,\eta)) = 4,$$

erhält man daraus die Gleichung:

$$\int\limits_{(C)} lr(x,y;a(t),b(t))\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

woraus man schließt, daß $\varphi(t)$ identisch verschwinden muß, und man zeigt dann leicht, daß auch $y_0 = 0$ und $y_1 = 0$ ist, d. h. $\psi(t)$ gleich Null ist. Damit ist aber die zweite Alternative ausgeschlossen und der Beweis des Satzes erbracht, daß die vorgelegte Differentialgleichung (1) stets eine Lösung besitzt, deren Randwerte auf der Kurve C und deren Ableitung nach der inneren Normale gegebene dreimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

Um nun die Randwertaufgabe für beliebige stetige Randbedingungen zu lösen, konstruieren wir eine Lösung $H(x,y;\xi,\eta)$, die im Bezuge auf x, y die Differentialgleichung (1) befriedigt, und deren Randwerte auf C, nebst ihrer normalen Ableitung mit den entsprechenden Werten von $r^2(x,y;\xi,\eta)\, lr(x,y;\xi,\eta)$ übereinstimmt. Die Existenz dieser Funktion ist durch das vorhergehende Resultat sichergestellt, wenn die Randkurve dreimal stetig differenzierbar ist; an dieser Bedingung halten wir fest.

Der Funktion:

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = H(x,y;\xi,\eta) - r^2(x,y;\xi,\eta)\, lr(x,y;\xi,\eta),$$

die auf C samt ihrer normalen Ableitung verschwindet, kommen alle wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion der Potentialgleichung zu; insbesondere ist sie symmetrisch in den Variablenpaare x, y und ξ, η, und abgeschlossen.

Man kann dann — indem man eine der Greenschen Formel analoge Formel für die Gleichung (1) benutzt [2]) — durch diese Funktion $\Gamma(x,y;\xi,\eta)$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung darstellen, deren Randwerte und Werte der Ableitung nach der inneren Normale auf C gegebene stetige Funktionen sind, womit die behandelte Randwertaufgabe für

1) Vgl. etwa Voigt: Theoretische Physik. Band I, S. 203.

2) Vgl. etwa Voigt: Theoretische Physik. Band I, S. 204.

dreimal stetig differenzierbare Randkurven vollständig erledigt ist.

Die nun definierte Funktion $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ gestattet auch die Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichungen:

$$\Delta\Delta U = f(x, y)$$
$$\Delta\Delta U = \lambda U.$$

Man zeigt auf eine Weise, die sehr ähnlich dem Beweise ist, den Herr Hilbert bei den entsprechenden Sätzen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwendet, daß die erste Gleichung stets eine Lösung besitzt, die auf der Randkurve C samt ihrer normalen Ableitung verschwindet. Die zweite Gleichung hat nur bei abzählbar vielen λ-Werten eine solche Lösung; diese Werte von λ, die sich im Endlichen nirgends häufen, kann man die Eigenwerte dieser Differentialgleichung nennen, die zugehörigen, die Randbedingungen erfüllende Funktionen die Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung. Man kann dann leicht zeigen, daß diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, und daß sich jede viermal stetig differenzierbare Funktion, die jene Randbedingung erfüllt, in eine geichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist, die nach den Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung fortschreitet.

Die Klassenanzahl der Körper der complexen Multiplikation.

Von

Rudolf Fueter in Marburg.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 6. Juli 1907.

Einleitung. „Gelingt es, denselben Grenzwert (d. i. $\lim_{s=1} (s-1)\zeta(s)$) noch auf eine andere Weise, nämlich unmittelbar aus der Beschaffenheit der im Körper Ω auftretenden Ideale $\mathfrak{a}$ zu bestimmen, so ist damit auch die Klassenanzahl h gefunden; dies ist aber bis jetzt nur in sehr wenigen Fällen geglückt, von denen wir einige in den folgenden Paragraphen betrachten wollen, und vermutlich befinden wir uns noch sehr weit von einer allgemeinen Lösung dieses Problemes“ schreibt Dedekind[1]). Diese Arbeit löst das Problem für eine neue Folge von Körpern. War bisher nur die Klassenanzahl der Körper der Einheitswurzeln durch einen endlichen Ausdruck bestimmt, so geben die folgenden Zeilen eben einen solchen für alle Körper der complexen Multiplikation. Damit ist z. B. für Oberkörper aller cubischen Körper mit negativer Discriminante die Klassenanzahl bestimmt. Die erhaltenen Ausdrücke, die ganz analog denjenigen der Klassenanzahl der Einheitswurzeln sind, enthalten an Stelle der Exponentialfunktion $e^{2\pi i s}$ die Modulfunktion $\eta(\omega)$.

Es sei z. B. die Klassenanzahl des quadratisch imaginären Körpers $k(\sqrt{m})$ gleich einer ungeraden Primzahl p. Dann ist die Klassenanzahl H des Klassenkörpers von $k(\sqrt{m})$, d. h. des Körpers

1) Dirichlet-Dedekind. Vorles. über Zahlentheorie 1894, pg. 610.

$K(j(\sqrt{m}), \sqrt{m})$[1]:

$$H = \frac{w_K}{w_k} \cdot \frac{p|\sqrt{d^{p-1}}|}{|\sqrt{m^{p-1}}|} \frac{1}{R} \left[\prod_1^{p-1} \nu \sum_1^p \mu \left\{ e^{\frac{2\pi i \mu \nu}{p}} \lg \frac{|\sqrt{a}|^\mu}{\eta\left(\frac{b+\sqrt{m}}{a^\mu}\right) \eta\left(\frac{b-\sqrt{m}}{a^\mu}\right)} \right\} \right]$$

(a)

$$= \frac{w_K}{w_k} \cdot \frac{p|\sqrt{d^{p-1}}|}{|\sqrt{m^{p-1}}|} \frac{\Delta}{R}$$

wo:

$$\Delta = (-1)^{\frac{(p-1)}{2}} \begin{vmatrix} \lg \varepsilon_1 & \lg \varepsilon_2 \dots \lg \varepsilon_{p-1} \\ \lg \varepsilon_2 & \lg \varepsilon_3 \dots \lg \varepsilon_1 \\ \dots & \dots \\ \lg \varepsilon_{p-1} & \lg \varepsilon_1 \dots \lg \varepsilon_{p-2} \end{vmatrix} ; \quad \varepsilon = \sqrt{a} \cdot \frac{\eta\left(\frac{b+\sqrt{m}}{a^\mu}\right) \eta\left(\frac{b-\sqrt{m}}{a^\mu}\right)}{\eta\left(\frac{b+\sqrt{m}}{a^{\mu+1}}\right) \eta\left(\frac{b-\sqrt{m}}{a^{\mu+1}}\right)}$$

b genügt der Congruenz:

$$b^2 \equiv m(a^p)$$

und $a = n(\mathfrak{a})$ enthält das Ideal $\mathfrak{a}$ von $k(\sqrt{m})$, dessen Potenzen alle Klassen des Körpers ergeben. w_k und w_K sind die Anzahlen der Einheitswurzeln in k resp. K, d die Discriminante von $k(\sqrt{m})$, R der Regulator von K.

Vergleicht man dieses Resultat mit der Formel der Klassenanzahl der l^{ten} Einheitswurzel[2]:

$$H = \frac{\prod_u \sum_{(n)} n e^{\frac{2 i\pi n' u}{l-1}}}{2 l^{\frac{l-3}{2}}} \cdot \frac{\Delta}{R}$$

so springt die Analogie deutlich hervor.

---

1) In meiner Abhandlung[3]) habe ich die Sätze bewiesen:

I. Die Discriminante der Körper der complexen Multiplication enthält nur die Primzahlen, die in

---

1) $j(\omega)$ die vollständige invariante Modulfunktion.

2) D. Hilbert: Die Theorie der algebr. Zahlkörper. Bericht der D. Math. Vereinig. Bd. IV. 1897. p. 377. Dieses fundamentale Werk, dem ich mich in der Bezeichnung vollständig anschließe, wird in der Folge als „Zahlbericht" citiert.

3) Crelle, Journal für Mathematik Bd. 132. pg. 255.

dem Führer des zugehörigen Ringes[1]) eines quadratisch imaginären Köpers $k(\sqrt{m})$ aufgehen.

II. Jede zu einem quadratisch imaginären Körper relativ-Abelsche Gleichung wird durch Adjunktion der Funktionswerte

$$e^{2\pi i z}, \; j(\omega)$$

gelöst, wo z eine rationale Zahl, ω eine Zahl des quadratisch imaginären Körpers ist. Dabei ist $e^{2\pi i z}$ die Exponentialfunktion, $j(\omega)$ die vollständige Invariante der Modulfunktionen[2]).

Ist nämlich

$$f(x) = 0$$

die gegebene Gleichung, von der man weiß, daß sie in $k(\sqrt{m})$ (m ohne quadratischen Faktor) abelsch wird, so nehme man alle Primzahlen der Relativdiscriminante von $K(x)$ in Bezug auf $(\sqrt{m})$: $l_1, l_2, l_3, \ldots$ und setze:

$$f = l_1^{r_1} \, l_2^{r_2} \, l_3^{r_3} \ldots .$$

$r_1, r_2, \ldots$ sind nach den Festsetzungen Crelle, Bd. 130 pg. 228 u. ff. zu bestimmen. Dabei ist r_i höchstens dann > 1, wenn l_i im Grade der Gleichung $f(x) = 0$ aufgeht.

x ist dann eine rationale Funktion mit in $(\sqrt{m})$ rationalen Coefficienten der algebraischen Zahlen:

$$e^{\frac{2\pi i}{f}}, \; j(f\sqrt{m}).$$

2. Es sei h die Klassenanzahl des Körpers $(\sqrt{m})$, h_f diejenige des Ringes mit dem Führer f. Unter d werde die Discriminante von $(\sqrt{m})$, unter $\left(\frac{d}{p}\right)$ das Legendresche Restsymbol ververstanden, wo

$$\left(\frac{d}{p}\right) = +1, \; -1, \; 0,$$

jenachdem d quadratischer Rest, Nichtrest, oder durch p teilbar ist[3]). Dann besteht die Relation:

1) Der Strahl tritt an Stelle des Ringes, sobald man zu den singulären Moduln noch Kreiseinheiten adjungiert.

2) Siehe Weber, Ellipt. Funktionen und algebr. Zahlen 1891, pg. 124.

3) Zahlbericht pg. 284.

$$h_f = \prod \left\{ l_i^{r_i} \left(1 - \left(\frac{d}{l_i}\right) \frac{1}{l_i}\right) \right\} h \qquad i = 1, 2, \ldots$$

wo das Produkt über alle Primzahlpotenzen $l_i^{r_i}$ von

$$f = l_1^{r_1}\, l_2^{r_2} \ldots$$

zu erstrecken ist.

3. Die Klassenanzahl der Kreiskörper $e^{\frac{2\pi i}{f}}$ ist bekannt[1]). Dagegen besteht das Problem, die Klassenanzahl von $K(j(f\sqrt{m}))$ zu bestimmen. Dazu muß man die Zerlegungsgesetze der Primideale von $k(\sqrt{(m)})$ in $K(j(f\sqrt{m}))$ kennen. Dieselben lauten:

I. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $k(\sqrt{m})$, prim zu f. Es sei n die kleinste Zahl, so daß $\mathfrak{p}^n$ im Ring f von $k(\sqrt{m})$ Hauptideal wird. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in $K(j(f\sqrt{m})$ in $\frac{h_f}{n}$ von einander verschiedene Primideale.

Die Aequivalenz im Ring (f) soll im folgenden durch das Symbol $\cong (f)$ bezeichnet werden. Wenn also $\mathfrak{a}$ in die Hauptringklasse fällt, so ist:

$$\mathfrak{a} \cong 1\,(f).$$

Ferner sei $\mathfrak{p}$ stets ein in p enthaltenes Primideal von $k(\sqrt{m})$. Dann ist also n die kleinste Zahl, so daß

$$\mathfrak{p}^n \cong 1\,(f)$$

II. für ein Primideal $\mathfrak{l}$, welches in einer Primzahl l von f enthalten ist.

Es sei l zur r^{ten} Potenz in f enthalten, und man setze:

$$f = l^r . f_1.$$

Dann ist der Körper $K(j(f_1\sqrt{m}))$

a) Unterkörper von $K(j(f\sqrt{m}))$

b) Seine Relativdiscriminante ist prim zu l.

c) Sein Relativgrad in Bezug auf $K(j(f\sqrt{m}))$ ist gleich

$$l^r\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)\frac{1}{l}\right).$$

1) Zahlbericht pg. 375 u. ff.

$K(j(f_1\sqrt{m}))$ ist demnach der Trägheitskörper von $\mathfrak{l}$. In demselben folgt dasselbe dem Gesetze I., da $\mathfrak{l}$ zu dessen Relativdiscriminante, d. h. zu f, prim ist. Wir können diese Resultate so zusammenfassen: Das Primideal $\mathfrak{l}$ zerfällt in n_1 von einander verschiedene Primideale, jedes derselben in der $l^r\left(1-\left(\frac{d}{l}\right)\frac{1}{l}\right)^{\text{ten}}$ Potenz genommen, falls n_1 die kleinste Zahl ist, so daß

$$\mathfrak{l}^{n_1} \cong 1\,(f_1).$$

4. Die Ringklassen des Führers f in $k(\sqrt{m})$ seien uns durch das ein für allemal festgewählte Basensystem gegeben:

$$k_1^{x_1}\,k_2^{x_2}\ldots k_u^{x_u}\;\{\;0 \leqq x_i < h_i$$

wo $h_1 . h_2 . h_3 \ldots h_u = h_f$. Ferner seien

$$\zeta_1 = e^{\frac{2\pi i n_1}{h_1}}$$

$$\zeta_2 = e^{\frac{2\pi i n_2}{h_2}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\zeta_u = e^{\frac{2\pi i n_u}{h_u}}$$

Einheitswurzeln, wo n_i irgend eine der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, h_i^1 - 1$$

bedeutet. Je nach der Wahl der n_i wird man also ein verschiedenes System von Einheitswurzeln erhalten, und es gibt im ganzen $h_1, h_2 \ldots h_u = h_f$ solche Systeme.

Dann ordnen wir der Klasse k:

$$k = k_1^{x_1}\,k_2^{x_2}\ldots . k_u^{x_u}$$

resp. jedem ihrer Ideale $\mathfrak{a}$ den Klassencharakter

$$[k] = [\mathfrak{a}] = \zeta_1^{x_1}\,\zeta_2^{x_2}\ldots\zeta_u^{x_u}$$

zu. Je nach der Wahl des Einheitensystems wird man einen verschiedenen Charakter erhalten. Jeder Klasse k sind im ganzen h_f Symbole $[k]$ zugeordnet. Für diese Symbole gelten die Sätze:

a) $[k_{i_1}][k_{i_2}] = [k_{i_1}\,k_{i_2}]$

b) Alle Ideale $\mathfrak{a}$ einer Klasse k haben dasselbe Symbol $[\mathfrak{a}] = [k]$.

c) $\sum [\mathfrak{a}] = 0$

wo die Summe über alle verschiedenen Werte einer nicht zur 0ten Potenz in $[\mathfrak{a}]$ enthaltenen Einheitswurzel zu nehmen ist.

d) Wenn $\mathfrak{a}^n \cong 1(f)$, so ist

$$[\mathfrak{a}]^n = 1.$$

5) Durch 4) sind jedem zu f primen Primideal $\mathfrak{p}$ von $k(\sqrt{m})$ h_f Symbole $[\mathfrak{p}]$ zugeordnet. Wir wollen jetzt auch noch den in f enthaltenen Primidealen $\mathfrak{l}$ Symbole zuordnen. Dazu setzen wir wieder

$$f = l^r \cdot f_1,$$

wo f_1 zu l prim ist.

Die Klassen des Ringes (f_1) können dann ebenfalls dargestellt werden durch

$$k' = k_1^{x_1} k_2^{x_2} \dots k_u^{x_u}$$

aber die $x_1 x_2 \dots x_u$ bewegen sich jetzt in engeren Grenzen:

$$0 \leqq x_i < h_i'.$$

Nach 2) ist

$$h_f = h_1 h_2 \dots h_u = l^r\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)\frac{1}{l}\right) h_1' h_2' \dots h_u' = l^r\left(1 - \left(\frac{d}{l}\right)\frac{1}{l}\right) h_{f_1}.$$

Ferner ist h_i' stets ein Teiler von h_i.

Im Ring (f_1) ist auch $\mathfrak{l}$ in einer Klasse:

$$k_1^{y_1} k_2^{y_2} \dots k_u^{y_u},$$

und wir ordnen dem Primideal $\mathfrak{l}$ deshalb die h_f Symbole zu:

$$[\mathfrak{l}] = \zeta_1^{y_1} \zeta_2^{y_2} \dots \zeta_u^{y_u}, \text{ falls } \zeta_i^{h_i'} = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots u)$$

$$[\mathfrak{l}] = 0, \text{ falls } \zeta_i^{h_i'} \neq 1 \text{ für irgend ein } i.$$

$[\mathfrak{l}]$ stellt also h_{f_1} mal eine Einheitswurzel dar, $h_f - h_{f_1}$ mal die Null.

Wir können das Symbol $[\mathfrak{a}]$ eines Ringideals $\mathfrak{a}$ auf den Fall eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ von $k(\sqrt{m})$ verallgemeinern. Ist nämlich

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{l}_1^{a_1} \mathfrak{l}_2^{a_2} \dots \mathfrak{a}_1,$$

wo $\mathfrak{a}_1$ zu f prim ist, so entspricht $\mathfrak{a}_1$ ein Ringideal von (f). Wir setzen dann:

$$[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{l}_1]^{a_1} [\mathfrak{l}_2]^{a_2} \ldots [\mathfrak{a}_1].$$

Ueber $[\mathfrak{a}]$ gelten die Sätze a) c) von Abschnitt 4).

6) Gemäß unserm Zerlegungssatze der Primideale ist die ζ-Funktion von $K(j(f\sqrt{m}))$ gegeben durch:

$$\zeta(s) = \prod \left\{ \frac{1}{(1-p^{-ns})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-ns}\right)} \right\}^{\frac{h_f}{n}} \cdot \prod \left\{ \frac{1}{(1-l^{-n_1 s})\left(1-\left(\frac{d}{l}\right)l^{-n_1 s}\right)} \right\}^{\frac{h_{f_1}}{n_1}}$$

wo das erste Produkt über alle zu f primen Primzahlen p, das zweite über die in f enthaltenen Primzahlen l zu erstrecken ist ($f = l^r . f_1$). Ferner ist n, resp. n_1 die kleinste Zahl, so daß

$$\mathfrak{p}^n \cong 1\,(f), \quad \mathfrak{l}^{n_1} \cong 1\,(f_1)$$

ist.

Mit Hilfe unserer Symbole können wir die ζ-Funktion in folgender Weise einheitlich darstellen:

$$\zeta(s) = \prod \zeta \left\{ \prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]p^{-s}\right)} \right\} \right\}$$

Das innere Produkt ist über sämtliche Primzahlen p zu erstrecken ($\mathfrak{p}$ irgend eines der in p enthaltenen Primideale von $k(\sqrt{m})$). Das äußere Produkt ist über die h_f verschiedenen Kombinationen von Einheitswurzeln

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \zeta_n$$

zu nehmen. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den Zerlegungssätzen und der Definition der Symbole $[\mathfrak{a}]$.

Es sei H die Klassenanzahl des Körpers K $(j(f\sqrt{m}))$ und K deren charakteristische Größe [1]):

$$K = \frac{2^{h_f} . \pi^{h_f} . R}{w_K \sqrt{D}}.$$

Dann ist

$$K . H = \lim_{s=1} (s-1)\,\zeta(s) = \lim_{s=1} (s-1) \prod \zeta \left\{ \prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]p^{-s}\right)} \right\} \right\}$$

$$= \lim_{s=1} (s-1) \prod p \frac{1}{(1-p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}\right)} \cdot \prod \zeta \left\{ \prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]p^{-s}\right)} \right\} \right\}$$

1) Siehe Zahlbericht p. 229. h_f ist der Relativgrad von K in Bezug auf k.

wo das 2te Produkt nur noch über die Symbole $[\mathfrak{p}]$ zu erstrecken ist, für die nicht:

$$\zeta_1 = 1,\ \zeta_2 = 1, \ldots \zeta_n = 1.$$

Nun ist aber

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod p \frac{1}{(1-p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}\right)} = h \,.\, \varkappa$$

wo h die Klassenzahl und $\varkappa$ die charakteristische Größe des Körpers $k(\sqrt{m})$. Somit wird

$$\text{(I)} \qquad K \,.\, H = \varkappa \,.\, h \lim_{s=1} \prod \zeta \left\{ \prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]\,p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]\,p^{-s}\right)} \right\} \right\}.$$

Diese Formel entspricht genau dem ersten Ausdruck der Klassenanzahl der Einheitswurzeln [1]).

7) Den noch übrigbleibenden Limes kann man mittels der Kroneckerschen Grenzformel [2]) sehr einfach berechnen. Wir sondern zunächst die im Führer f enthaltenen Primzahlen ab, indem wir setzen:

$$F_s = \prod \zeta \left\{ \prod l \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{l}]\,l^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{l}\right)[\mathfrak{l}]\,l^{-s}\right)} \right\} \right\}$$

$$F = \lim_{s=1} F_s = \prod \zeta \left\{ \prod l \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{l}]\,l^{-1})\left(1-\left(\frac{d}{l}\right)[\mathfrak{l}]\,l^{-1}\right)} \right\} \right\}$$

wo das innere Produkt nur über die in f enthaltenen Primzahlen l zu erstrecken ist. Dann ist

$$\text{(1)} \qquad K \,.\, H = \varkappa \,.\, h \,.\, F \lim_{s=1} \prod \zeta \left\{ \prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]\,p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]\,p^{-s}\right)} \right\} \right\}$$

und hier haben wir dann das innere Produkt nur noch über alle zu f primen Primzahlen zu nehmen. Rechnen wir dasselbe aus, so wird

$$\prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]\,p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]\,p^{-s}\right)} \right\} = \sum_{(\mathfrak{a})} \frac{[\mathfrak{a}]}{n\,(\mathfrak{a})^s}$$

1) Zahlbericht, pag. 375.

2) Weber a. a. O., pag. 456 u. ff.

wo die Summe über alle (zu f primen) Ideale des Ringes f in $k(\sqrt{m})$ zu erstrecken ist.

Bezeichnet $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots h_f)$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Klassen in f, und durchläuft $\mathfrak{b}_i$ alle Ideale der Klasse von $\mathfrak{a}_i$, so kann man, da alle Ideale derselben Klasse dasselbe Symbol haben, schreiben:

$$(2) \qquad \prod p \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]p^{-s}\right)} = \sum_1^{h_f} i\,[\mathfrak{a}_i] \sum_{(\mathfrak{b}_i)} \frac{1}{n(\mathfrak{b}_i)^s}.$$

8) Nach Kronecker[1]) ist:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x, y \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} = \frac{\pi}{(s-1)f|\sqrt{m}|} - \frac{2\pi\Gamma(1)'}{f|\sqrt{m}|} + \frac{\pi}{f|\sqrt{m}|} \lg \frac{a}{4f^2|m|}$$
$$- \frac{2\pi}{f|\sqrt{m}|} \lg \eta(\omega)\,\eta(\omega') + f(s)$$

wo

$$\lim_{s=1} f(s) = 0,$$

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ $(a > 0)$ eine primitive quadratische Form der Determinante

$$b^2 - 4ac = f^2 m$$

und

$$\omega = \frac{b+f.\sqrt{-1}\,.\,|\sqrt{m}|}{a}, \quad \omega' = \frac{b-f.\sqrt{-1}\,.\,|\sqrt{m}|}{a}$$

ist. $\eta(\omega)$ ist die in der Theorie der Modulfunktionen auftretende Funktion[2]):

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_1^{\infty} \nu\, (1 - e^{2\pi i \nu \omega}).$$

Wir setzen nun

$$a_i = n(\mathfrak{a}_i)$$

dann werde uns durch

$$a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2 \qquad (b_i^2 - 4a_i c_i = f^2 m)$$

ein Repräsentantensystem von h_f quadratischen Formen gegeben. Durch eine derselben werden die Normen aller Ideale $\mathfrak{b}_i$ der betreffenden Klasse von $\mathfrak{a}_i$ dargestellt. Allein außerdem werden noch die Normen von Idealen dargestellt, die nicht prim zu f sind.

1) Weber a. a. O. pag. 462.

2) Weber a. a. O. pag. 63.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß wir für die zu f primen Ideale der Klasse von a_i erhalten:

$$(3)\quad \sum_{\mathfrak{b}_i} \frac{1}{n(\mathfrak{b}_i)^s} = \frac{\pi \varphi_s(f)}{(s-1) f^s |\sqrt{m}|} - \frac{2\pi \Gamma(1)' \cdot \varphi_s(f)}{f^s |\sqrt{m}|} - \frac{2\pi}{f |\sqrt{m}|} \lg (l^{q_1} l^{q_2} \ldots$$
$$+ \frac{\pi \varphi_s(f)}{f^s |\sqrt{m}|} \lg a_i - \frac{2\pi}{f |\sqrt{m}|} \lg H(\omega_i) H(\omega_i') + f_i^*(s)$$

wo $\lim\limits_{s=1} f_i^*(s) = 0$. Dabei ist:

$$\varphi_s(f) = f\left(1 - \frac{1}{l_1^{2s-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{l_2^{2s-1}}\right)\cdots,$$

so daß: $\lim\limits_{s=1} \varphi_s(f) = \varphi(f) =$ Anzahl der zu f primen inkongruenten rationalen Zahlen. $q_1, q_2 \ldots$ sind gewisse, leicht zu bestimmende, nur von s und $l_1, l_2, \ldots$ abhängige Zahlen. Die Funktion $H(\omega_i)$ setzt sich aus $\eta(\omega_i)$ folgendermaßen zusammen:

Wir wollen als Repräsentantensystem der quadratischen Formen ein solches wählen, für das

$$a_i \text{ zu } f \text{ prim}, \quad b_i \equiv 0(f), \quad c_i \equiv 0(f^2).$$

Da $b_i^2 - a_i c_i \equiv 0(f^2)$, ist jede Form, für die a_i zu f prim ist, einer solchen äquivalent. Wir schreiben dieses spezielle System wieder:

$$a_i x^2 + 2 b_i f \cdot xy + c_i f^2 y^2.$$

Dann ist

$$\omega_i = f \frac{b_i + \sqrt{-1}\,|\sqrt{m}|}{a_i}, \quad \omega_i' = f \frac{b_i - \sqrt{-1}\,|\sqrt{m}|}{a_i}$$

und $H(\omega_i)$ setzt sich zusammen wie folgt

$$H(\omega_i) = \frac{\eta(\omega_i)\, \eta\left(\frac{\omega_i}{l_1 l_2}\right)^{\frac{1}{l_1 l_2}} \eta\left(\frac{\omega_i}{l_1 l_3}\right)^{\frac{1}{l_1 l_3}} \cdots \eta\left(\frac{\omega_i}{l_1 l_2 l_3 l_4}\right)^{\frac{1}{l_1 l_2 l_3 l_4}} \cdots}{\eta\left(\frac{\omega_i}{l_1}\right)^{\frac{1}{l_1}} \eta\left(\frac{\omega_i}{l_2}\right)^{\frac{1}{l_2}} \eta\left(\frac{\omega_i}{l_3}\right)^{\frac{1}{l_3}} \cdots \eta\left(\frac{\omega_i}{l_1 l_2 l_3}\right)^{\frac{1}{l_1 l_2 l_3}} \cdots}$$

$$= \frac{\prod \eta\left(\frac{\omega_i}{l_{n_1} l_{n_2} \ldots l_{n_{2\nu}}}\right)^{\frac{1}{l_{n_1} l_{n_2} \ldots l_{n_{2\nu}}}}}{\prod \eta\left(\frac{\omega_i}{l_{n_1} l_{n_2} \ldots l_{n_{2\nu+1}}}\right)^{\frac{1}{l_{n_1} l_{n_2} \ldots l_{n_{2\nu+1}}}}}$$

wo das Produkt des Zählers über alle Produkte von Primzahlen l mit **gerader** Faktorenzahl, dasjenige des Nenners über alle Produkte von Primzahlen l mit ungerader Faktorenzahl zu erstrecken ist.

9) Setzen wir (3) in (2) ein, so erhalten wir:

$$\prod p \left\{ \frac{1}{(1-[\mathfrak{p}]p^{-s})\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)[\mathfrak{p}]p^{-s}\right)} \right\}$$

$$= \left[\frac{\varkappa \varphi_s(f)}{(s-1)f^s|\sqrt{m}|} - \frac{2\varkappa \Gamma(1)' \varphi_s(f)}{f^s|\sqrt{m}|} - \frac{2\varkappa}{f|\sqrt{m}|} \lg(l_1^{q_1} l_2^{q_2} \ldots)\right] \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}_i]$$

$$+ \sum_1^{h_f} i \frac{\varkappa[\mathfrak{a}_i]}{f|\sqrt{m}|} \left[\frac{\varphi_s(f)}{f} \lg n(\mathfrak{a}_i) - 2\lg H(\omega_i) H(\omega_i')\right] + \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}] f_i^*(s)$$

oder wegen 4) c:

$$= \frac{\varkappa}{f|\sqrt{m}|} \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}_i] \left(\frac{\varphi_s(f)}{f} \lg n(\mathfrak{a}_i) - 2\lg H(\omega_i) H(\omega_i')\right) + \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}_i] f_i^*(s).$$

Hier dürfen wir den Limes $s = 1$ ausführen. Das 2te Glied fällt weg. Setzen wir das Resultat in (1) ein, so finden wir schließlich den 2ten **Ausdruck für die Klassenanzahl:**

$$\text{(II)} \quad K.H = h.\varkappa.F. \frac{\pi^{h_f-1}.2^{h_f-1}}{f^{h_f-1}|\sqrt{m}|^{h_f-1}} \prod \zeta \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}_i] \left(\frac{\varphi(f)}{2f} \lg n(\mathfrak{a}_i) - \lg H(\omega_i) H(\omega_i')\right).$$

Hier ist die Summe über ein vollständiges Repräsentantensystem von Klassen $\mathfrak{a}_i$ des Ringes f zu nehmen, das Produkt über die sämtlichen Kombinationen von Werten der Einheiten

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_u$$

mit Ausnahme der Kombination:

$$\zeta_1 = 1, \; \zeta_2 = 1, \; \zeta_3 = 1, \ldots \zeta_u = 1.$$

Die Formel (a) der Einleitung ergiebt sich daraus leicht. Die Klassenzahl der Körper der komplexen Multiplikation ist daher als endlicher Ausdruck durch (II) gegeben. Setzt man für K und $\varkappa$ die Werte ein, so kann man denselben noch etwas vereinfachen:

$$H = h \cdot F \cdot \frac{w_K . |\sqrt{D}|}{|\sqrt{d}| f^{h_f-1} |\sqrt{m}|^{h_f-1} w_k R} \prod \zeta \sum_1^{h_f} i[\mathfrak{a}_i] \left(\frac{\varphi(f)}{2f} \lg(n(\mathfrak{a}_i)) - \lg H(\omega_i) H(\omega_i')\right)$$

R = Regulator, D = Diskriminante von K, w_K = Anzahl der Einheitswurzeln in K, w_k in k.

Über den allgemeinsten Begriff der ebenen stetigen Kurve.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Zweite Mitteilung.[1])

Mit 5 Figuren im Text.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 8. Juni 1907.

Die Frage, wann eine ebene, geschränkte[2]), perfekte und zusammenhängende Menge als eine stetige Kurve zu bezeichnen ist, habe ich in einer früheren Mitteilung für den Fall beantwortet, daß ihre Komplementärmenge aus einer endlichen Zahl von Gebieten besteht. Als notwendige und hinreichende Bedingung hatte sich die allseitige Erreichbarkeit der Punkte einer jeden Gebietsgrenze ergeben. Heute bin ich im Stande, auch den allgemeinsten Fall zu erledigen, nämlich den, daß die Komplementärmenge in unendlich viele Gebiete zerfallen kann.

Für jedes einzelne Gebiet bleibt dann zunächst die allseitige Erreichbarkeit der Punkte seiner Grenze als notwendige Bedingung bestehen. Hierzu tritt aber noch eine neue Bedingung. Gebiete, deren Breite eine beliebige Größe σ überschreitet, dürfen nämlich nur in endlicher Zahl vorhanden sein. Eine weitere Bedingung besteht jedoch nicht mehr. Gegen meine ursprüngliche Vermutung, der ich im Stuttgarter Vortrag bereits Ausdruck gegeben habe, unterliegen diejenigen Punkte, die Häufungspunkte unendlich vieler Gebiete sind, ohne aber zur Grenze eines einzelnen Gebietes zu gehören, einer Erreichbarkeitsbedingung nicht. Dies führt zu dem zunächst paradox scheinenden Resultat,

---

1) Die erste Mitteilung befindet sich S. 28 dieser Nachrichten.

2) d. h. in einem endlichen Bereich enthaltene.

daß zwar die abgeschlossene, durch $y = \sin 1/x$ $(-1 \leqq x \leqq +1)$ definierte Punktmenge keine stetige Kurve ist, daß sie aber Bestandteil einer stetigen Kurve sein kann, die keinerlei Flächenstück der Ebene enthält[1]). Die gestaltlichen Möglichkeiten, die bei ebenen stetigen Kurven auftreten können, werden dadurch noch außerordentlich vermehrt. Um ein einfacheres Beispiel zu nennen, das auch an sich interessieren dürfte, so liefert jedes geschränkte, zusammenhängende Stück der in die Modulfigur eingehenden Kreisbogen, wenn es überdies abgeschlossen angenommen wird, eine stetige Kurve.

Als allgemeinstes Resultat, zu dem ich gelangt bin, kann ich folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ebene geschränkte perfekte zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}$ als stetiges und eindeutiges Bild der Strecke darstellbar ist, besteht darin, daß jedes Gebiet ihrer Komplementärmenge eine allseitig erreichbare Grenze hat, und daß in ihr Gebiete, deren Breite eine beliebig gegebene Grösse übersteigt, nur in endlicher Zahl auftreten.[2])

§ 1. Hilfssätze und Festsetzungen.

1. Sei $\{e_\nu\}$ eine Folge positiver der Größe nach geordneter Zahlen, die gegen Null convergieren, so kann man geschränkte, von Null verschiedene positive Größen ϱ_ν bestimmen, so daß

$$\sum \varrho_\nu e_\nu = \sum \delta_\nu = D$$

convergiert und eine gegebene Größe η nicht übersteigt. Ist $\sum e_\nu$ divergent, so ist notwendig $\lim \varrho_\nu = 0$; man kann außerdem ϱ_ν mit e_ν abnehmen lassen. Ist dagegen $\sum e_\nu$ convergent, so kann man alle ϱ_ν einander gleich annehmen. Beides soll im Folgenden stets geschehen.

2. Sei eine stetige Kurve $\mathfrak{T}$ die volle Grenze eines Gebietes $\mathfrak{J}$, so wollen wir für sie stets diejenige Abbildung auf die Strecke zu Grunde legen, die in der ersten Mitteilung § 3 und 4 dargestellt

---

1) Daß sie überhaupt Bestandteil einer stetigen Kurve sein kann, folgt daraus, daß sie Bestandteil eines Quadrates ist.

2) Durch die Einführung der Komplementärmenge ist es mir gelungen, den obigen Satz formal zu vereinfachen und die Erreichbarkeitsbedingung auf diejenigen Gebiete zu beschränken, die der Komplementärmenge angehören. Dies hat den Vorteil, daß die der Menge $\mathfrak{T}$ etwa anhaftenden Peanoschen Gebiete in den Satz nicht mehr eingehen.

worden ist. Sie stützt sich auf die approximierenden Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$, auf die fortgesetzte Zerlegung des Gebietes $\mathfrak{J}$ in Teilgebiete, die durch die von einem seiner Punkte m ausgehenden Wege l bewirkt wird, und auf die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ auf den Kreis und ist folgende.

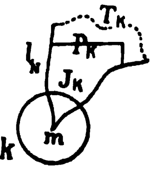


Fig. 1

Das Polygon $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ zerfällt in gewisse Streckenzüge $P_k^{(\nu)}$; ferner zerfällt das Gebiet $\mathfrak{J}$ in gewisse Teilgebiete $\mathfrak{J}_k^{(\nu)}$ die durch je zwei Wege und eine Teilmenge $T_k^{(\nu)}$ von $\mathfrak{T}$ begrenzt werden. Irgend einen dieser Wege bezeichnen wir für den Augenblick durch $l_\varkappa$; ferner sei k ein kleiner um m gelegter Kreis. Dann ist die Abbildung der Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ auf den Kreis k zunächst von der Art, daß den Schnittpunkten von $l_\varkappa$ mit allen Polygonen $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ derselbe Punkt $k_\varkappa$ des Kreises entspricht, nämlich sein Schnittpunkt mit $l_\varkappa$. Dies bewirkt, daß den Streckenzügen $P_k^{(\nu)}$ gewisse Kreisbögen $c_k^{(\nu)}$ des Kreises in der Weise entsprechen, daß sie durch fortgesetzte Teilung entstehen und mit wachsendem ν gleichmäßig gegen Null convergieren. Ist dann

$$x = f_\nu(s), \; y = \varphi_\nu(s)$$

das abbildende Funktionenpaar, so convergieren diese Funktionenpaare gleichmäßig gegen zwei Grenzfunktionen

$$x = f_\omega(s), \quad y = \varphi_\omega(s),$$

und diese bilden die Menge $\mathfrak{T}$ eindeutig und stetig auf den Kreis ab.

Jedem Punkt s des Kreises entspricht dabei ein Punkt von $\mathfrak{T}$, während einem Punkt von $\mathfrak{T}$ mehrere oder auch unendlich viele Punkte des Kreises entsprechen können. Doch läßt sich in gewisser Weise die Anordnung der Polygonpunkte auch auf die Kurve $\mathfrak{T}$ übertragen.

Dazu ordnen wir zunächst jedem Punkt t auf Grund der obigen Darstellung einen Punkt des Kreises folgendermaßen zu. Der Punkt t kann zunächst Endpunkt eines Weges $l_\varkappa$ sein; gibt es mehrere solche Wege, so wählen wir einen beliebig aus und haben damit auch einen bestimmten Punkt $s_\varkappa$ des Kreises definiert. Ist t kein Endpunkt eines Weges $l_\varkappa$, so gehört er einer Folge einander einschließender Teilgebiete

$$\{\mathfrak{J}_\nu^{(\nu)}\} = \mathfrak{J}'_k, \; \mathfrak{J}''_l, \; \ldots \; \mathfrak{J}_r^{(\nu)}, \; \ldots$$

zugleich als Grenzpunkt an; gibt es mehrere solche Folgen, so wählen wir wieder eine beliebig aus. Diese Folge $\{\mathfrak{J}_r^{(\nu)}\}$ definiert wieder gewisse Streckenzüge $\{P_r^{(\nu)}\}$ der Polygone $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}\}$ und damit

auch eine Folge gewisser Kreisbögen $\{\sigma_\nu^{(n)}\}$, die mit wachsendem ν gegen Null convergieren und einen ihnen allen gemeinsamen Punkt s bestimmen; ihn führen wir als Bildpunkt von t ein. Ihm entspricht überdies je ein Punkt $p_\nu^{(n)}$ jedes Streckenzuges $P_\nu^{(n)}$, und diese Punkte $p_\nu^{(n)}$ bestimmen wieder einen zu t führenden Weg l, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz der Polygone $\mathfrak{P}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{T}$ unmittelbar folgt.

Hat man nun auf $\mathfrak{T}$ eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten t_λ und zieht zu ihnen vom Mittelpunkt m des Kreises die über die Punkte s_λ laufenden Wege, so folgt aus unserer Abbildungsart unmittelbar, daß jedem Kreisbogen σ, der durch zwei Punkte s_λ und s_μ begrenzt wird, als Bildmenge diejenige Teilmenge T entspricht, die in die Grenze des durch die Wege l_λ und l_μ bestimmten Teilgebietes $\mathfrak{J}$ eingeht, und Grenzmenge der Streckenzüge ist, die auf den Polygonen $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch l_λ und l_μ ausgeschnitten werden.

3. Ich führe noch folgende Bezeichnungen ein. Zerfällt die Komplementärmenge $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{T}$) der Menge $\mathfrak{T}$ in unendlich viele Gebiete,[1]) so sei $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ eine unendliche Teilmenge von ihnen, und es sei m_ν ein Punkt von $\mathfrak{J}_\nu$. Die Grenzpunkte der Menge $\{m_\nu\}$ gehören dann zu $\mathfrak{T}$. Die Gesamtheit dieser Punkte wollen wir durch $\mathfrak{U} = \{u\}$ bezeichnen und Grenzmenge der Gebiete nennen; sie ist offenbar eine abgeschlossene Menge. Es sind nun noch zwei Fälle möglich. Ein Punkt u kann zugleich einer Menge $\mathfrak{T}'$ angehören, die Grenze eines Gebietes $\mathfrak{J}'$ ist, es kann aber auch das Entgegengesetzte der Fall sein. Die Punkte von $\mathfrak{U}$, die nicht der Grenze $\mathfrak{T}'$ eines Gebietes $\mathfrak{J}'$ angehören, will ich durch $\mathfrak{B}$ bezeichnen; wie man aus den Beispielen erkennt (§ 6), brauchen sie eine abgeschlossene Menge nicht zu bilden.

Über die Struktur der Menge $\mathfrak{U}$ läßt sich nur aussagen, daß sie keinen flächenhaften Bestandteil enthält. Im übrigen gelten für sie die allgemeinen Sätze, die die Zerlegung einer abgeschlossenen Menge in Einzelbestandteile betreffen.

§ 2. Nachweis der Notwendigkeit einer Bedingung.

Lehrsatz. Enthält die Komplementärmenge einer geschränkten perfekten zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ unendlich viele Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$, so kann die Menge $\mathfrak{T}$ nur dann eindeutiges und stetiges Bild

1) Zu ihnen ist stets auch das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ zu rechnen.

der Strecke sein, falls jedes einzelne Gebiet $\mathfrak{J}_\nu$ der Erreichbarkeitsbedingung genügt, und falls es nur eine endliche Zahl von Gebieten gibt, deren Breite eine beliebig gegebene Größe $\eta > o$ übertrifft.

Der erste Teil des Satzes, der die Erreichbarkeit betrifft, wird genau so bewiesen, wie in dem Fall, daß die Komplementärmenge nur aus einer endlichen Zahl von Gebieten besteht. Dies beruht darauf, daß die Erreichbarkeit für jedes einzelne Gebiet und seine Grenze besonders in Frage kommt, und unabhängig davon ist, welche Gebiete sonst noch vorhanden sind.

Den zweiten Teil des Satzes kann man folgendermaßen beweisen. Angenommen es gebe unendlich viele Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$, so daß, wenn $\mathfrak{T}_\nu$ die Grenze von $\mathfrak{J}_\nu$ ist,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{J}_\nu) = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) = e_\nu > \eta$$

ist, so seien t'_ν und t''_ν zwei Punkte von $\mathfrak{T}_\nu$, so daß

$$\varrho(t'_\nu, t''_\nu) = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu) = e_\nu$$

ist. Dann gehören diese beiden Punkte notwendig der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ an, die die äußere Grenze von $\mathfrak{J}_\nu$ bildet. Sie zerlegen diese Kurve in zwei Kurvenbögen, und auf jedem von ihnen gibt es einen Punkt, der von t'_ν und t''_ν gleichen Abstand hat. Diese Punkte seien τ'_ν und τ''_ν. Auch sie zerlegen $\mathfrak{C}_\nu$ in zwei Kurvenbögen C'_ν und C''_ν, und es ist offenbar

$$\mathfrak{B}(C'_\nu) \geq {}^1/_2\, e_\nu \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}(C''_\nu) \geq {}^1/_2\, e_\nu.$$

Daraus folgt weiter, daß wenn T'_ν irgend eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ ist, der τ'_ν und τ''_ν angehören, auch

$$\mathfrak{B}(T'_\nu) \geq {}^1/_2\, e_\nu$$

ist. Dies wird ebenso bewiesen, wie der analoge Satz in § 5 der ersten Mitteilung.

Wir zeigen nun weiter, daß man aus der Gesamtheit der so definierten Punkte τ'_ν und τ''_ν eine Folge $\{t_\nu\}$ in der Weise herausheben kann, daß wenn T_ν irgend eine Teilmenge ist, der zwei consecutive Punkte t_ν und $t_{\nu+1}$ dieser Folge angehören, bei beliebig kleinem ε die Relation

$$\mathfrak{B}(T_\nu) \geq {}^1/_2\,(\eta - \varepsilon)$$

für jedes hinreichend große ν erfüllt ist. Hierzu nehme man in dem Gebiet $\mathfrak{J}_\nu$ einen inneren Punkt m_ν beliebig an, und ziehe von einem Punkt a des äußeren Gebietes $\mathfrak{A}$ einen Streckenzug $\mathfrak{p}_\nu$ zum Punkt m_ν, so daß alle diese Streckenzüge einander nicht kreuzen [1])

1) Von der Menge $\mathfrak{T}$ wird hier ganz abgesehen.

und einen um a gelegten Kreis je einmal in einem Punkt k'_ν schneiden. Dann kann man aus den Punkten $\{k'_\nu\}$ wieder eine einfache Folge von Punkten herausheben, die von derselben Seite gegen einen Grenzpunkt k_ω convergieren[1]), und deren Indizes wachsen. Aus dieser Folge $\{k''_\nu\}$ wähle man nun wieder eine Teilfolge $\{k_\nu\}$ aus, die keine zwei consecutiven Punkt der Folge $\{k''_\nu\}$ enthält. Diese Folge $\{k_\nu\}$ bestimmt eindeutig eine Teilmenge der Menge $\{m_\nu\}$, also auch von $\{\mathfrak{J}_\nu\}$ resp. von $\{\mathfrak{T}_\nu\}$. In jeder Menge $\mathfrak{T}_\nu$, die dieser Teilmenge angehört, wähle man nun einen der beiden Punkte τ'_ν und τ''_ν beliebig als Punkt t_ν aus, so wird, wie man leicht beweist, die so definierte Folge $\{t_\nu\}$ die verlangte Eigenschaft besitzen. Das gleiche gilt daher auch von jeder Teilmenge dieser Folge, deren Indizes wachsen.

Damit haben wir für die so definierte Folge $\{t_\nu\}$ diejenige Eigenschaft abgeleitet, die im § 3 beim Beweis eines analogen Satzes die Grundlage bildete. Wird nämlich nun auf der Einheitsstrecke irgend ein Punkt s_ν angenommen, der Bildpunkt von t_ν ist, und aus diesen Punkten wieder eine einfache Folge $\{s'_\nu\}$ ausgewählt, die gegen einen Grenzpunkt s_ω convergiert, und ist nun wieder t'_ν der Bildpunkt von s'_ν, so entspricht jedem Intervall $s'_\nu s'_{\nu+1}$ eine zusammenhängende Teilmenge T'_ν von $\mathfrak{T}$, der die Punkte t'_ν und $t'_{\nu+1}$ angehören, und es ist bei hinreichend großem ν

$$\mathfrak{B}(T'_\nu) \geq \tfrac{1}{2}(\eta - \varepsilon).$$

Dies steht aber, da die Intervalle $s'_\nu s'_{\nu+1}$ mit wachsendem ν unter jede Grenze sinken, mit der Stetigkeit der Abbildung im Widerspruch.

Die somit als notwendig erwiesene Bedingung wird sich auch als hinreichend erweisen. Der Beweis dieser Behauptung kann verschieden geführt werden. Ich werde die einzelnen Fälle gesondert behandeln und nehme als Einteilungsgrund die Structur der Mengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$. Die Menge $\mathfrak{U}$ kann punktartig oder kurvenartig sein. Die Menge $\mathfrak{B}$ kann ganz fehlen; existiert sie, so haben wir zu unterscheiden, ob sie auf kurvenhaften Bestandteilen von $\mathfrak{U}$ überall dicht liegt, oder nicht.

Ich beschränke mich zunächst auf den Fall, daß der Menge $\mathfrak{T}$ keine Peanoschen Gebiete angehören, und schicke noch einen Hilfssatz voraus.

---

1) vgl. die erste Mitteilung, S 37.

§ 3. Ein Satz über die Anordnung der unendlich vielen Gebiete der Komplementärmenge.

Die unendlich vielen Gebiete der Komplementärmenge $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{T}$) denken wir uns zunächst nach dem Werte ihrer Breite geordnet; für Gebiete gleicher Breite werde die Anordnung willkürlich festgesetzt. Dies soll auch im Folgenden stets geschehen. Zu den Gebieten von $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{T}$) gehört auch das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$; es nimmt in der Anordnung stets die erste Stelle ein.

Wir erhalten so eine Gebietsfolge $\{\mathfrak{J}'_\nu\}$ und eine Folge von Gebietsgrenzen $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$. Wir heben nun diejenigen Gebiete heraus, für die bei beliebig gegebenem $\delta > 0$

$$\mathfrak{B}'_\nu = \mathfrak{B}(\mathfrak{T}'_\nu) \geq \delta$$

ist. Ihre Zahl sei N, und ihre Grenzmengen seien

1) $$\mathfrak{T}'_1,\ \mathfrak{T}'_2, \ldots .\ \mathfrak{T}'_N.$$

Den noch verbleibenden Rest von $\{\mathfrak{T}'_\nu\}$ bezeichnen wir durch

2) $$\{T_\lambda\} = T_1,\ T_2, \ldots\ T_\lambda, \ldots .$$

Mit den Gebietsgrenzen T_λ bilden wir nun zusammenhängende Bestandteile, die wir mit den N Mengen $\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2 \ldots \mathfrak{T}'_N$ vereinigen. Daß dies möglich sein muß, liegt auf der Hand; es handelt sich nur darum ein Ausführungsverfahren in präciser Form anzugeben. Es ist das folgende.

Hängt die erste Menge T_1 mit keiner der Mengen T_λ zusammen, so hängt sie notwendig mit einer Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ zusammen. Solcher kann es mehrere geben. Es kann insbesondere die ganze Menge T_1 Teil einer der Mengen 1) sein; in diesem Fall wählen wir sie als Menge $\mathfrak{T}'_\nu$; im andern Fall wählen wir $\mathfrak{T}'_\nu$ beliebig, doch so, daß $\mathfrak{T}'_\nu$ und T_1 nicht etwa nur einen einzigen Punkt gemein haben.[1]) Wir bilden dann die Menge[2])

3) $$\mathfrak{T}''_\nu = \mathfrak{M}\{\mathfrak{T}'_\nu,\ T_1\},$$

tilgen sofort T_1 in der Reihe 2) und ersetzen in der Reihe 1) die Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ durch $\mathfrak{T}''_\nu$. Hängt dagegen T_1 mit einer der Mengen T zusammen, so sei T_i die erste; wir bilden dann

4) $$T'_1 = \mathfrak{M}\{T_1,\ T_i\},$$

tilgen sofort T_i in der Reihe 2) und ersetzen T_1 durch T'_1; die Reihe 2) gehe dadurch in die Reihe 2') über. Wir operieren dann

1) Solche muß es notwendig geben da T_1 mit allen Mengen zusammenhängt, die Grenzen der zu $\mathfrak{J}_1$ benachbarten Gebiete sind.

2) Unter $\mathfrak{M}$ (P, Q, verstehe ich nach Cantor die Menge, die jedes Element enthält, das in P oder Q vorkommt.

mit T_1' wie eben mit T_1, unterscheiden also die beiden auch für T_1 unterschiedenen Möglichkeiten und haben nur den Fall weiter zu erörtern, daß T_1' mit einer der Mengen der Reihe 2') zusammenhängt. Ist T_2 die erste, so bilden wir wieder

$$T_1'' = \mathfrak{M}\{T_1', T_2\} = \mathfrak{M}\{T_1, T_1, T_2\},$$

tilgen in der Reihe 2') die Menge T_2, ersetzen T_1' durch T_1'' und erhalten so eine Menge T_1'' und eine Reihe 2''), mit denen wir wiederum in der gleichen Weise verfahren. Nach einer endlichen oder unendlichen Menge von Schritten gelangen wir so zu einer wohl definierten Menge

$$T_1^{(\alpha)} = \mathfrak{M}\{T_1, T_1, T_2, \ldots. T_\nu, \ldots.\},$$

die mit keiner Menge T_λ zusammenhängt, und daher mit einer Menge von 1) zusammenhängen muß [1]). Ist dies wieder die Menge $\mathfrak{T}_\nu'$, die genau so bestimmt wird wie oben, so bilden wir zunächst die Menge

$$\mathfrak{T}_\nu'' = \mathfrak{M}\{\mathfrak{T}_\nu', T_1^{(\alpha)}\}$$

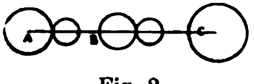


Fig. 2

und ersetzen nunmehr in der Reihe 1) die Menge $\mathfrak{T}_\nu'$ durch $\mathfrak{T}_\nu''$. Die Reihe 1) hat sich dadurch in eine Reihe 1') verwandelt, die ebenfalls N Mengen enthält.

Mit der so modificierten Reihe 1') und dem noch vorhandenen Rest von 2), falls einer existiert, verfahren wir nun in der gleichen Weise. Dies können wir eventuell unbegrenzt fortsetzen; nach den allgemeinen Sätzen der Mengenlehre müssen wir aber nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten zu Ende kommen, d. h. die Reihe 2) völlig erschöpfen. Die N Mengen, die sich dabei aus 1) ergeben, bezeichnen wir nun durch

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_\nu, \ldots \mathfrak{T}_n,$$

und setzen ferner in etwas veränderter Bezeichnung für jedes ν

$$\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{M}\{\mathfrak{T}_\nu', T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, \ldots\ldots T_\lambda^{(\nu)}, \ldots.\},$$

wo jetzt die $T_\lambda^{(\nu)}$ die Mengen $T_1^{(\alpha)}, \ldots$ sind, durch deren sucessive Vereinigung mit $\mathfrak{T}_\nu'$ die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ entstanden ist. Ihre Zahl kann endlich oder unendlich sein.

Von den Mengen $T_\lambda^{(\nu)}$ ist noch zu zeigen, daß jeder ihrer Punkte, der überhaupt Grenzpunkt eines Gebietes ist, allseitig

1) Die Zahl α kann auch transfinit sein. Man denke sich auf einer Strecke drei Punkte A, B, C so, daß B und C Grenzpunkte von Punktmengen sind, die auf AB und BC enthalten sind, und lege um alle Punkte dieser Mengen, außer um B und C Kreise, wie Fig. 2 zeigt, so daß der durch C gehende Kreis die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ darstellt, so ist $\alpha = \omega 2$.

erreichbar ist. Die Gebiete, die an sich in Frage kommen, sind die der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$. Für diejenigen von ihnen, deren Grenzen der Menge $T_1^{(\nu)}$ angehören, bedarf die Behauptung keines Beweises; sie ist nur für die übrigen Gebiete, falls solche vorhanden sind, nachzuweisen.

Dazu gehen wir wieder zu dem oben auseinandergesetzten Anordnungsprozeß zurück, und betrachten zunächst die Menge $T_1^{(\omega)}$. Von ihr ist gemäß ihrer Definition klar, daß jeder ihrer Punkte, der überhaupt Grenzpunkt eines Gebietes ist, aber nicht Grenzpunkt eines der Gebiete, deren Grenzen die in $T_1^{(\omega)}$ eingehenden Mengen T_1, T_2, T_3 .... sind, notwendig Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$ oder aber von einem der Gebiete $\mathfrak{J}'_\nu$ sein muß, die von den Mengen $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}'_2$ .... $\mathfrak{T}'_\nu$ begrenzt werden. Denn die nicht in $T_1^{(\omega)}$ eingehenden Mengen der Reihe (2) hängen mit $T_1^{(\omega)}$ nicht zusammen. Daraus ist die allseitige Erreichbarkeit der Punkte von $T_1^{(\omega)} = T_1^{(\nu)}$ unmittelbar zu schließen.

Durch die Hinzufügung der Menge $T_1^{(\nu)}$ zur Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ kann aber die Grenze eines der Gebiete $\mathfrak{J}'_\nu$ oder des Gebietes $\mathfrak{A}$ in keiner Weise verändert werden, da sie ja durch die Menge $\mathfrak{T}$ an sich bestimmt ist. Daraus folgt dann unmittelbar, daß die behauptete Eigenschaft in gleicher Weise für die Menge $T_2^{(\nu)}$, sowie für jede weitere Menge bewiesen werden kann, die Bestandteil von $\mathfrak{T}_\nu$ ist.

§ 4. Die Menge $\mathfrak{T}$ ist kurvenhaft und die Menge $\mathfrak{B}$ höchstens punkthaft.

Ein einfachstes Beispiel dieser Art ist das in der Anmerkung von § 3 erwähnte. Ein anderes erhalten wir, wenn wir auf einer Strecke AB eine, sich gegen B verdichtende Punktmenge $\{p_\nu\}$ annehmen, über jedem Teilintervall $p_\nu\ p_{\nu+1}$ ein gleichschenkliges Dreieck errichten, dessen Höhe gegen Null convergiert und in jedes Dreieck Kreise beschreiben, die einander berühren und sich gegen die Spitze verdichten. Dann bilden alle Spitzen dieser Dreiecke nebst dem Punkt B die Menge $\mathfrak{U}$, während sich die Menge $\mathfrak{B}$ auf Null reduziert.[1]) Denken wir uns endlich eine Reihe konzentrischer Kreise, deren Radien die Längen 1, ½, ¼ ... haben, und ziehen in ihnen zwei zu einander senkrechte Durchmesser, so stellt der Mittelpunkt aller Kreise die Menge $\mathfrak{B}$ und zugleich die Menge $\mathfrak{U}$ dar.

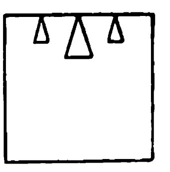


Fig. 3

1) Würde man von dem äußeren Gebiet $\mathfrak{A}$ absehen, so würde $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch sein.

Ein einfachstes Beispiel mit einer kurvenhaften Menge $\mathfrak{U}$ erhalten wir, wenn wir in einem überall dicht mit Stacheln besetzten Quadrat jede Stachel so durch ein schmales Dreieck (Fig. 3) ersetzen, daß keine zwei dieser Dreiecke einen Punkt mit einander gemein haben. Hier stellt der Umfang des Quadrats die Menge $\mathfrak{U}$ dar, während eine Menge $\mathfrak{B}$ nicht vorhanden ist.[1])

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über und denken uns zunächst die im vorigen Paragraphen angegebene Anordnung ausgeführt. Sie liefert die N Mengen

1) $$\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots.\ \mathfrak{T}_\nu,\ \ldots\ \mathfrak{T}_N$$

und die in sie eingehenden Mengen $\{T_\lambda^{(\nu)}\}$. Gemäß § 2 kann es unter ihnen nur eine endliche Zahl geben, für die bei beliebigem ε

2) $$\mathfrak{B}(T_\lambda^{(\nu)}) > \varepsilon$$

ist.

Die Mengen 1) konstituiren zusammen die Menge $\mathfrak{T}$, jede von ihnen muß daher mit mindestens einer andern zusammenhängen. Sie lassen sich daher in einem Zuge durchlaufen.[2]) Ihre Abbildung auf die Einheitsstrecke wird daher nachgewiesen sein, wenn wir dies für jede von ihnen einzeln nachweisen können.

Sei

$$\mathfrak{T}',\ \mathfrak{T}'',\ \ldots.\ \mathfrak{T}^{(\nu)},\ \ldots.\ \mathfrak{T}^{(\varrho)}$$

die Reihenfolge in der die Mengen durchlaufen werden, und sei σ_ν das Intervall der Einheitsstrecke, dem die Menge $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ entspricht, so setzen wir

3) $$\sigma_\nu = \varrho\,\mathfrak{B}(\mathfrak{T}^{(\nu)}) = \varrho\,\mathfrak{B}_\nu,$$

so daß also σ_ν proportional zu $\mathfrak{B}_\nu$ ist, und verfahren analog auch für das Folgende. Wir haben dann zu zeigen, wie man $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ eindeutig und stetig auf $\sigma_{(\nu)}$ abbilden kann.

Bezeichnen wir zu diesem Zweck der Einfachheit halber für den Augenblick die Menge $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ durch $\mathfrak{T}$, die ihr zugehörigen Mengen $\{T_\lambda^{(\nu)}\}$ durch

4) $$\{T_\gamma\} = T_1,\ T_2,\ \ldots.\ T_\lambda,\ \ldots.$$

und das zugehörige Intervall durch σ; ferner sei $\mathfrak{T}'$ die ursprüng-

1) Die wirkliche Abbildung kann in den obigen einfachen Fällen erheblich einfacher bewirkt werden, als gemäß dem folgenden allgemeinen Verfahren. Vgl. eine demnächst erscheinende Königsberger Dissertation von Janzen.

2) Dies gilt offenbar, von welcher Art die Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ auch sein mögen.

liche Menge, die durch ihre Vereinigung mit den Mengen $\{T\}$ die Menge $\mathfrak{T}$ ergibt. Wir wissen dann, daß gemäß § 3 jede Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ einen kurvenhaften Bestandteil gemein hat.

Die Menge $\mathfrak{T}'$ ist nach Annahme als stetiges Bild einer Strecke darstellbar; wir bilden sie auf die in § 1 genannte Art auf eine Strecke $\sigma' < \sigma$ ab. Ferner sei t_λ irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}'$, den die Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ gemein hat, und s_λ ein ihm gemäß § 1 zugeordneter Punkt der Strecke σ'. Da jede Menge T_λ mit $\mathfrak{T}'$ einen kurvenhaften Bestandteil gemein hat, können wir alle Punkte t_λ verschieden von einander wählen, also auch alle Punkte s_λ. Sei nun S die durch alle diese Punkte $\{s_\lambda\}$ bestimmte abgeschlossene Teilmenge von σ' und T ihr Bild in $\mathfrak{T}'$. Sie zerlegt das Intervall σ' in gewisse Teilintervalle σ'_μ, denen wieder gewisse Teilmengen T'_μ von $\mathfrak{T}'$ eindeutig entsprechen, und zwar entspricht einem gemeinsamen Endpunkt zweier Intervalle σ'_μ ein gemeinsamer Endpunkt der Bildmengen T'_μ. Überdies konstituiren die Mengen T'_μ zusammen mit der Menge T die Menge $\mathfrak{T}'$ in der Weise, daß

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{M}(\{T'_\mu\}, T)$$

ist.

Nun werde ein Intervall δ_λ so angenommen, daß

$$5) \qquad \delta_\lambda = \varrho_\lambda \mathfrak{B}(T_\lambda) = \varrho_\lambda e_\lambda; \; \sum \delta_\lambda = \sigma - \sigma'$$

ist, und die ϱ_λ gemäß § 1 gewählt werden. Dies ist möglich, da es nur eine endliche Zahl von Mengen T_λ gibt, für die $e_\lambda > \varepsilon$ ausfällt, bei beliebigem ε. Die Abbildung soll nun so eingerichtet werden, daß diesem Intervall δ_λ die Menge T_λ als Bildmenge entspricht und daß überdies seinen beiden Endpunkten der Punkt t_λ entspricht.

Wir bringen dazu die Intervalle $\{\delta_\lambda\}$ und $\{\sigma'_\mu\}$ auf einer Strecke der Länge σ so in eine geordnete Reihe, daß sie diese Strecke überall dicht erfüllen, und ihre Anordnung derjenigen der Mengen T_λ und T'_μ entspricht. Zu diesem Zweck denken wir uns auf jedem Intervall σ'_μ von σ' einen inneren Punkt s'_μ beliebig angenommen, und haben nun für die Intervalle $\{\delta_\lambda\}$ und $\{\sigma'_\mu\}$ eine Anordnung zu wählen, die derjenigen der Punkte $\{s_\lambda\}$ und $\{s'_\mu\}$ ähnlich ist, und überdies zu beachten, daß ein Intervall δ_λ stets an zwei andere Intervalle angrenzen muß.[1]) Wir werden dann die Aufgabe der

1) Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn es ein erstes oder letztes Intervall δ oder σ, gibt.

stetigen Abbildung für die Menge $\mathfrak{T}$ gelöst haben, falls wir im Stande sind jede Menge T'_μ auf das bezügliche Intervall σ'_μ und jede Menge T_λ auf das Intervall δ_λ in der Weise stetig abzubilden, daß auch die Gesamtabbildung eine stetige ist. Dies soll übrigens stets so durchgeführt werden, daß wir als Abbildung von T'_μ auf σ'_μ die bereits vorhandene Abbildung, dh. die von $\mathfrak{T}'$ auf σ', beibehalten.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zu den Mengen 1) zurück, ersetzen also $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}^{(\nu)}$, und σ durch σ_ν. Jedes Intervall σ_ν bedeckt sich dann mit Intervallen von zweierlei Art, also auch die gesamte Einheitsstrecke. Diese sämtlichen Intervalle und die entsprechenden Teilmengen bezeichnen wir wieder durch

$$\{\sigma'_\mu\},\ \{\delta_\lambda\};\ \{T'_\mu\}\ \{T_\lambda\},$$

und zwar ist für jedes Intervall σ'_μ resp. die zugehörige Bildmenge T'_μ die Abbildung bereits vorhanden, während sie für jedes Intervall δ_λ resp. die zugehörige Menge T_λ noch zu leisten ist.

Die Menge T_λ, die einem Intervall δ_λ entspricht, kann nun zunächst von der Art sein, daß ihre Komplementärmenge $\mathfrak{K}_\lambda$ aus einer endlichen Zahl von Gebieten besteht; dann kann sie, da wir in § 3 ihre allseitige Erreichbarkeit nachgewiesen haben, nach den Sätzen der ersten Mitteilung so als stetiges Bild der Strecke δ_λ dargestellt werden, daß den beiden Endpunkten von δ_λ der Punkt t_λ entspricht. Die Strecke δ_λ zerfällt dadurch in eine endliche Zahl von Intervallen $\sigma'_{\lambda\mu}$, auf denen die stetige Abbildung somit geleistet ist. Falls jedoch die Komplementärmenge $\mathfrak{K}_\lambda$ in unendlich viele Gebiete zerfällt, so ist T_λ eine Menge derselben Art wie $\mathfrak{T}$. In diesem Fall spaltet sich δ_λ in derselben Weise, wie soeben die Einheitsstrecke, zunächst in gewisse Teilintervalle $\sigma_{\lambda\nu}$[1]), die wieder der Breite $\mathfrak{B}(T'_{\lambda\nu})$ proportional angenommen werden, und dann wieder in gewisse Intervalle $\sigma'_{\lambda\mu}$ und in gewisse Intervalle $\delta_{\lambda\mu}$,[2]) deren Größe sich ebenfalls wie oben bestimmt. Auf den Intervallen $\sigma'_{\lambda\mu}$ kann die stetige Abbildung in analoger Weise bewirkt werden wie auf den Intervallen σ'_μ, während sie für die Intervalle $\delta_{\lambda\mu}$ noch zu leisten ist, und zwar wiederum so, daß den beiden Endpunkten von $\delta_{\lambda\mu}$ derselbe Punkt $t_{\lambda\mu}$ von $T'_{\lambda\mu}$ entspricht.

In dieser Weise kann man fortfahren. Dabei ist zu beachten, daß die Intervalle $\{\delta\}$ bei jedem Schritt von ν zu $\nu+1$ weiter

---

1) Sie entsprechen den aus σ hervorgehenden Intervallen σ_ν.

2) Sie entsprechen den obigen Intervallen σ'_μ und δ_λ.

zerfallen, und zwar convergieren sie mit wachsender Indiceszahl gleichmäßig gegen Null. Dies folgt unmittelbar aus der Gl. 5 sowie daraus, daß gemäß dem Hilfssatz von § 2 die Breiten $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{B}_{\lambda\mu}$ .... mit wachsender Indiceszahl gleichmäßig gegen Null convergieren. Sie verschwinden also bei dem obigen Verfahren schließlich ganz bis auf solche Punkte, die unendlich vielen von ihnen als innere Punkte gemeinsam sind. Die Intervalle $\{\sigma'\}$ zerfallen dagegen beim Fortgang von ν zu $\nu+1$ nicht. Es erfüllt sich daher die Einheitsstrecke schließlich einerseits mit den Intervallen.

$$6)\qquad \sigma'_\mu,\ \sigma'_{\lambda\mu},\ \sigma'_{\lambda\mu\nu},\ \ldots,$$

andrerseits mit denjenigen Punkten, die keinem Intervall σ' angehören, aber gemeinsame Punkte einer unendlichen Folge von Intervallen

$$7)\qquad \delta_\lambda,\ \delta_{\lambda\mu},\ \delta_{\lambda\mu\nu}\ \ldots.$$

sind. Da sich nun jedes Intervall δ in Intervalle σ' spaltet, so ist jeder dieser Punkte auch Grenzpunkt gewisser Intervalle σ' mit wachsender Indiceszahl, d. h. einer Folge der Form 6). Jedem dieser Punkte entspricht offenbar ein solcher Punkt von $\mathfrak{T}$, der zugleich Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

§ 5. Der Stetigkeitsbeweis.

Den Beweis der Stetigkeit kann man folgendermaßen führen. Nach den Festsetzungen von § 4 ist die Abbildung auf jedem Intervall σ_ν eine solche, daß sie für die Intervalle σ'_μ mit derjenigen der Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ auf σ_ν übereinstimmt. Nun bilden diese Intervalle σ'_μ mit ihren eventuellen Grenzpunkten auf σ_ν eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{O}^{(\nu)}$; aus bekannten Sätzen folgt daher,[1]) daß sich die Stetigkeit der Abbildung immer dann auch auf diejenigen Punkte von $\mathfrak{O}^{(\nu)}$ überträgt, die nicht einem Intervall σ'_μ angehören, wenn die den Intervallen σ'_μ entsprechenden Mengen T'_μ nur einen Grenzpunkt besitzen, und wenn man ihn dem bezüglichen Grenzpunkt der Intervalle σ'_μ entsprechen läßt. Das ist aber hier der Fall. Dies gilt für jedes Intervall σ_ν, also auch für die gesamte Einheitsstrecke und die gesamte abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{M}\,\{\mathfrak{O}^{(\nu)}\}.$$

Sei $\mathfrak{T}_1$ die Teilmenge von $\mathfrak{T}$, die stetiges Bild von $\mathfrak{O}_1$ ist.

Gemäß der Festsetzung von § 4 ist die Abbildung auf jedem Intervall δ_λ weiter so zu leisten, daß sie auf ihm stetig ist und in seinen Endpunkten mit derjenigen übereinstimmt, die für $\mathfrak{O}_1$ besteht.

1) vgl. z. B. meinen Bericht, Jahrb. d. D. M. V. Bd. 8 (1900) S. 120

Wir zeigen zunächst, daß wenn dies ausführbar ist, die Abbildung auch für die ganze Einheitsstrecke stetig ist. Dazu ist nur zu beweisen, daß sie auf den Intervallen δ_λ auch **gleichmäßig** stetig ist. Dies ist aber wieder eine unmittelbare Folge davon, daß mit δ_λ auch die Breite $\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_\lambda)$ gegen Null convergiert; und daraus folgt schließlich, daß die Abbildung auch in jedem Grenzpunkte unendlich vieler Intervalle δ_λ mit der für $\mathfrak{Q}$ vorhandenen übereinstimmt. Damit ist bewiesen, daß die Abbildung für die gesamte Einheitsstrecke stetig ist, falls sie für jedes δ_λ der obigen Festsetzung gemäß eingerichtet werden kann.

Beim Fortgang der Abbildung zerfällt nun zunächst jedes Intervall δ_λ in eine **endliche** Menge von Intervallen $\sigma_{\lambda\nu}$, die den obigen Intervallen σ_ν analog sind, und zwar ist das Intervall σ^λ_ν der Breite derjenigen Menge proportional, die ihr Bild werden soll. Jedes dieser Intervalle spaltet sich wieder in gewisse analog bestimmte Intervalle $\sigma'_{\lambda\mu}$ und $\delta_{\lambda\mu}$. Alle diese Intervalle $\{\sigma'_{\lambda\mu}\}$ definieren zusammen mit den Intervallen $\{\sigma'_\mu\}$ eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{Q}_2$, und für alle Punkte dieser Menge liefert die von uns getroffene Festsetzung eine stetige Beziehung einer Teilmenge $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{Q}_2$. Die Abbildung ist dann weiter für alle Punkte eines Intervalles $\delta_{\lambda\mu}$ so einzurichten, daß sie auf $\delta_{\lambda\mu}$ stetig ist und in den Endpunkten von $\delta_{\lambda\mu}$ mit der für $\mathfrak{Q}_2$ vorhandenen übereinstimmt. Ist dies ausführbar, so folgt die gleichmäßige Stetigkeit auf allen Intervallen $\delta_{\lambda\mu}$ wiederum ebenso, wie oben, woraus wieder in der nämlichen Weise die Stetigkeit für die gesamte Einheitsstrecke zu schließen ist.

In dieser Weise kann man fortfahren, und es ist klar, daß die vorstehende Betrachtung sich unmittelbar von ν auf $\nu+1$ überträgt. Die Erhaltung der Stetigkeit ist daher nur noch für den Übergang von $\{\nu\}$ auf ω nachzuweisen.

Dies folgt leicht aus der Tatsache, daß alle Intervalle $\{\sigma'\}$ und alle Intervalle $\{\delta\}$ mit der Zahl ihrer Indices gleichmäßig gegen Null convergieren. Jedes Intervall $\sigma'_{\lambda\mu}$ ist nämlich Teilintervall von δ_λ u. s. w. Für die Intervalle $\{\delta\}$ haben wir es aber im vorigen Paragraphen schon erwiesen, und daher ist es auch für die Intervalle $\{\sigma'\}$ der Fall.

Seien nun

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \ldots . \mathfrak{Q}_\nu \ldots .$$

die vorstehend definierten Mengen, so ist die Abbildung stetig für $\mathfrak{Q}_\nu$, also für alle Punkte, die entweder innere Punkte der Intervalle σ' mit höchstens ν Indizes sind oder Grenzpunkte dieser In-

tervalle. Sie ist aber, wie eben hervorgehoben, auch für alle diese Mengen gleichmäßig stetig. Die Stetigkeit ist also nur noch nachzuweisen für solche Punkte, die niemals einer Menge $\mathfrak{Q}_\nu$ angehören können. Das sind diejenigen Punkte, die für jede Indiceszahl einem Intervall δ angehören, also gemeinsame Punkte von Intervallen

$$\delta_\lambda,\ \delta_{\lambda\mu},\ \delta_{\lambda\mu\nu},\ \ldots.$$

für irgend welche Indizes λ, μ, ν .... Jeder derartige Punkt ist aber, wie in § 4 gezeigt ist, zugleich Grenzpunkt unendlich vieler Intervalle σ', also auch von Intervallen der Mengen $\mathfrak{Q}_\nu$. Da nun die Abbildung für alle Mengen $\mathfrak{Q}_\nu$, also auch für alle Intervalle σ' gleichmäßig stetig ist, so überträgt sich die Stetigkeit immer dann auf den Grenzpunkt einer solchen Folge, wenn die ihren Intervallen entsprechenden Bildmengen nur einen Grenzpunkt besitzen, und wenn man ihn dem Grenzpunkt der Intervalle δ entsprechen läßt. Das ist aber hier der Fall, und damit ist der Stetigkeitsbeweis geliefert.

Wir haben daher den folgenden Satz:

Besteht die Komplementärmenge eines geschränkten kurvenhaften Kontinuums $\mathfrak{T}$ aus unendlich vielen Gebieten, ist für jedes Gebiet die Erreichbarkeitsbedingung erfüllt, gibt es Gebiete jeder endlichen Breite nur in endlicher Zahl, und bilden diejenigen Punkte von $\mathfrak{T}$, die Häufungspunkte unendlich vieler Gebiete sind, ohne zugleich der Grenze eines dieser Gebiete anzugehören, eine punkthafte Menge: so ist $\mathfrak{T}$ als eindeutiges und stetiges Bild der Strecke darstellbar, also eine stetige Kurve.

§ 6. Der allgemeinste Fall einer kurvenhaften Menge $\mathfrak{T}$.

Wir machen nun die Annahme, daß die Menge $\mathfrak{B}$ auf kurvenhaften Bestandteilen von $\mathfrak{U}$ überall dicht liegen kann; die durch $\mathfrak{B}$ bestimmte abgeschlossene Menge, die also diese kurvenhaften Bestandteile enthält, sei V. In diesem Fall erweist sich die Menge $\mathfrak{T}$ als darstellbar, welcher Art auch die Menge $\mathfrak{B}$ ist; falls nur für jedes Gebiet der Komplementärmenge die Erreichbarkeitsbedingung erfüllt ist. Dagegen kommt die Erreichbarkeit für $\mathfrak{B}$ nicht in Betracht.

Ein einfachstes Beispiel einer solchen Menge $\mathfrak{T}$ erhält man, wenn man durch ein Quadrat Parallelen zieht, die sich von links und rechts gegen eine Mittellinie l verdichten, und jedes entstehende Rechteck so in congruente Teilrechtecke zerlegt, daß ihre Zahl bei Annäherung an die Linie l unbegrenzt zunimmt.

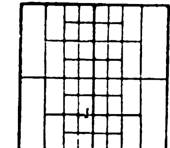


Fig. 4

Dann stellt l die Menge V dar. Zieht man zweitens in einem Kreis k einen Durchmesser d, schreibt ihm zwei Kreise k_1 und k_2 ein, die sich im Zentrum m von k berühren deren Centra m_1 und m_2 also auf d liegen, verfährt mit k_1 und k_2 ebenso und setzt dies unbegrenzt fort, so ergibt sich eine Menge $\mathfrak{T}$ von der Art, daß d sowohl die Mengen $\mathfrak{U}$ wie V darstellt, während $\mathfrak{B}$ nur überall dicht auf d ist.

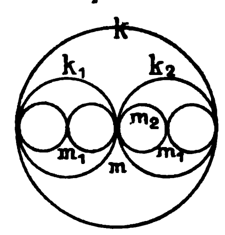


Fig. 5

Um den Satz zu beweisen, benutze ich eine Methode, die sich teilweise an die Methode von § 6 und teilweise an diejenige Methode anlehnt, die ich für die geometrische Ableitung der Peanoschen Abbildung des Quadrats auf die Strecke benutzt habe. Man gehe dazu von einer quadratischen Teilung der Ebene mit der Diagonale η aus und betrachte alle Quadrate, die im Innern oder auf dem Umfang Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten. Sie zerfallen in zwei Klassen. Seien $\{q'\}$ diejenigen, bei denen Inneres und Umfang keinen Punkt von V enthält, und $\{q''\}$ die übrigen. Jeder Punkt von V liegt dann außerhalb aller Quadrate q'.

Sei nun m' irgend ein innerer Punkt eines Quadrates q', der zugleich Punkt der Komplementärmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$ ist, so muß er irgend einem Gebiet $\mathfrak{J}'_\mu$ dieser Menge angehören. Die Gesamtheit aller Gebiete von $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$, denen derartige Punkte m' angehören sei $\{\mathfrak{J}'_\mu\}$. Ist dann $\mathfrak{T}'$ diejenige a b g e s c h l o s s e n e Menge, zu der die Grenze $\mathfrak{T}'_\mu$ eines jeden d i e s e r Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ gehört, so läßt sich leicht zeigen, daß ihr kein Punkt u von $\mathfrak{U}$ angehören kann, der a u ß e r h a l b aller Quadrate $\{q'\}$ liegt. Denn jeder derartige Punkt u müßte Grenzpunkt von Punkten unendlich vieler unserer Mengen $\mathfrak{T}'_\mu$ sein; es müßte also unendlich viele Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ geben, zu denen Punkte sowohl in unmittelbarer Nähe von u, wie auch innerhalb mindestens eines Quadrates q' gehören, und daraus würde man wieder folgern können, daß sich eine Größe $\varepsilon > o$ bestimmen ließe, so daß die Breite unendlich vieler Gebiete $\mathfrak{J}'_\mu$ größer als ε ausfiele. Da nun V außerhalb aller Quadrate q' liegt, so folgt hieraus weiter, daß die Menge $\mathfrak{T}'$ keinen Punkt von V enthalten kann.

Die Menge $\mathfrak{T}'$ kann in eine endliche oder abzählbare Menge

getrennter Kontinua zerfallen. Jedes einzelne ist nach § 6 als stetiges und eindeutiges Bild einer Strecke darstellbar. Keines von ihnen liegt außerhalb aller Quadrate q'. Auch von ihnen gibt es, wie wir sofort zeigen wollen, nur eine endliche Zahl, deren Breite eine Größe $\varepsilon > 0$ übersteigt.

Die Quadrate $\{q'\}$ bestimmen nämlich eine endliche Zahl getrennter Polygone P_k; jedes muß mindestens ein Quadrat q' enthalten. Gäbe es nun unendlich viele Mengen der genannten Art, so müßte es mindestens ein Polygon P_k geben, das ebenfalls von unendlich vielen Mengen durchzogen würde, deren Breite größer als ε ist. Dies ist aber unmöglich. Zerfällt nämlich die in P_k enthaltene Teilmenge $\mathfrak{T}_k$ von $\mathfrak{T}$ zunächst in zwei getrennte Bestandteile, so kann man einen das Polygon P_k durchziehenden Streckenzug l legen, der keinen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält und diese Bestandteile von einander trennt. Dieser Streckenzug wird in irgend einem Gebiet $\mathfrak{J}_\lambda$ der Menge $\mathfrak{R}$ verlaufen (das Gebiet $\mathfrak{A}$ eingeschlossen). Falls nun die in P_k enthaltene Teilmenge $\mathfrak{T}_k$ in unendlich viele getrennte Bestandteile zerfiele, deren Breite größer als ε wäre, so gäbe es unendlich viele solche Streckenzüge l. Es gäbe dann entweder unendlich viele verschiedene Gebiete $\mathfrak{J}_\lambda$, deren jedes mindestens einen dieser Streckenzüge enthielte, oder aber es gäbe mindestens ein Gebiet $\mathfrak{J}_\mu$ das unendlich viele Streckenzüge enthielte. Beides steht aber, wie man leicht sieht, mit den für die Darstellbarkeit notwendigen Bedingungen in Widerspruch. Die erste Möglichkeit widerstreitet nämlich dem Satz des § 2 und die zweite der Erreichbarkeitsbedingung für das Gebiet $\mathfrak{J}_\mu$. Damit ist die Behauptung bewiesen, und wir folgern wiederum, daß sich diese Mengen der Breite nach so anordnen lassen, daß sie die einfache Folge

$$\{T'_\lambda\} = T'_1, T'_2, \ldots T'_\lambda, \ldots$$

bilden.

Wir gehen nun zu einem Quadrat q'' über, das im Innern oder auf dem Umfang mindestens einen Punkt von V enthält. Die in ihm enthaltene Teilmenge von $\mathfrak{T}$ kann wieder in mehrere getrennte Bestandteile zerfallen; aber es kann auch hier nur eine endliche Zahl von solchen geben, deren Breite eine Größe ε übersteigt. Dies wird eben so bewiesen, wie für die Menge $\mathfrak{T}_k$, nur daß hier das Quadrat q'' an die Stelle des Polygons P_k tritt.

Da dies für jedes Quadrat q'' gilt, so zerfallen auch die sämtlichen, in einem Quadrat q'' enthaltenen Teilmengen von $\mathfrak{T}$ in eine endliche oder abzählbare Menge einzelner Kontinua, von der

Art, daß nur eine endliche Zahl existiert, deren Breite eine Größe ε übersteigt. Diese Kontinua seien der Breite nach geordnet

$$\{T''_\nu\} = T''_1, T''_2, \ldots T''_\nu \ldots .$$

Jedes von ihnen soll, wie ich noch ausdrücklich bemerke, nur in einem einzigen Quadrat q'' enthalten sein. Alle diese Kontinua $\{T'_\lambda\}$ und $\{T''_\nu\}$ bilden zusammen naturgemäß wieder ein einziges Kontinuum, nämlich die Menge $\mathfrak{T}$ selbst.

Man spalte nun die vorstehend erhaltenen Kontinua in zwei Gruppen. In die erste nehmen wir alle diejenigen auf, deren Breite größer als η ist; sie seien

$$\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \ldots \mathfrak{T}'_\nu \ldots \mathfrak{T}'_\varkappa;$$

in die zweite alle übrigen. Zu ihnen gehört insbesondere jede Menge T''_ν; wir ordnen sie wieder der Größe nach und bezeichnen sie durch

$$\{T_\lambda\} = T_1, T_2, \ldots T_\lambda \ldots$$

Es ist also

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{T}'_\nu) > \eta, \ \mathfrak{B}(T_\lambda) \leq \eta.$$

Man kann nun wieder, wie in § 3 die Mengen T_λ mit den Mengen $\mathfrak{T}'_\nu$ zu zusammenhängenden Bestandteilen vereinigen. Dadurch möge $\mathfrak{T}'_\nu$ in eine Menge $\mathfrak{T}_\nu$ übergehen, so daß, wie dort

$$\mathfrak{T}_\nu = \{\mathfrak{T}'_\nu, T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)} \ldots T_\lambda^{(\nu)} \ldots\}$$

ist. Dadurch erhalten wir wieder eine endliche Zahl von Mengen $\mathfrak{T}_\nu$, die ebenfalls mit einander zusammenhängen und daher in einem Zuge durchlaufen werden können; in dieser Reihenfolge mögen sich die Mengen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_\nu, \ldots \mathfrak{T}_\varkappa$$

ergeben. Wir teilen dann zunächst wieder die Einheitsstrecke in Bestandteile σ_ν, so daß für festes ϱ

$$\sigma_\nu = \varrho\, \mathfrak{B}(\mathfrak{T}_\nu)$$

ist, ordnen dem Intervall σ_ν die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ zu, und haben nun die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ auf σ_ν abzubilden.

Wir können nunmehr wieder die Methode anwenden, die wir in § 5 für die Herstellung der Abbildung zu Grunde legten. Dadurch bedeckt sich die Einheitsstrecke wieder überall dicht mit gewissen Intervallen, und zwar in der Weise, daß ihre Anordnung und Lage den in § 5 genannten Bedingungen unterliegt. Die Intervalle haben aber hier eine etwas geänderte Bedeutung. Wir bezeichnen sie durch σ'_λ und σ''_λ, und zwar sollen $\{\sigma'_\lambda\}$ diejenigen

sein, denen die Mengen T'_λ oder aber Teilmengen dieser T'_λ entsprechen, während die T''_λ die Bildmengen der Intervalle σ''_λ sein sollen. Für die Intervalle σ'_λ kann dann die Abbildung gemäß § 5 ausgeführt werden, während sie für die Intervalle σ''_λ noch zu leisten ist.

Um nun die Abbildung einer Menge T''_λ auf das Intervall σ''_λ zu bewirken, nehmen wir eine Größe $\eta_1 < {}^1/_4\, \eta$ beliebig an, denken uns das Quadrat q'' in Teilquadrate der Diagonale η_1 zerlegt und verfahren mit T''_λ wie wir soeben mit $\mathfrak{T}$ selbst verfuhren. Werde zuvor die Menge T''_λ durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet, und seien $\{\mathfrak{H}_\lambda\}$ die ihr zugehörigen Gebiete. Alle Quadrate, die überhaupt Punkte von $\mathfrak{S}$ enthalten, spalten wir wieder in die Quadrate $\{q''_1\}$, die im Innern mindestens einen Punkt von V enthalten, und in die Quadrate $\{q'_1\}$, für die dies nicht der Fall ist. Durch die Quadrate $\{q'_1\}$ wird dann wieder eine Teilmenge $\{\mathfrak{H}'_\mu\}$ aller Gebiete $\{\mathfrak{H}_\lambda\}$ definiert, zu der wir diejenigen Gebiete rechnen, von denen ein innerer Punkt zugleich innerer Punkt eines Quadrates $\{q'_1\}$ ist. Die Grenzen $\{\mathfrak{S}'_\mu\}$ aller dieser Gebiete bestimmen dann wieder eine Teilmenge $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$, von der man ebenso wie oben zeigt, daß ihr kein Punkt von $\mathfrak{U}$ angehört, der außerhalb aller Quadrate $\{q'_1\}$ liegt, und daß sie nur eine endliche Zahl von Bestandteilen enthält, deren Breite größer als eine Größe ε_1 ist. Die so definierte Menge $\mathfrak{S}'$ zerfällt dann wieder in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilmengen

$$\{S'_\nu\} = S'_1, S'_2 \ldots . S'_\nu, \ldots .,$$

deren jede als eindeutiges und stetiges Bild einer Strecke darstellbar ist. In gleicher Weise gelangen wir zu den Teilmengen

$$\{S''_\nu\} = S''_1, S''_2, \ldots . S''_\nu \ldots .,$$

denen die Menge V angehören muß, und die die gleichen Eigenschaften besitzen, wie die vorstehenden Mengen $\{T'_\nu\}$ und $\{T''_\nu\}$ Mit ihnen bilden wir wieder die Mengen

$$\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2, \ldots . \mathfrak{S}'_{n_1},$$

deren Breite größer als η_1 ist, und die Mengen

$$\{S_\lambda\} = S_1, S_2 \ldots . S_\lambda \ldots .,$$

deren Breite kleiner als oder gleich η_1 ist, und zu denen jede Menge S''_ν gehört, sowie endlich die Mengen

$$\mathfrak{S}_\nu = \{\mathfrak{S}'_\nu, S^{(\nu)}_1, S^{(\nu)}_2, \ldots . S^{(\nu)}_\lambda \ldots .\}.$$

Die Abbildung wird nun wieder so vor sich gehen, daß das Intervall σ''_λ in gewisse Teilintervalle $\sigma'_{\lambda\mu}$ und $\sigma''_{\lambda\mu}$ zerfällt, so daß für

einen flächenhaften Bestandteil (Peanosches Gebiet), so unterliegen diejenigen Teile der Grenze dieses Bestandteiles der Erreichbarkeitsbedingung nicht, die der Grenzmenge aller Gebiete angehören, ohne zugleich zur Grenze einzelner dieser Gebiete zu gehören.

Diese Erwägungen übertragen sich nun auch auf den Fall, daß in die Menge $\mathfrak{T}$ unendlich viele Peanosche Gebiete eingehen. In der Tat kann man auch hier den Beweis von § 7 in der Weise wiederholen, daß man sämtliche Peanoschen Gebiete der Menge V zurechnet. Dabei ist es ganz gleichgiltig, welche Lage diese Gebiete zueinander haben; sie können getrennt sein oder auch einzelne gemeinsame Punkte enthalten. Immer können wir dann das Beweisverfahren des § 7 anwenden, und es werden sich Erreichbarkeitsbedingungen nur für die Gebiete $\mathfrak{J}_\lambda$ einstellen können, die zur Komplementärmenge $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{T}$) gehören. Diese Bedingungen knüpfen sich nämlich immer nur an die Frage, ob ein Polygon P_k oder ein Quadrat q'' von unendlich vielen zusammenhängenden Teilmengen endlicher Breite durchzogen werden kann, und damit an Streckenzüge, die in den Gebieten $\mathfrak{J}_\lambda$ der Komplementärmenge $\mathfrak{K}$ verlaufen. [1])

Die Erreichbarkeitsbedingung kommt also auch im allgemeinsten Fall nur für solche Peanoschen Gebiete und für solche Teile ihrer Genze in Betracht, die zur Grenze eines Gebietes von $\mathfrak{K}$ gehören. Beachtet man nun, daß die übrigen Bestandteile der Grenze eines Peanoschen Gebietes, falls es solche gibt überhaupt nicht zur Grenze eines Gebietes der Komplementärmenge $\mathfrak{K}$ gehören, so kann man schließlich folgenden Satz aussprechen:

Theorem II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein geschränktes ebenes Kontinuum als eindeutiges und stetiges Bild der Strecke darstellbar ist, besteht darin, daß jedes Gebiet, in das seine Komplementärmenge zerfällt, allseitige Erreichbarkeit besitzt, und daß es unter diesen Gebieten nur je eine endliche Anzahl gibt, deren Breite eine beliebige Größe $\varepsilon > o$ übersteigt.

1) Die oben skizierte Beweismethode umfaßt übrigens alle überhaupt möglichen Fälle. Es schien mir aber zweckmäßig, die einfacheren Fälle einzeln zu behandeln. Einen einheitlichen Beweis wird der zweite Teil meines Berichts enthalten.

früheren Fälle, doch tritt hier in gewisser Weise eine Modification des in der ersten Mitteilung enthaltenen Resultates ein.

Ich nehme zunächst an, daß die Zahl der Peanoschen Gebiete endlich ist; es sei $\mathfrak{T}'$ die Grenze eines solchen Gebietes. Wenn dann kein Punkt dieser Grenze $\mathfrak{T}'$ zur Menge $\mathfrak{U}$ gehört, so besteht für diese Grenze und das Peanosche Gebiet nach wie vor die Erreichbarkeit. Dies folgt daraus, daß alsdann die Grenze $\mathfrak{T}'$ des Peanoschen Gebietes nur an einer endlichen Zahl von Gebietsgrenzen andrer Gebiete teilnehmen kann, und daß die allseitige Erreichbarkeit für die äußere Grenze des Gebiets diejenige für das Gebiet selbst nach sich zieht.

Die Erreichbarkeitsbedingung ist aus dem gleichen Grunde auch dann erfüllt, wenn zwar die Menge $\mathfrak{U}$ Punkte von $\mathfrak{T}'$ enthält, aber in sie kein zusammenhängender Bestandteil der Grenze $\mathfrak{T}'$ eingeht. Dies gilt aus den gleichen Gründen auch dann noch, wenn es zwar einen zur Grenze $\mathfrak{T}'$ gehörigen Kurvenbogen gibt, der zu $\mathfrak{U}$ gehört, wenn aber dieser Kurvenbogen zugleich Grenze eines Gebietes $\mathfrak{J}_\lambda$ ist. Denn auch in diesem Fall muß dem Kurvenbogen für dieses Gebiet $\mathfrak{J}_\lambda$ die allseitige Erreichbarkeit zukommen und daher auch für das Peanosche Gebiet selbst. Ein Beispiel erhält man, wenn man neben eine Seite des in § 4 genannten Quadrates, dessen Umfang von innen überall dicht mit Dreiecken erfüllt ist, eine quadratische Fläche als Peanosches Gebiet setzt.

Wenn dagegen ein Kurvenbogen T von $\mathfrak{T}'$ zu $\mathfrak{U}$ gehört, ohne zur Grenze eines Gebietes $\mathfrak{J}_\lambda$ zu gehören, so stellt er in der Bezeichnung des § 5 einen Bestand von V dar. In diesem Fall braucht für den Kurvenbogen T die Erreichbarkeitsbedingung nicht erfüllt zu sein. In der Tat kann man jetzt den Beweis des vorigen Paragraphen in der Weise wiederholen, daß man das ganze Peanosche Gebiet in die Menge V eingehen läßt, also zu den Quadraten $\{q''\}$ auch alle diejenigen rechnet, die irgend einen Punkt des Peanoschen Gebietes im Innern oder auf dem Umfang enthalten. Jedes Quadrat q'', das ganz dem Peanoschen Gebiet angehört, ist dann den Mengen T''_v hinzuzufügen. Andererseits gestattet es aber die stetige Darstellung; die Darstellung ist daher nur für diejenigen Quadrate und die in ihnen enthaltenen Teilmengen von $\mathfrak{T}$ zu leisten, die nur teilweise diesem Gebiet angehören. Dies kann, da man auch hier mit quadratischen Teilungen operiert, deren Seiten unendlich klein werden, ebenso bewirkt werden, wie im § 5. Also folgt schließlich:

Enthält das geschränkte ebene Kontinuum $\mathfrak{T}$

Auch für planparallele Platten doppeltbrechender Körper liegen Versuche vor, die auf der Methode der spektralen Zerlegung beruhen. Es wurden zunächst von Wrede und A. Ermann[1]) dünne Spaltblättchen von Glimmer auf solche Weise untersucht. Erst später wurden von J. Müller[2]) und Fizeau-Foucault die von der Doppelbrechung herrührenden Interferenzerscheinungen in polarisiertem Licht wahrgenommen. Da aber zu diesen Versuchen ziemlich dicke Präparate benutzt wurden, so blieben namentlich bei schwachem Auflösungsvermögen der Spektroskope und direkter Beobachtung der Platten vor dem Spalt (vgl. S. 336) die von den inneren Reflexionen herrührenden Erscheinungen unbeachtet.

Es handelt sich aber bei der Spektralanalyse der Interferenzfarben doppeltbrechender Krystallplatten stets um zwei Arten von Interferenzen, die durch Doppelbrechung oder durch innere Reflexionen zu Stande kommen.[3])

Ich habe versucht, ihr Zusammenwirken näher zu verfolgen.

Obgleich zu den Versuchen lediglich Glimmer-Spaltungsblättchen verwendet wurden, gelten die Diskussionen allgemein für den senkrechten Durchgang parallelstrahligen Lichtes durch planparellele Platten inaktiver vollkommen durchsichtiger Krystalle.[4])

I. Die Amplituden der austretenden Wellen.

Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Polarisationsrichtungen der schnelleren und der langsameren Wellen W_1 und W_2 in der Krystallplatte. Bei senkrechtem Eintritt einer ebenen Welle kann deren Polarisationsvektor s zerlegt werden in Komponenten parallel $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, deren Veränderungen beim Durchgang durch die Platte gesondert

1) A. Ermann, Pogg. Ann. **63**, 531; 1844.

2) J. Müller, Pogg. Ann. **69**, 98; 1846.

3) Kurze theoretische Hinweise auf den Einfluß innerer Reflexionen bei Krystallplatten finden sich außer bei W. Voigt (a. a. O.) noch bei Dongier (Thèses d. l. fac. d. sc., Paris 1897/98, No. 16, p. 90) und Macé de Lépinay (Journ. d. Phys. (3) **9**. 644. 1900.

4) Inzwischen hat Lord Rayleigh die Aufmerksamkeit gelenkt auf die von der Doppelbrechung herrührenden Erscheinungen bei den auf inneren Reflexionen beruhenden Interferenzen, die man an dünnen Glimmerplatten im konvergenten einfarbigen Licht beobachten kann. (Phil. Mag. **12**, 489; 1906.)

betrachtet werden können. Bedeutet p die Frequenz der einfallenden Welle, so wird der Polarisationszustand der parallel $\mathfrak{P}_1$ polarisierten Komponente dargestellt durch den Realteil des komplexen Ausdrucks:

$$\mathfrak{x} = a \, . \, e^{ipt},$$

worin a die Amplitude dieser Komponente ist. Bedeuten ferner l die Dicke der Platte, λ_1, λ_2 die Wellenlängen und n_1, n_2 die Brechungsindizes von W_1 und W_2, ν und μ die Schwächungskoeffizienten der Amplituden an den beiden Grenzflächen, und setzt man:

$$2\pi n_1 \frac{l}{\lambda_1} = \varphi_1, \quad a \mu \nu = r_1,$$

so wird der Polarisationszustand der aus der Platte nach einmaligem Durchgang austretenden Welle gegeben sein durch:

$$\mathfrak{x}_0 = r_1 \, . \, e^{i(pt - \varphi_1)},$$

wenn man dabei absieht von den für beide Komponenten gleich großen Phasenverzögerungen, die bei halbversilberten Platten an den Grenzflächen eintreten.[1]) Bedeutet endlich ϱ den Reflexionskoeffizienten für die Amplituden der im Innern reflektierten Wellen, so werden die nach zweimaligen, viermaligen u. s. w. inneren Reflexionen austretenden Anteile dargestellt durch:

$$\mathfrak{x}_1 = r_1 \, . \, \varrho^2 \, . \, e^{i(pt - 3\varphi_1)}$$
$$\mathfrak{x}_2 = r_1 \, . \, \varrho^4 \, . \, e^{i(pt - 5\varphi_1)}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Summiert man über alle diese Anteile, so ergibt sich für die resultierende Welle an der Austrittsfläche:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \, . \, e^{ipt},$$

worin:

$$\mathfrak{A} = r_1 \, . \, e^{-i\varphi_1} (1 + \varrho^2 \, . \, e^{-2i\varphi_1} + \varrho^4 \, . \, e^{-4i\varphi_1} + \ldots)$$

$$\mathfrak{A} = r_1 \cdot \frac{e^{-i\varphi_1}}{1 - \varrho^2 \, . \, e^{-2i\varphi_1}}. \tag{1}$$

Durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Ausdruck erhält man daraus für das Quadrat des absoluten Betrages:

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. 31, 629; 1887.

$$A^2 = \frac{r_1^2}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi_1} \tag{2}$$

und durch Division des reellen in den imaginären Bestandteil ergibt sich die Tangente des Winkels von $\mathfrak{A}$:

$$\sphericalangle(\mathfrak{A}) = -\mathsf{A} = \sphericalangle \frac{(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)\,(1 - \varrho^2\cos 2\varphi_1 - i\,\varrho^2\sin 2\varphi_1)}{(1 - \varrho^2\cos 2\varphi_1)^2 + \varrho^4 \sin^2 2\varphi_1}$$

$$\tan \mathsf{A} = \frac{1 + \varrho^2}{1 - \varrho^2} \cdot \tan \varphi_1. \tag{3}$$

Der physikalischen Bedeutung dieser Größen entsprechend ist also in (2) A die Amplitude und in (3) A die Phase der austretenden Welle.

Diesen Relationen für die eine Komponente entsprechen ganz analoge Beziehungen für die andere Komponente des aus der Krystallplatte austretenden Lichtes. Will man sie anwenden auf den Durchgang unpolarisierten Lichtes durch unversilberte Platten eines isotropen Mediums vom Brechungsindex n, so hat man zu setzen:

$$\varrho = \frac{n + 1}{n - 1} \tag{4}$$

und erhält:

$$A^2 = \frac{\frac{1}{4}\, r^2\, (n + 1)^4}{4\, n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2\varphi} \tag{2a}$$

$$\tan \mathsf{A} = \frac{n^2 + 1}{2n} \tan \varphi. \tag{3a}$$

Die Beziehung (2) gibt die Abhängigkeit der Intensität der austretenden Welle von der Größe φ an; sie erklärt die Interferenzerscheinungen, welche an keilförmigen Schichten im monochromatischen Lichte, sowie an dünnen planparallelen Platten bei spektraler Zerlegung des durchgegangenen Lichtes auftreten. Die Intensität erreicht ein Maximum jedesmal, wenn die optische Länge nl ein grades Vielfaches einer halben Wellenlänge λ beträgt; dazwischen liegen Minima der Helligkeit.

Für schwache innere Reflexionen (S. 334) ist der Intensitätsverlauf zwischen den Extremwerten etwa sinusförmig. Der Einfluß einer Vergrößerung des Reflexionsfaktors ϱ auf die Intensitätsverteilung ist zuerst von Pérot und Fabry[1]) an Platten und Keilen mit halbversilberten Flächen untersucht worden:

1) Pérot und Fabry, Ann. d. Chim. et de Phys. Sér. VII, t. 12, p. 459; 1897.

Stellt man A^2 als Funktion von φ dar, so erhält man eine von ihrem Maximum bei $\varphi = 0$ nach dem Minimum bei $\varphi = \pi/2$ abfallende Kurve. Für große Werte von ρ, wie man sie leicht bei einigermaßen starker Versilberung erhält, wird der Abfall äußerst steil. —

Bei der Beobachtung entsprechender Interferenzerscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten hat man zu berücksichtigen, daß die Relationen (2) und (3) für die schnellere $\parallel \mathfrak{P}_1$ und die langsamere $\parallel \mathfrak{P}_2$ polarisierte Welle im Krystall getrennt gelten. Daher erhält man den verschiedenen Geschwindigkeiten $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}$ dieser Wellen entsprechend zwei verschiedene Streifensysteme im Spektrum des durch eine Glimmerplatte hindurchgegangenen Lichtes, je nachdem die einfallende Welle $\parallel \mathfrak{P}_1$ oder $\parallel \mathfrak{P}_2$ polarisiert ist. Diese Streifensysteme werden zusammenfallen an denjenigen Stellen, wo φ_1 und φ_2 sich um ein ganzes Vielfaches von π unterscheiden, d. h. wo der Gangunterschied der beiden Wellen ein gerades Vielfaches von $\lambda/4$ beträgt. An denjenigen Stellen dagegen, wo der Gangunterschied ein ungerades Vielfaches von $\lambda/4$ beträgt, werden die Helligkeitsmaxima des einen Systems zusammenfallen mit den Helligkeitsminima des anderen.

Demnach kann man an einer Glimmerplatte die beiden Streifensysteme für sich beobachten, wenn man vor die Platte ein Nicolsches Prisma so aufstellt, daß die Polarisationsrichtung des aus ihm austretenden Lichtes $\parallel \mathfrak{P}_1$ oder $\parallel \mathfrak{P}_2$ ist. Dreht man die polarisierende Vorrichtung, so erblickt man in der Diagonalstellung die beiden Streifensysteme gleichzeitig und bei hinreichend starker Versilberung gleich scharf, sodaß sie abwechselnd zusammenfallen und sich vermengen. Jene Stellen der Streifenkoinzidenz (Konsonanz) sind identisch mit den Stellen, wo zwischen gekreuzten Nicols in dem Müllerschen Streifensystem die hellen und die dunklen Streifen liegen.

Läßt man natürliches Licht ohne Anwendung einer analysierenden Vorrichtung durch die Glimmerplatte gehen, so treten wegen der Zerlegung der einfallenden Welle in die Komponenten $\parallel \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ dieselben Erscheinungen auf, wie im polarisierten Licht bei Diagonalstellung des Polarisators.

Die von dem Gangunterschiede abhängige verschiedene Lage der Streifensysteme zueinander läßt sich sehr genau mit Hülfe von halbversilberten Glimmerplatten bei Anwendung eines polarisierenden Nicols feststellen. So wurde an einer Glimmerplatte

von ca. $^1/_2 \lambda_{g_4}$ Gangunterschied folgende Lage der hellen Streifen bestimmt:

Die Lage der Helligkeitsmaxima für verschiedene Polarisationsrichtungen.

Wellenlänge $\mu\mu$	Polarisationsrichtung ∥ $\mathfrak{P}_1$ erster Streifen	Polarisationsrichtung ∥ $\mathfrak{P}_1$ zweit. Streifen	Polarisationsrichtung ∥ $\mathfrak{P}_2$ erster Streifen	Phasendifferenz der Komponenten ∥ $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$
646	154° 0′ 7″	154° 3′ 54″	154° 2′ 27″	111° ± 0,5°
586	152° 45′ 28″	152° 49′ 54″	152° 48′ 30″	123° ± 0,5°
546	151° 33′ 1″	151° 38′ 13″	151° 36′ 48″	131° ± 0,5°
517	150° 26′ 49″	150° 32′ 43″	150° 31′ 28″	142° ± 1°

Auf diese Weise kann man demnach den Gangunterschied für Bruchteile von halben Wellenlängen sehr gut bestimmen, namentlich wenn man kräftig versilberte Platten anwendet, bei denen die hellen Streifen äußerst scharf werden.

II. Die Phasendifferenzen der austretenden Wellen.

Zur Erklärung der Interferenzerscheinungen, welche zwischen gekreuzten Nicols auftreten, ist außer der Kenntnis der Amplituden der austretenden Wellen noch die Kenntnis ihres Gangunterschiedes $\frac{\lambda}{2\pi}\Delta$ erforderlich. Nach (3) ergibt sich:

$$\operatorname{ctg} \Delta = \operatorname{ctg}(B - A).$$

Bezeichnet man die Phasendifferenz der beiden nach einmaligem Durchgang austretenden Wellen mit

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{5}$$

und setzt man der Einfachheit halber

$$\frac{1+\varrho_1^2}{1-\varrho_1^2} = \frac{1+\varrho_2^2}{1-\varrho_2^2} = k,$$

was z. B. bei halbversilberten Platten praktisch als zutreffend angenommen werden darf, so erhält man:

$$\operatorname{ctg} \Delta = \frac{\cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + k^2 \sin\varphi_2 \sin\varphi_1}{k \sin\delta}$$
$$= \frac{1}{k}\operatorname{ctg}\delta - \frac{k^2-1}{2k}\left(\frac{\cos(\varphi_2+\varphi_1)}{\sin\delta} - \operatorname{ctg}\delta\right)$$

oder:

$$\operatorname{ctg} \Delta = \frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^4}\operatorname{ctg}\delta - \frac{2\varrho_1^4}{1-\varrho^4}\,\frac{\cos(2\varphi_1+\delta)}{\sin\delta}\,. \tag{6}$$

Mit der periodischen Änderung der Amplituden der austretenden Wellen ist demnach auch eine periodische Schwankung ihres Gangunterschiedes verbunden, und zwar hängt ihre Größe ab von der Phasendifferenz δ der beiden ersten Teilwellen an der Austrittsfläche. Für verschiedene in den betrachteten Intervallen als konstant angenommene δ stellt Fig. 1 den perio-

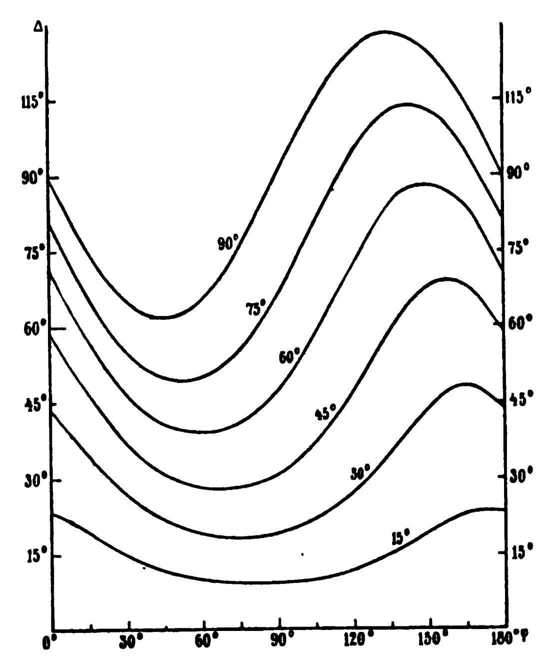


Fig. 1. Phasenunterschiede an der Austrittsfläche. Reflexionsfaktor $\varrho = \frac{1}{2}$.

dischen Verlauf von Δ als Fuktion von φ_1 dar. Dem Faktor $\frac{1}{\sin\delta}$ entsprechend, wird die Schwankung von Δ um so geringer, je mehr der Phasenunterschied δ der beiden ersten Teilwellen einem Vielfachen von π sich nähert. Setzt man in (6) für δ ein $\pi - \delta$, so ergibt sich:

$$\text{(6a)} \quad \frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^4}\operatorname{ctg}(\pi-\delta) - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^4}\frac{\cos[2(\pi-\varphi_1)+\pi-\delta]}{\sin(\pi-\delta)} = \operatorname{ctg}(\pi-\Delta),$$

d. h. das Kurvensystem $\Delta' = (\varphi_1, \pi-\delta)$ erhält man aus dem in Fig. 1 dargestellten: $\Delta = (\varphi_1, \delta)$ durch Umdrehung um 180° um den Punkt

$$\varphi_1 = \pi/2, \quad \Delta = \pi/2.$$

Bedenkt man weiter, wie etwa in Diagonalstellung des po-

larisierenden Nicolschen Prismas die beiden Streifensysteme im Spektrum zueinander liegen, so bekommt man folgendes Bild von der Schwankung des Gangunterschiedes: Die Extremwerte von Δ liegen an den Stellen $\varphi_1 = \delta/2$ und $\varphi_1 = \delta/2 + \pi/2$, d. h. zwischen den benachbarten Streifen der beiden Systeme, die der Einfachheit halber mit $(\mathfrak{P}_1)$ und $(\mathfrak{P}_2)$ bezeichnet werden sollen. Geht man von einer Stelle $\delta = 0$ aus, so bleibt mit wachsendem δ das Streifensystem $(\mathfrak{P}_2)$ gegen $(\mathfrak{P}_1)$ zurück. Da für $0 < \delta < \pi$ der Phasenunterschied Δ zunächst zunimmt, wenn φ_1 von 0 an abnimmt, so liegen die Maxima von Δ zwischen zwei zusammengehörigen Streifen von $(\mathfrak{P}_1)$ und $(\mathfrak{P}_2)$, d. h. für $0 < \delta < \pi/2$ in den kleineren von den beiden Streifensystemen gebildeten Intervallen, für $\pi/2 < \delta < \pi$ in den größeren.

Mit Hülfe von (3a) auf S. 4 wurden für Glimmerspaltungsblättchen mit den Hauptbrechungsindices $n_1 = 1{,}5941$, $n_2 = 1{,}5997$ die Phasendifferenzen Δ für verschiedene Werte von δ berechnet. Die Tabelle auf S. 20 zeigt die Abweichungen $\Delta - \delta$, deren Maximum demnach fast 6^0 beträgt.

Um den Mittelwert des Phasenunterschiedes zu bilden, soll eine einfache Reihenentwicklung von Δ benutzt werden. Setzt man in (1) auf S. 323

$$e^{i\varphi_1} = z_1$$

so wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{r_1 z_1}{1 - \varrho_1^2 z_1^2}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{A} &= \log r_1 + \log z_1 - \log(1 + \varrho_1 z_1) - \log(1 - \varrho_1 z_1) \\ &= \log r_1 + \log z_1 + 2\left[\frac{\varrho_1^2 z_1^2}{2!} + \frac{\varrho_1^4 z_1^4}{4!} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Da nun der Winkel Φ_1 von $\mathfrak{A}$ gleich dem Imaginärteil des Logarithmus ist, so wird:

$$\Phi_1 = \varphi_1 - 2\left[\frac{\varrho_1^2}{2!}\sin 2\varphi_1 + \frac{\varrho_1^4}{4!}\sin 4\varphi_1 + \cdots\right]$$

Für Φ_2 folgt ein analoger Ausdruck. Setzt man:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\sigma, \tag{7}$$

so erhält man wieder unter der Voraussetzung: $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$:

$$\Delta = \delta - 4\left(\frac{\varrho^2}{2!}\sin\delta\cos 2\sigma + \frac{\varrho^4}{4!}\sin 2\delta\cos 4\sigma + \cdots\right)$$

Es ergibt sich daraus, daß im allgemeinen

$$\int_0^{\pi/2} \Delta d\sigma = \int_0^{\pi/2} \delta d\sigma$$

ist, wenn δ = const. ist, d. h. der Mittelwert des Gangunterschiedes der resultierenden Welle ist im allgemeinen gleich dem Mittelwert des Gangunterschiedes der beiden ersten Teilwellen innerhalb genügend kleiner Intervalle, in welchen δ als konstant angesehen werden kann.

Um die Abhängigkeit des Gangunterschiedes vom Reflexionsfaktor zu verfolgen, soll in (6) mit Hülfe von (5) und (7) σ statt φ_1 eingeführt werden:

$$\operatorname{ctg} \Delta = \frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^4} \operatorname{ctg} \delta - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^4} \frac{\cos 2\sigma}{\sin \delta}.$$

Für $\delta = \pi/2$ wird

$$\operatorname{ctg} \Delta = \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^4} \cos 2\sigma,$$

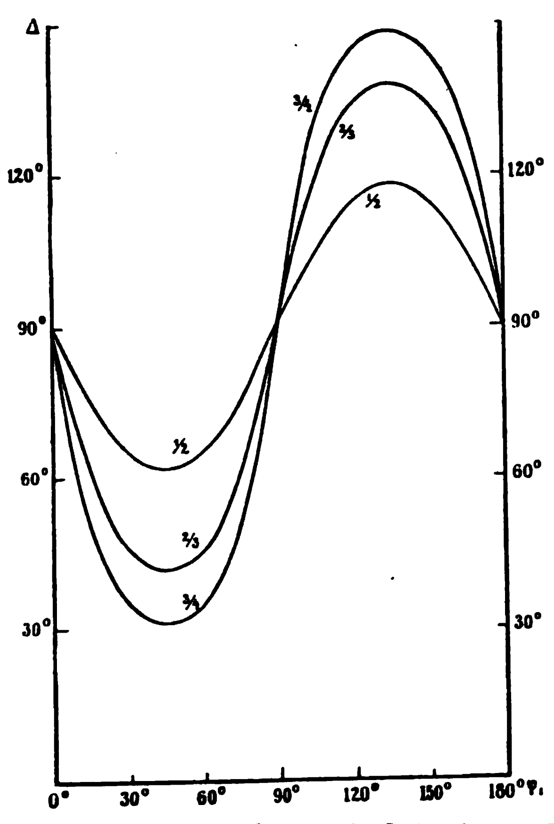


Fig. 2. Phasendifferenzen an der Austrittsfläche einer $\lambda/4$-Platte.

d. h. der Wert von $\varDelta$ schwankt um den Wert $\varDelta = \pi/2$ gleich viel nach oben und unten und zwar um so stärker, je größer der Reflexionsfaktor ist. Fig. 2 stellt den Verlauf von $\varDelta$ in diesem Falle für verschiedene Reflexionsfaktoren dar ($\varrho = 1/2, 2/3, 3/4$).

Für $\delta \gtrless \pi/2$ schwankt der Wert von $\varDelta$ zwischen den für $2\sigma = 0$ und $2\sigma = \pi$ auftretenden Extremwerten $\varDelta_m$:

$$\operatorname{ctg} \varDelta_m = \frac{1+\varrho^4}{1-\varrho^4} \operatorname{ctg} \delta \mp \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^4} \frac{1}{\sin \delta}.$$

Ferner wird $\varDelta = \delta$ für

$$\cos 2\sigma = \varrho^2 \cos \delta.$$

Ist $0 < \delta < \pi/2$, so fallen die Stellen, für die $\varDelta = \delta$ wird, in die größeren Intervalle zwischen den Streifensystemen ($\mathfrak{P}_1$) und ($\mathfrak{P}_2$) und rücken mit zunehmendem ϱ näher zusammen. Da aber der Mittelwert von $\varDelta$ konstant bleibt, so ergibt sich, daß mit wachsendem Reflexionsfaktor die in den kleineren Intervallen der beiden Streifensysteme liegenden Maxima immer schmäler und gleichzeitig steiler werden, während die Minima verhältnismäßig flach bleiben. Für verschiedene Reflexionsfaktoren ($\varrho = 1/2, 2/3, 3/4$) veranschaulicht im Falle $\delta = \pi/4$ Fig. 3 den Verlauf der Kurven $\varDelta$. Für $\pi/2 < \delta < \pi$ ergibt sich daher sehr leicht der Verlauf der ent-

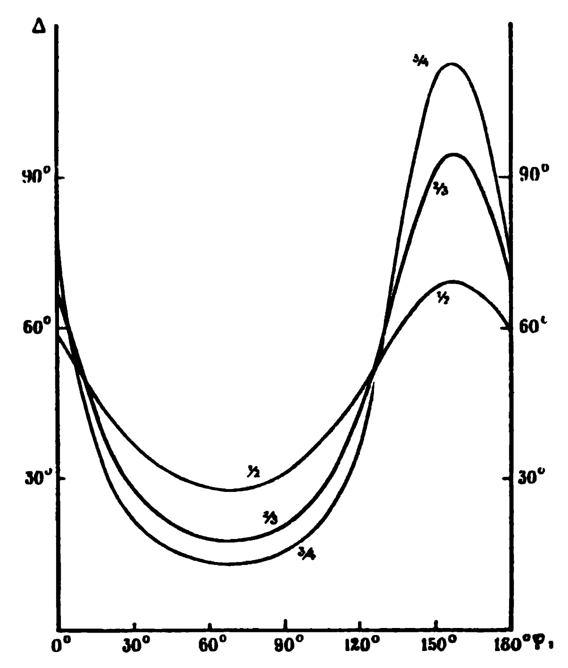


Fig. 3. Phasendifferenzen an der Austrittsfläche einer $\lambda/8$-Platte.

sprechenden Kurvenschar: Bei großem Reflexionsfaktor liegen in den engen Intervallen der beiden Streifensysteme scharf ausgeprägte Minima.

Experimentell kann man diese periodische Schwankung des Gangunterschiedes in folgender Weise demonstrieren: Man lasse geradlinig polarisiertes Licht auf den Spalt des Spektroskops fallen und bringe einen Quarzkeil in Diagonalstellung so vor den Spalt, daß die Keilkante senkrecht zur Spaltöffnung verläuft. Betrachtet man alsdann das Spektrum durch ein gegen den Polarisator gekreuztes Nicolsches Prisma, so erblickt man dunkle ganz schwach geneigt durch das Spektrum verlaufende Streifen, den Stellen des Keils entsprechend, für welche der Gangunterschied ein Vielfaches der betreffenden Wellenlänge ist. Bringt man nun eine halbversilberte Glimmerplatte von ca. $^1/_4\,\lambda_{Na}$ Gangunterschied vor den Spalt in Additions- oder Subtraktionslage zum Quarzkeil, so erscheinen die von diesem herrührenden Streifen nach beiden Seiten hin zipfelförmig deformiert.

Fig. 4, 5 sind gezeichnet nach Photographien dieser an Platten von ca. 90° und 120° Phasenunterschied der beiden Komponenten beobachteten Erscheinung.

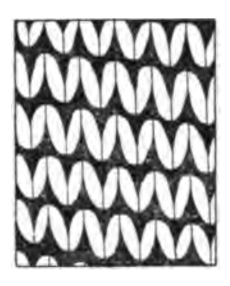


Fig. 4. Halbversilberte $\lambda/4$-Glimmerplatte in Additionslage zu einem Quarzkeil zwischen gekreuzten Nicols. Diagonalstellung.



Fig. 5. Desgl. Gangunterschied der Glimmerplatte ca. $\lambda/3$.

III. Die Intensität der austretenden Wellen.

Die Interferenzerscheinungen zwischen gekreuzten Nicols lassen sich allgemein behandeln mit Hülfe der Beziehungen (6) für die Phasendifferenz Δ und der Relation (2) für die Amplitude A der einen, sowie der entsprechenden für die Amplitude B der anderen Welle. Danach würde sich für die Helligkeit des aus dem Analysator austretenden Lichtes ergeben:

$$2\,J = A_1^2 + B_1^2 - 2\,A_1 B_1 \cos\Delta \tag{8}$$

worin A_1 und B_1 die Komponenten von A und B nach der Polarisationsrichtung der aus dem Analysator austretenden Welle bedeuten.

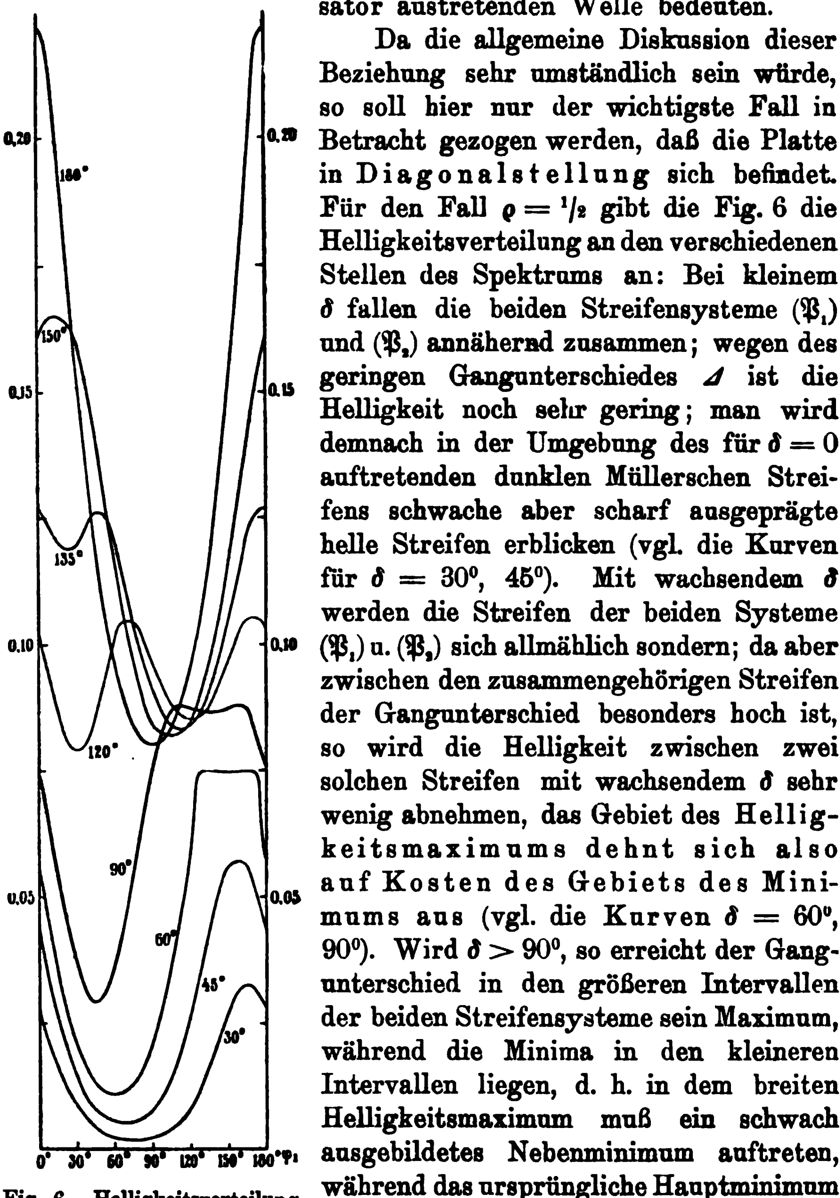


Fig. 6. Helligkeitsverteilung im Spektrum.

Da die allgemeine Diskussion dieser Beziehung sehr umständlich sein würde, so soll hier nur der wichtigste Fall in Betracht gezogen werden, daß die Platte in Diagonalstellung sich befindet. Für den Fall $\varrho = 1/2$ gibt die Fig. 6 die Helligkeitsverteilung an den verschiedenen Stellen des Spektrums an: Bei kleinem δ fallen die beiden Streifensysteme ($\mathfrak{P}_1$) und ($\mathfrak{P}_2$) annähernd zusammen; wegen des geringen Gangunterschiedes Δ ist die Helligkeit noch sehr gering; man wird demnach in der Umgebung des für $\delta = 0$ auftretenden dunklen Müllerschen Streifens schwache aber scharf ausgeprägte helle Streifen erblicken (vgl. die Kurven für δ = 30°, 45°). Mit wachsendem δ werden die Streifen der beiden Systeme ($\mathfrak{P}_1$) u. ($\mathfrak{P}_2$) sich allmählich sondern; da aber zwischen den zusammengehörigen Streifen der Gangunterschied besonders hoch ist, so wird die Helligkeit zwischen zwei solchen Streifen mit wachsendem δ sehr wenig abnehmen, das Gebiet des Helligkeitsmaximums dehnt sich also auf Kosten des Gebiets des Minimums aus (vgl. die Kurven δ = 60°, 90°). Wird $\delta > 90°$, so erreicht der Gangunterschied in den größeren Intervallen der beiden Streifensysteme sein Maximum, während die Minima in den kleineren Intervallen liegen, d. h. in dem breiten Helligkeitsmaximum muß ein schwach ausgebildetes Nebenminimum auftreten, während das ursprüngliche Hauptminimum an Intensität zunimmt. Es muß also einen Wert δ zwischen 90° und 180° geben, bei dem die beiden Minima gleich stark sind (in der Fig. 6 bei δ = ca. 120°). Von hier an nimmt dann mit wachsendem

δ das zweite Minimum an Intensität ab, während das ursprüngliche zunimmt an Intensität, um schließlich in dem Maximum zu verschwinden ($\delta = 135^0$, 150^0). Für $\delta = 180^0$ fallen die beiden Streifensysteme wieder zusammen, und da der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt, sind die Maxima und Minima scharf ausgeprägt.

Bei parallelen Nicols wird in Diagonalstellung der Platte:

$$(9) \quad 2J = A_1^2 + B_1^2 - 2A_1 B_1 \cos(\pi - \Delta)$$

und es ergibt sich aus (6a), daß die Kurven Fig. 6 ebenfalls die Helligkeitsverteilung im Spektrum angeben, wenn man dabei δ durch $\pi - \delta$ ersetzt.

Die Fig. 7, 8 geben diese Interferenzerscheinungen wieder, wie sie an einer stark versilberten Glimmerplatte zwischen gekreuzten und parallelen Nicols beobachtet wurden. Fig. 7 zeigt, wie in dem ursprünglichen Helligkeitsmaximum das Nebenminimum allmählich sich bemerkbar macht, wenn die Phasendifferenz von 180^0 abnimmt, während Fig. 8 an derselben Platte die für kleine Gangunterschiede charakteristische Breite der Minima veranschaulicht. Die erste Figur entspricht etwa den Kurven $\delta = 180^0 - 120^0$, die zweite den Kurven $\delta = 0^0 - 60^0$ der Fig. 6. — Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun der Zusammenhang der beiden Streifensysteme ($\mathfrak{P}_1$), ($\mathfrak{P}_2$) mit den zwischen gekreuzten Nicols in Diagonalstellung der Platte auftretenden Müllerschen Streifen.

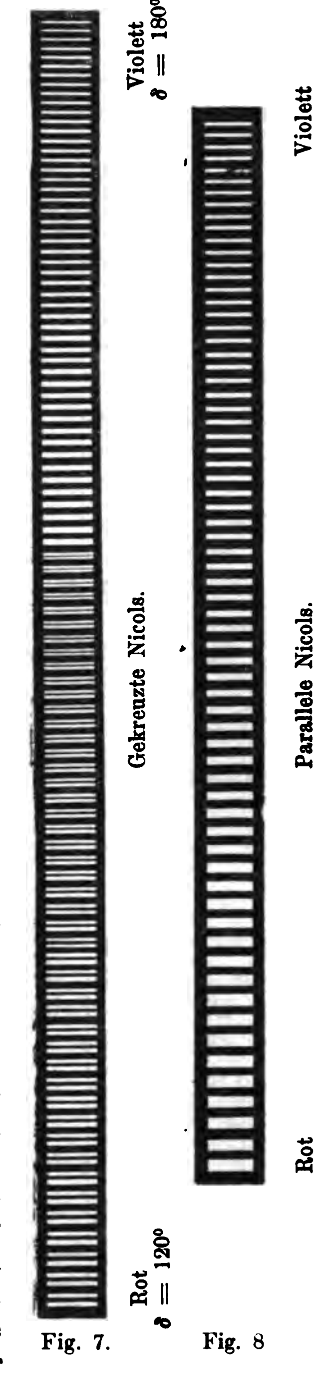


Fig. 7. Fig. 8

In den Fällen, wo das Auflösungsvermögen des zur Anwendung kommenden Spektroskops zu gering ist, um die feinen Streifen noch zu trennen, wird sich ihre Anwesenheit durch eine **Beeinflussung der Helligkeitsverteilung zwischen den Müllerschen Streifen** zu erkennen geben. Durch graphische Integration über die für den Fall $\varrho = 1/2$ erhaltenen Werte der

Intensitäten ergaben sich die Mittelwerte ($M(J)$) der Helligkeit als Funktion der Phasendifferenz δ. Das Resultat ist, daß für derartig starke innere Reflexionen das Ansteigen und Abfallen der Intensität zwischen den hellen und dunklen Müllerschen Streifen fast linear und viel schwächer ist, als im Falle fehlender innerer Reflexionen. Mit Rücksicht auf die vielfache Anwendung der Müllerschen Streifen zu Messungszwecken ergibt sich daraus, daß derartig starke innere Reflexionen zu vermeiden sind.

IV. Schwache innere Reflexionen.

Bei schwachen inneren Reflexionen, wie sie z. B. bei senkrechtem Durchgang des Lichtes durch planparallele Krystallplatten mit unversilberten Grenzflächen auftreten, kann man eine Vereinfachung der Rechnung dadurch herbeiführen, daß man wieder $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ setzt und überall nur die in ϱ quadratischen Glieder den höheren Potenzen gegenüber berücksichtigt. Nach (4) erhält man z. B. für Platten mit dem mittleren Brechungsindex $n = 1{,}5$ den Wert: $\varrho^2 = 0{,}04$.

Mit Benutzung dieser Annäherung ergibt sich nach (2):

$$\begin{aligned} A &= r_1 (1 + \varrho^2 \cos 2\varphi_1) \\ B &= r_2 (1 + \varrho^2 \cos 2\varphi_2) \end{aligned} \tag{10}$$

und nach (6):

$$\cos \Delta = \cos \delta \left(1 - 2\varrho^2 \frac{\sin^2 \delta}{\cos \delta} \cos 2\sigma\right) \tag{11}$$

Mit Hülfe dieser Relationen kann man nunmehr einen geschlossenen Ausdruck herleiten für die Intensität J des aus dem Analysator austretenden Lichtes.

Bildet die Polarisationsrichtung $\mathfrak{OP}$ des einfallenden Lichtes mit der Polarisationsrichtung $\mathfrak{OP}_1$ der schnelleren Welle im Krystall den Winkel α, so sind die Komponenten $\parallel \mathfrak{OP}_1$ und $\mathfrak{OP}_2 \perp \mathfrak{OP}_1$ der austretenden Welle gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\parallel \mathfrak{P}_1 \qquad a = r \cos \alpha (1 + \varrho^2 \cos 2\varphi_1) \\ &\parallel \mathfrak{P}_2 \qquad b = r \sin \alpha (1 + \varrho^2 \cos 2\varphi_2). \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Winkel $\mathfrak{P}_1\mathfrak{OA}$, den die Polarisationsrichtung $\mathfrak{OA}$ des aus dem Analysator austretenden Lichtes mit $\mathfrak{OP}_1$ bildet durch γ, so ist die Intensität J gegeben durch:

$$J = a^2 \cos^2\gamma + b^2 \sin^2\gamma + ab \sin 2\gamma \cos \Delta.$$

Setzt man darin die obigen Werte ein, so ergibt sich bis auf den konstanten vom Reflexionsvermögen abhängigen Faktor r^2:

$$\begin{aligned} J = {} & \cos^2\gamma \cos^2\alpha + \sin^2\gamma \sin^2\alpha + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos \varDelta \\ & + \varrho^2 (2 \cos^2\alpha \cos^2\gamma \cos 2\varphi_1 + 2 \sin^2\alpha \sin^2\gamma \cos 2\varphi^2 \\ & + \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos 2\sigma (\cos^2\delta - \sin^2\delta)), \end{aligned}$$

$$J = \cos^2(\gamma-\alpha) - \sin 2\gamma \sin 2\alpha \sin\frac{^2\delta}{2} + \varrho^2 \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\sigma \sin 2\alpha \sin 2\gamma (2\cos^2\delta - \cos\delta - 1) \\ + 2\cos 2\sigma \cos\delta \cos^2(\gamma-\alpha) \\ + 2 \sin 2\sigma \sin\delta \cos(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha) \end{array} \right\}$$

Setzt man hierin:

$$\cos^2(\gamma-\alpha) - \sin 2\gamma \sin 2\alpha \sin^2\frac{\delta}{2} = J_0$$

d. h. gleich der Intensität des aus dem Analysator austretenden Lichtes, wenn die inneren Reflexionen fehlten, so wird:

$$J = J_0 + 2\varrho^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\sigma \sin\delta \cos(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\alpha) \\ + \cos 2\sigma \cos\delta \cos^2(\gamma-\alpha) \\ - \cos 2\sigma \sin 2\alpha \sin 2\gamma \sin^2\frac{\delta}{2} (2\cos\delta + 1) \end{array} \right\}$$

Für gekreuzte Nicols wird:

$$\gamma = \alpha + \pi/2$$

und demnach

$$J^{+} = J_0^{+} + 2\varrho^2 \cos 2\sigma \sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\delta}{2}(1 + 2\cos\delta).$$

Daraus folgt: Der Einfluß der inneren Reflexionen ist unmerklich an denjenigen Stellen des Spektrums, für welche: $\delta = 0, 2\pi, \ldots$ oder $\delta = 120^0 \pm 2n\pi, 240^0 \pm 2n\pi$, d. h. an diesen Stellen verschwinden bei gekreuzten Nicols die Streifen im Spektrum, und zwar in jedem Azimut der Krystallplatte.

Für parallele Nicols wird:

$$\gamma = \alpha$$

und daher:

$$J'' = J_0'' + 2\varrho^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\sigma \sin\delta \cos 2\alpha \\ + \cos 2\sigma \cos\delta \\ - \cos 2\sigma \sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\delta}{2}(2\cos\delta + 1) \end{array} \right\}$$

Die Intensität wird unabhängig von $\sin 2\sigma$, wenn

$$\alpha = 45^\circ, \text{ oder } \delta = 0 \text{ oder } 2\pi \ldots \text{ ist.}$$

Im ersten Falle wird:

$$J'' = J''_0 + 2\varrho^2 \cos 2\sigma \cos^2 \frac{\delta}{2} (2 \cos \delta - 1)$$

und die Intensität ist von σ unabhängig, wenn

$$\delta = \pi,\ 3\pi, \quad \text{oder} \quad \delta = 60^0 \pm 2n\pi,\ 300^0 \pm 2n\pi,$$

d. h. in Diagonalstellung der Platte und bei parallelen Nicols werden an diesen Stellen im Spektrum die Streifen verschwinden.

Geht man daher bei Diagonalstellung der Platte von gekreuzten zu parallelen Nicols über, so erblickt man die Stellen, für welche die Streifen verschwinden, bei verschiedenen Farben. — Daß im polarisierten Licht das Streifensystem nicht bei $\delta = 90^0$, $270^0 \ldots$ verschwindet, rührt von den in II auseinander gesetzten Schwankungen des Gangunterschiedes her.

J'' hängt nur von $\sin 2\sigma$ ab, wenn

$$\sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2} (2 \cos \delta + 1) = \cos \delta, \text{ d. h.}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{\delta}{2} - 1}{1 + 2 \cos \delta}.$$

Andererseits war bei gekreuzten Nicols $J^{\perp} - J^{\perp}_0$ nur abhängig von $\cos 2\sigma$; es muß also möglich sein, für jedes δ ein α so zu wählen, daß beim Übergang von gekreuzten zu parallelen Nicols das Streifensystem um $2\sigma = \pi/2$ sich verschiebt.

Bildet man durch Integration über eine volle Periode von J den Mittelwert der Helligkeit, so fällt der Faktor von ϱ^2 fort, so daß bei derartig schwachen inneren Reflexionen die relative Helligkeitsverteilung ungeändert bleibt, falls die Dispersion des Spektroskops nicht ausreicht, die engen Streifen im Spektrum aufzulösen.

Bemerkungen über die bei der Spektralanalyse der Interferenzfarben gebräuchlichen Versuchsanordnungen.

Die bisher erwähnten Erscheinungen, besonders auch die letzthin behandelten, lassen sich an Glimmerplatten von geringer Dicke

mit Hülfe von Spektroskopen mäßig starken Auflösungsvermögens beobachten, da der Abstand der Streifen bei einer $\lambda/2$-Platte den Abstand der D-Linien noch übertrifft. Bei dicken Platten gestaltet sich die Beobachtung schwieriger, weil dazu ein größeres Auflösungsvermögen des Spektralapparats erforderlich ist, und weil ferner noch ein anderer Umstand hinzukommt, der bei der gebräuchlichen Versuchsanordnung störend wirkt.

Im allgemeinen besteht bei der spektralen Zerlegung der Interferenzfarben das Verfahren darin, daß man die Platte oder deren Bild unmittelbar in die Nähe des Spaltes bringt oder in einiger Entfernung davor oder dahinter.[1]) Dieses Verfahren bietet allerdings den Vorteil, das man noch sehr kleine Teile des Präparats zur spektralen Zerlegung benutzen kann und für sehr dünne Platten reicht eine solche Anordnung namentlich bei der Erzeugung Müllerscher Streifen aus.

Bringt man die Platte oder deren gleich großes Bild direkt vor den Spalt, so hat das sie durchsetzende Lichtbündel bei voller Ausnutzung des Kollimators eine Öffnung 2α, die gleich der Apertur desselben ist. — Für das zur photograpischen Aufnahme der Fig. 4, 5 benutzte Instrument ist etwa $2\alpha = 6^1/_2{}^0$. — Wenn die Platte genau senkrecht zur Achse des Kollimator angebracht ist, so wird für die im Fernrohr beobachtete Erscheinung an jeder Stelle des Spektrums der mittlere Teil desjenigen Interferenzbildes in Betracht kommen, das man an dünnen Glimmerplatten im konvergenten monochromatischen Lichte beobachtet.[2]) Da dieses angenähert aus konzentrischen hellen und dunklen Kreisen besteht, entsprechend den Neigungswinkeln, für welche der Gangunterschied der interferierenden Wellen ein gerades oder ungerades Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt, so wird die Interferenzerscheinung um so undeutlicher werden, je größer die Differenz der Phasenunterschiede für die Zentralstrahlen und für die Randstrahlen ist. Wird jene Differenz gleich π, so können die Streifen im Spektrum trotz hinreichend großen Auflösungsvermögens nicht mehr sichtbar sein.

Beträgt für eine schief auffallende Welle der Einfallwinkel α, der Brechungswinkel α', so wird für isotrope Medien die Phasendifferenz der zweimal reflektierten Welle gegen die Hauptwelle:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2l\frac{n}{\cos\alpha} + 2l\sin\alpha\tan\alpha'\right),$$

1) vgl. Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. (9) 2. 1068. 1897.

2) Lord Rayleigh a. a. O.

und solange α hinreichend klein ist:

$$\Phi = 2\varphi + 2\pi\alpha^2 \frac{3l}{n\lambda}, \tag{12}$$

wenn 2φ die Phasendifferenz jener beiden Wellen bei senkrechtem Einfall bedeutet.

Die Schärfe der Interferenzstreifen hängt nun ab von dem Unterschied

$$2\pi\alpha^2 \frac{3l}{n\lambda}$$

der Phasendifferenzen in der Mitte und am Rande des Gesichtsfeldes mit dem Öffnungswinkel 2α. Da dieser Unterschied bei normaler Dispersion der zur Anwendung kommenden Platten sich wenig ändert mit der Wellenlänge, so ergibt sich:

Die Schärfe der Interferenzstreifen ist bei normaler Dispersion der zur Anwendung kommenden Präparate von der Wellenlänge fast unabhängig.

Es handelt sich nun noch um die Frage, in welcher Weise die Interferenzerscheinung von der Apertur des die Platte durchsetzenden Strahlenbüschels abhängt. Bezeichnet J' die Intensität des in einer bestimmten Richtung durch die Platte hindurchgehenden Lichtes, so ist die gesamte Helligkeit des Lichtes, das in einem Kegel von der Öffnung 2α enthalten ist:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} J' \alpha \, d\alpha \, d\varphi.$$

Nun ist nach (2):

$$J' = \frac{r^2}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos \Phi}.$$

oder nach (12):

$$= \frac{r^2}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\varrho^2 \sin 2\varphi}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi} 2\pi \frac{l}{\lambda n} \alpha^2}.$$

Bezeichnet man mit

$$J_0 = \frac{r^2}{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi}$$

die Intensität des bei senkrechtem Einfall durch die Platte hindurchgehenden Lichtes, so wird für kleine Aperturen:

$$J' = J_0 \left(1 - \frac{J_0}{r^2} 2\varrho^2 \sin 2\varphi \, 2\pi \frac{l}{\lambda n} 3\alpha^2\right).$$

Demnach ergibt sich:

$$J = \pi J_0 \alpha^2 [1 - \frac{J_0}{r^2} \varrho^2 \sin 2\varphi \frac{6\pi l}{\lambda n} \cdot \alpha^2].$$

In den Gebieten von $2\varphi = 0$ bis π wird also die Kurve des Intensitätsabfalls mit wachsender Kollimatoröffnung etwas heruntergedrückt, während für $\pi < \varphi < 2\pi$ der Intensitätsanstieg verstärkt wird, d. h. der für senkrechten Eintritt symmetrische Verlauf der Intensitätskurven in dem Gebiete $0 < \varphi < 2\pi$ wird unsymmetrisch, so daß die Streifen im Spektrum nach kleineren Werten φ d. h. bei normaler Dispersion nach dem roten Ende des Spektrums verschoben erscheinen.

Ist der Unterschied der Phasendifferenzen der Hauptwelle und der ersten Teilwelle für die mittleren und für die Randstrahlen groß, so gelten die vorstehenden Betrachtungen nicht mehr in aller Strenge. Daß in diesem Falle die Streifen schließlich unsichtbar werden, ist schon auf S. 337 nachgewiesen. Beträgt z. B. die Apertur des Kollimators 3°, so wird für eine Platte vom Brechungsindex 1,5 und von der Dicke 0,01 mm $2(\Phi - \varphi) = 36°$; danach wird eine Glimmerplatte von $1\lambda_{Na}$ Gangunterschied, wenn man sie direkt vor dem Spalt anbringt, überhaupt keine Streifen mehr liefern können, auch bei hinreichend starkem Auflösungsvermögen des Spektralapparats.

Um in einem solchen Falle die Interferenzstreifen sichtbar zu machen, muß man die Apertur des die Platte durchsetzenden Strahlenbüschels verkleinern. Man erreicht dies dadurch, daß man ein verkleinertes Bild der Platte auf dem Spalt entwirft, oder dadurch, daß man sie in den telezentrischen Strahlengang zwischen zwei Fernrohrobjektiven anbringt, eine Kombination, die eine Abbildung der in der vorderen Brennebene der ersten Linse befindlichen Lichtquelle auf den in der hinteren Brennebene des zweiten Linsensystems befindlichen Spalt bewirkt. Die Apertur des die Platte durchsetzenden Strahlenbüschels ist hierbei bestimmt durch das Verhältnis der Spaltbreite zur Brennweite des zweiten Objektivs und daher im allgemeinen sehr gering. Allerdings ist bei dieser Beobachtungsmethode erforderlich, daß die Präparate genügende Größe und überall genau gleiche Dicke haben.

Es läßt sich daher folgende Regel aufstellen: Die Beobachtung der Interferenzstreifen im Spektrum bei nicht sehr dünnen aber hinreichend großen und überall genau gleich dicken Platten geschieht in

der zuletzt angegebenen Weise, während sehr dünne und kleine Präparate, deren Dicke nicht überall gleich ist, am zweckmäßigsten direkt vor den Spalt des Kollimators mit möglichst kleiner Apertur gebracht werden.

Die im vorstehenden ausgesprochenen Sätze lassen sich mit geringen Änderungen auf die bei der spektralen Zerlegung der Interferenzfarben an Krystalplatten benutzten Versuchsanordnungen übertragen.

Tabelle zu Seite 328.

Die Schwankungen $\Delta - \delta$ der Phasendifferenz Δ an Glimmerspaltungsblättchen ($n_1 = 1{,}5941$, $n_2 = 1{,}5997$) mit Berücksichtigung der inneren Reflexionen.

	$\delta = 0^0$	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0
$\varphi_1 = 0^0$	± 0	+ 1°35'51"	+ 2°42'37"	+ 3° 2'45"	+ 2°34'12"	+ 1°27'25"	± 0
10	+ 59"	+ 1 20 8	+ 1 56 47	+ 1 43 48	+ 48 4	— 34 41	— 2° 4'26"
20	+ 1'48	+ 54 12	+ 57 37	+ 14 42	— 1 1 9	— 2 30 54	— 3 53 39
30	+ 2 21	+ 22 29	— 6 4	— 1 12 51	— 2 40 16	— 4 7 41	— 5 14 28
40	+ 2 35	— 10 24	— 1 6 8	— 2 28 53	— 3 58 38	— 5 14 29	— 5 57 24
50	+ 2 30	— 40 25	— 1 55 26	— 3 26 1	— 4 48 46	— 5 44 30	— 5 57 29
60	+ 2 7	— 1 4 40	— 2 32 5	— 3 59 30	— 5 6 17	— 6 34 50	— 5 14 42
70	+ 1 32	— 1 21 13	— 2 50 58	— 4 6 49	— 4 49 44	— 4 46 19	— 3 53 55
80	+ 48	— 1 28 57	— 2 51 42	— 3 47 26	— 4 0 25	— 3 23 46	— 2 4 37
90	± 0	— 1 27 25	— 2 34 12	— 3 2 45	— 2 42 37	— 1 35 51	∓ 0
100	— 48	— 1 16 39	— 1 59 34	— 1 56 9	— 1 3 45	+ 25 15	+ 2 4 37
110	— 1 32	— 57 16	— 1 10 15	— 33 26	+ 45 33	+ 2 24 55	+ 3 53 55
120	— 2 7	— 30 40	— 10 32	+ 56 14	+ 2 32 05	+ 4 7 56	+ 5 14 42
130	— 2 30	+ 55	+ 53 19	+ 2 22 19	+ 4 1 41	+ 5 20 50	+ 5 57 29
140	— 2 35	+ 34 4	+ 1 53 13	+ 3 32 35	+ 5 1 35	+ 5 53 59	+ 5 57 24
150	— 2 21	+ 1 4 25	+ 2 40 16	+ 4 16 7	+ 5 22 53	+ 5 43 1	+ 5 14 28
160	— 1 48	+ 1 27 12	+ 3 6 34	+ 4 25 43	+ 5 2 22	+ 4 49 23	+ 3 53 39
170	— 59	+ 1 38 23	+ 3 7 23	+ 3 59 47	+ 4 3 12	+ 3 20 17	+ 2 4 26
180	∓ 0	+ 1 35 51	+ 2 42 37	+ 3 2 45	+ 2 34 12	+ 1 27 25	± 0

Göttingen, Mineralogisches Institut, Ostern 1907.

Schwingungen ungleichförmig gespannter Membranen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni 1907.

Um für gewisse im hiesigen physikalischen Institut in Ausführung begriffene Beobachtungeu theoretische Fingerzeige zu geben, habe ich einige Fälle der Schwingungen ungleichförmig gespannter Membranen rechnerisch verfolgt und gebe im Nachstehenden die erhaltenen Resultate. Es handelt sich dabei insbesondere um solche Fälle ungleichförmiger Spannung, die sich in genügender Weise, den theoretischen Voraussetzungen entsprechend, realisieren lassen. Der beste Weg zu dergleichen scheint mir allgemein der zu sein, zunächst eine gleichförmige Spannung herzustellen, deren faktisches Vorhandensein sich mit Hülfe der Klangfiguren nachweisen läßt, und diese Spannung dann in geeigneter und genau regulierbarer Weise zu verändern.

Theoretisch am einfachsten sind gewisse Fälle von Ringmembranen, die von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt sind. Man geht, um solche mit zunächst gleichen Spannungen zu erhalten, passend aus von gleichförmig gespannten Membranen in voller Kreisform. Hält man bei einer solchen einen zur äußern Begrenzung konzentrischen innern Ring der Membran fest, z. B., indem man eine genügend schwere Kreisscheibe auf die Membran konzentrisch auf- (oder unter-) kittet, so erhält man eine gleichmäßig gespannte Ringmembran.

Schneidet man dagegen aus der gleichförmig gespanuten Kreisflächenmembran (etwa durch einen Ausschlag) ein konzentrisches kreisförmiges Loch aus, so entsteht eine ungleich gespannte Ringmembran. Allerdings besitzt eine solche mit innerlich freiem

Rande singuläre Eigenschaften[1]), wegen deren sie eine spezielle Behandlung verlangt; wenn man ihr aber durch das eben erörterte Hilfsmittel eine innere Begrenzung gibt, so erhält man eine gewöhnliche Ringmembran von in bekannter und besonders einfacher Weise variierender Spannung.

Einen andern Fall gewinnt man direkt aus der gleichförmig gespannten Kreisringmembran, wenn man die innere Begrenzung (vermittelst der aufgekitteten Scheibe) um einen kleinen Winkel dreht. Auch die so resultierenden Spannungen lassen sich leicht berechnen.

Bei diesen Anordnungen besitzt die Membran auch im ungleichförmig gespannten Zustand streng die Begrenzung zweier konzentrischer Kreise. Man darf indessen auch solche Fälle, in denen zur Änderung der Spannung die Grenzkurven deformiert oder relativ zu einander verschoben sind, den obigen analog behandeln, wenn nur, wie das ja bei den gewöhnlichen elastischen Gleichungen vorausgesetzt ist, die Deformationen Größen erster Ordnung, die Verrückungen also klein sind. Dabei können in Folge der Zahlwerte der Elastizitätskonstanten den sehr kleinen Verrückungen doch merkliche Spannungsänderungen entsprechen.

Zwei Fälle kommen hier insbesondere als der Beobachtung zugänglich in Betracht. Einmal kann die innere Begrenzung der ursprünglich gleichförmig gespannten Ringmembran geradlinig um eine kleine Strecke verschoben werden, wodurch also in der einen Richtung die Spannungen kleinere, in der entgegengesetzten größere Werte annehmen. Sodann kann die Begrenzung einer vollen, ursprünglich gleichförmig gespannten Kreismembran (die durch einen elastischen Ring hergestellt sein mag) durch äußere Drucke in ihrer Ebene deformiert werden, wobei der Fall der Umgestaltung in eine Ellipse besonders naheliegend ist.

So speziell und einfach aber auch diese Probleme gebildet sind, immer noch scheint ihre strenge Durchführung auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen. Ich habe mich demgemäß im Folgenden noch weiter beschränkt und die Annahme eingeführt, daß die Spannung der Membran sich nur wenig von der gleichförmigen unterscheidet, derart, daß die Abweichungen von der gleichförmigen Spannung als Glieder erster Ordnung betrachtet werden dürfen.

Bei dieser Beschränkung lassen sich viel allgemeinere Probleme als die obengeschilderten ein erhebliches Stück fördern. Es gelingt

1) W. Voigt, Gött. Nachrichten 1907, p. 171. S. dazu übrigens den Nachtrag obiger Abhandlung.

nämlich ohne Schwierigkeit Fälle ungleichförmig gespannter Membranen zu konstruieren, die sich durch geeignete Substitutionen auf das Schwingungsproblem einer gleichförmig gespannten Membran reduzieren lassen. Die hier vorliegende Aufgabe bietet genügend Interesse, um zunächst in voller Allgemeinheit in Angriff genommen zu werden.

1. Die Grundformeln für die Spannungen in einer Membran lauten

$$1)\qquad -A_x = \gamma a_x + \gamma' b_y, \quad -B_y = \gamma' a_x + \gamma b_y, \quad -A_y = -B_x = \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma') a_y,$$

wobei a_x, b_y, $a_y = b_x$ die Deformationsgrößen für die Mittelfläche, γ und γ' aber Elastizitätskonstanten der Membran bezeichnen. Für den Fall des Gleichgewichtes ohne Einwirkung äußerer Kräfte muß in jedem Punkt der Membran gelten

$$2)\qquad 0 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y},$$

dazu in Randpunkten

$$3)\qquad \overline{A}_n + \overline{A} = 0, \quad \overline{B}_n + \overline{B} = 0,$$

wobei n die äußere Normale und $\overline{A}$, $\overline{B}$ spannende äußere Kräfte bezeichnen.

Die aus den vorstehenden Bedingungen folgenden Werte $A_x, \ldots$ sind nun in die Hauptgleichung für die transversalen Schwingungen einzusetzen, welche lauten

$$4)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial w}{\partial x} + A_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$$

Am festen Rande der Membran ist $w = 0$ vorgeschrieben.

Für eine Membran mit gleichförmiger Spannung wird

$$5)\qquad A_x = B_y = -P, \quad A_y = B_x = 0,$$

nimmt also die Gleichung 4) die Form an

$$6)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \Delta w.$$

Es bietet sich nun nach dem oben einleitend Gesagten die Aufgabe, in dem Fall, daß $A_x \ldots$ sich nur wenig von den in 5) gegebenen Werten entfernen, die allgemeine Schwingungsgleichung 4) durch geeignete Substitutionen für x, y, w auf die Form 6) zu reduzieren.

Wir setzen demgemäß in 6)

$$7)\qquad x = \xi + \varphi, \quad y = \eta + \psi, \quad w = \omega(1 + \chi),$$

wobei φ, ψ, χ neben den ihnen additiv verbundenen Größen als von erster Ordnung gelten und demgemäß als Funktionen ebensowohl von x, y, als von ξ, η angesehen werden können. Bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung wird dann

$$8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}\left(1 + \chi - 2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right) \\ &\quad - \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \omega\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}\left(1 + \chi - 2\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\right) \\ &\quad - \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \omega\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\left(1 + \chi\right). \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung 6) ein, so kann man innerhalb der eingeführten Annäherung den in alle endlichen Glieder multiplizierten Faktor $(1 + \chi)$ herausheben und schreiben

$$9)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + P\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}\,2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}\,2\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\left(\varDelta\varphi - 2\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\left(\varDelta\psi - 2\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\right) + 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi\,\partial \eta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) - \omega\varDelta\chi\right] = P\varDelta w. \end{aligned}$$

Besteht in einer Membran neben einer gleichförmigen Spannung P noch eine ungleichförmige mit den Komponenten $A'_x, B'_y, A'_y = B'_x$, so gilt nach 4)

$$10)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A'_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y}B'_y + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial A'_x}{\partial x} + \frac{\partial A'_y}{\partial y}\right) \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial B'_x}{\partial x} + \frac{\partial B'_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,2A'_y = P\varDelta w. \end{aligned}$$

Die Form 9), in der wir nun wieder x, y an Stelle von ξ, η setzen, stimmt hiermit überein, wenn $\varDelta\chi = 0$ und

$$11)\qquad \begin{aligned} &A'_x = 2P\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B'_y = 2P\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad A'_y = B'_x = P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ &\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial A'_y}{\partial y} = P\left(\varDelta\varphi - 2\frac{\partial \chi}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial B'_x}{\partial x} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} = P\left(\varDelta\psi - 2\frac{\partial \chi}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Soll die Membran nur durch auf den Rand ausgeübte Wirkungen gespannt sein, was wir annehmen wollen, so müssen die $A'_s \ldots$ zugleich die Bedingungen 2) erfüllen.

2. Die Kombination der Bedingungen 11) mit 2) liefert, wenn wir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \Theta$$

setzen, bei Elimination der $A'_s, \ldots$

$$12)\quad \varDelta \varphi = -\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 2\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \varDelta \psi = -\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 2\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \varDelta \chi = 0.$$

Für Θ ergibt sich aus den ersten beiden Formeln der Wert

$$13)\qquad \Theta = -2\chi,$$

wobei die Integrationskonstante in χ einbezogen gedacht werden kann.

Setzt man weiter

$$14)\qquad \varphi = 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\right), \quad \psi = 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right),$$

so ergibt sich nach der Definition von Θ

$$15)\qquad \Theta = 2\varDelta\mu,$$

also wegen 13) auch

$$16)\qquad \varDelta\mu = -\chi.$$

Geht man mit diesen Werten in die ersten beiden Gleichungen 12), so erhält man weiter

$$17)\qquad \varDelta\frac{\partial \nu}{\partial y} = 2\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad -\varDelta\frac{\partial \nu}{\partial x} = 2\frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Zieht man also die zu χ konjugierte Funktion ϑ heran, für die

$$18)\qquad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

so erhält man, indem man wieder die Integrationskonstanten in ϑ enthalten denkt,

$$19)\qquad \varDelta\nu = 2\vartheta.$$

Hiernach kann man ohne alle Schwierigkeiten Fälle von Schwingungen ungleichförmig gespannter Membranen konstruieren, die sich durch die Substitution 7) auf gleichförmige Spannung reduzieren lassen. Man hat dazu nur eine beliebige Funktion

$$\chi + i\vartheta \text{ von } x + iy$$

zu nehmen, die sich in dem betrachteten Gebiet regulär verhält, mit ihrer Hülfe zwei Potentiale μ und ν zu berechnen, die den Gleichungen

$$\varDelta\mu = -\chi, \quad \varDelta\nu = +2\vartheta$$

genügen; dann sind

$$\varphi = 2\left(\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\nu}{\partial y}\right), \quad \psi = 2\left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial x}\right)$$

die mit χ zu kombinierenden Substitutionsfunktionen und

$$A_x' = 2P\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad B_y' = 2P\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad A_y' = B_x' = P\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

die ungleichförmigen Spannungen.

Es ist bemerkenswert, daß die Ausdrücke 1) für $A_x, \ldots$ keine neuen Bedingungen für die Funktionen für φ, ψ, χ liefern. Allgemein ergeben sie ja durch Elimination der in den Deformationsgrößen

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_y = b_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

steckenden Verrückungskomponenten eine Bedingung zwischen den Drucken; diese Bedingung ist hier aber identisch erfüllt.

Schreibt man nämlich die Formeln 1) in der Gestalt

$$20) \qquad \begin{gathered} -a_x = \delta A_x + \delta' B_y, \quad -b_y = \delta' A_x + \delta B_y, \\ -a_y = -b_x = 2(\delta - \delta')A_y \end{gathered}$$

(wobei die δ Elastizitätsmoduln sind), so liefert die genannte Elimination die Gleichung

$$\delta\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}\right) + \delta'\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}\right) = 2(\delta - \delta')\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y},$$

und dies führt nach den ersten drei Formeln 11) auf

$$\frac{\partial}{\partial x}\varDelta\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\varDelta\psi = \varDelta\Theta = 0,$$

was bereits in 12) und 13) enthalten ist.

Wenn nun auch die Funktionen φ, ψ, χ keinen weiteren analytischen Bedingungen unterliegen, als den oben zusammengestellten, so entsteht doch unter Umständen eine unbequeme Einschränkung

der Tragweite der Lösung durch die physikalische Forderung, daß sowohl die Funktionen φ, ψ, χ selbst, wie auch die mit Hülfe von 1) oder 20) aus ihnen folgenden Verrückungskomponenten u, v e i n w e r t i g e Funktionen der Koordinaten sein müssen. Hieraus fließt u. a. bei einem der oben genannten Kreisringprobleme eine wesentliche Schwierigkeit.

3. Ein äußerst bequemes Hülfsmittel zur Konstruktion von Fällen ungleichförmiger Spannungen ist bekanntlich die sog. Airysche Funktion F, durch die man in Übereinstimmung mit 1) und 2) die Spannungen $A'_x, \ldots$ ausdrücken kann gemäß den Formeln

$$21)\quad -A'_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad -B'_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad -A'_y = -B'_x = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},$$

wobei

$$22)\qquad \varDelta\varDelta F = 0$$

sein muß.

Beiläufig sei bemerkt, daß es hiernach zu $\varDelta F = \Phi$ eine konjugierte Funktion Ψ gibt, für die

$$23)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Partikuläre Lösungen F, die schon $\varDelta F$ zu Null machen, geben für Ψ Konstante.

Geht man von einer gegebenen Funktion F aus, so erhält man die Werte φ, ψ, χ auf folgende Weise. Es gilt direkt nach 11), 13) und 21)

$$24)\qquad \Phi = \varDelta F = 4P\chi,$$

wodurch χ bestimmt ist. Zugleich ist nach 16)

$$25)\qquad -\varDelta F = 4P\varDelta\mu,$$

also

$$26)\qquad P\mu = \tfrac{1}{4}(F^0 - F),$$

wobei F_0 eine beliebige Funktion von x und y ist, die $\varDelta F_0 = 0$ macht.

Ähnlich gilt nach 18) und 23)

$$27)\qquad \Psi = 4P\vartheta,$$

also wegen 19) auch

$$28)\qquad \Psi = 2P\varDelta\nu,$$

was den Formeln 24) und 25) parallel geht, aber keine der Beziehung 26) analoge Beziehung liefert.

Dagegen berechnen sich leicht φ und ψ direkt. Wir haben nach 11) und 21)

$$2P\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - \Psi, \quad 2P\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \Phi,$$
$$2P\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \Phi, \quad 2P\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \Psi,$$

worin $\Phi = \Delta F$ und Ψ ersichtlich die zu Φ konjugierte Funktion gemäß der Formel 23) ist.

Hieraus folgt ohne Weiteres bei Einbeziehung zweier Integrationskonstanten in die Integrale

$$29) \quad \begin{aligned} 2P\psi &= \frac{\partial F}{\partial y} - \int(\Psi dx + \Phi dy) = \frac{\partial F}{\partial y} - \Omega, \\ 2P\varphi &= \frac{\partial F}{\partial x} - \int(\Phi dx - \Psi dy) = \frac{\partial F}{\partial x} - \Pi, \end{aligned}$$

wobei Ω und Π Abkürzungen sind. Da

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \Phi, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial y} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -\Psi,$$

so sind auch Π und Ω konjugiert.

Es lassen sich also alle drei Substitutionsfunktionen φ, ψ, χ aus der Airyschen Funktion F einfach gewinnen. Unter Umständen wird man übrigens, statt die Gleichungen 29) zu benutzen, vorteilhafter so verfahren, daß man nach Berechnung von χ gemäß 24) das dazu konjugierte ϑ bildet, nach 16) und 19) zugehörige μ und ν aufsucht, die dann nach 14) direkt φ und ψ ergeben. —

Bezüglich der Behandlung der Airyschen Funktion F ist daran zu erinnern, daß aus ihr die Druckkomponenten gemäß 21) zu berechnen sind und deren Werte, in 1) eingesetzt, Differentialgleichungen für die Komponenten u, v der Verrückungen liefern. Die Randbedingungen, die sich entweder auf u und v oder auf die Spannungen beziehen, bestimmen dann die Konstanten in u und v und somit auch in F. Die Funktionen φ, ψ, χ enthalten im allgemeinen drei verfügbare Konstanten mehr als F, die aber als rein additiv zumeist bedeutungslos für das uns vorliegende Problem sind.

Von den auf solchem Wege konstruierten Problemen sind natürlich diejenigen am wichtigsten, die sich bequem realisieren lassen, wo also die durch die Grenzbedingungen gelieferten Ver-

rückungen der Grenzlinie der Membran, (durch welche die Ungleichförmigkeit der Membranspannung bewirkt wird), technisch ausführbar sind.

Da eine ausführliche allgemeine Behandlung der Airyschen Funktion durch Herrn Timpe[1]) durchgeführt ist, so bietet es manche Vorteile, von einem Ansatz für diese, statt, wie S. 6 angenommen, von einem solchen für die Substitutionsfunktion χ auszugehen. Wir werden unten demgemäß verfahren.

4. Eine besondere Bemerkung erfordern schließlich noch die Knotenlinien der schwingenden ungleichförmig gespannten Membran, zu denen auch die festgehaltenen Randlinien gehören; dieselben sind natürlich mit den betreffenden Kurven in der entsprechenden gleichförmig gespannten Membran durch die Substitutionen 7) verbunden.

In Bezug hierauf mag daran erinnert werden, daß in diesen Beziehungen

$$x = \xi + \varphi, \quad y = \eta + \psi, \quad w = \omega(1+\chi)$$

einerseits die Variabeln x, y, w sich auf die gleichförmig, ξ, η, ω auf die ungleichförmig dilatierte Membran beziehen, andererseits die Funktionen φ, ψ, χ als erster Ordnung gelten, sodaß man die Formeln 7) ebensowohl schreiben kann

$$x = \xi + \varphi(\xi, \eta), \quad y = \eta + \psi(\xi, \eta), \quad w = \omega(\xi, \eta)(1+\chi(\xi, \eta)),$$

als auch

$$\xi = x - \varphi(x, y), \quad \eta = y - \psi(x, y), \quad \omega = w(x, y)(1-\chi(x, y)).$$

Wegen $w = \omega(1+\chi)$ verschwindet ω zugleich mit w. Bezieht man dann $w(x, y)$ auf die gleichförmig gespannte, $\omega(\xi, \eta)$ auf die ungleichförmig gespannte Membran, und sind die Knotenlinien auf der ersteren durch Gleichungen von der Form $f(x, y) = 0$ gegeben, so sind die entsprechenden Linien auf der letzteren durch

$$f(\xi + \varphi(\xi, \eta),\ \eta + \psi(\zeta, \eta)) = 0 \tag{28}$$

bestimmt.

Die gleichförmig gespannte Membran, auf deren Schwingungen das Problem für die ungleichförmig gespannte reduziert wird, hat somit im allgemeinen abweichende Begrenzung und zwar sind diese Abweichungen als von der Ordnung der Spannungsänderungen in der Membran zumeist nicht zu vernachlässigen. In gewissen interessanten Fällen führen indessen die Substitutionen 7) auf Begrenz-

---

1) A. Timpe, Probleme der Spannungsverteilung etc. Göttingen Diss. 1905.

ungen von der gleichen Form, nur gelegentlich veränderten Dimensionen.

Was die Schwingungsperiode der ungleichförmig gespannten Membran angeht, so ist sie derjenigen der gleichförmig gespannten Membran gleich, mit der sie durch die Substitutionen 7) in Beziehung gebracht ist; sie weicht aber natürlich im allgemeinen ab von derjenigen einer gleichförmig mit P gespannten Membran von mit ihr gleicher Begrenzung.

5. Im Anschluß an vorstehendes sei noch ein möglichst einfaches Beispiel in rechtwinklichen Koordinaten behandelt. Wir setzen

$$F = ax^4 + bx^2y^2 + cy^4, \tag{30}$$

wo dann nach 22)

$$3(a+c)+b = 0 \text{ oder } 6a = e-b, \quad 6c = -(e+b)$$

sein muß, unter e eine neue Bezeichnung verstanden. Nach 29) ist dann

$$\begin{gathered} -A_x = 2(bx^2-(e+b)y^2), \quad -B_y = 2((e-b)x^2+by^2) \\ -A_y = -B_x = 4bxy. \end{gathered} \tag{31}$$

Hieraus folgt nach 23)

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta F = \Phi = 2e(x^2-y^2), \quad \Psi = 4exy, \\ \text{also nach 29)} \\ \Pi = 2e(\frac{1}{3}x^3 - xy^2), \quad \Omega = 2e(x^2y - \frac{1}{3}y^3). \end{array}\right. \tag{32}$$

Weiter ergibt sich nach 24) und 29)

$$\begin{aligned} P\chi &= 2e(x^2-y^2), \\ P\varphi &= +(e+b)xy^2 + \tfrac{1}{3}bx^3, \\ P\psi &= -(e-b)x^2y - \tfrac{1}{3}by^3. \end{aligned} \tag{33}$$

Zugleich findet sich

$$u = \alpha_1 x^3 + \beta_1 xy^2, \quad v = \alpha_2 x^2 y + \beta_2 y^3, \tag{34}$$

wobei

$$\begin{aligned} 2b &= 3\alpha_1\gamma + \alpha_2\gamma', \quad 2b = \beta_1\gamma' + 3\beta_2\gamma, \\ 2(e-b) &= 3\alpha_1\gamma' + \alpha_2\gamma, \quad -2(e+b) = \beta_1\gamma + 3\beta_2\gamma'. \end{aligned} \tag{35}$$

Die vier Konstanten α_1, β_1, α_2, β_2 unterliegen somit den Bedingungen

$$\begin{gathered} 3\alpha_1\gamma + \alpha_2\gamma' = \beta_1\gamma' + 3\beta_2\gamma, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -(\beta_1 + 3\beta_2), \end{gathered}$$

$$\delta = \varphi \cos \varkappa + \psi \sin \varkappa, \quad \zeta = \frac{1}{\varrho}(\psi \cos \varkappa - \varphi \sin \varkappa). \tag{44}$$

Zur Bestimmung von χ, δ, ζ folgt dann aus 24) und 27)

$$\begin{aligned} 4\,P\chi &= \Delta F, \\ 2\,P\delta &= \frac{\partial F}{\partial r} - (\Pi \cos p + \Omega \sin p), \\ 2\,P\zeta &= \frac{\partial F}{r^2 \partial p} + \frac{1}{r}(\Pi \sin p - \Omega \cos p). \end{aligned} \tag{45}$$

Π und Ω berechnen sich dabei meist am einfachsten nach den Definitionen in 29), indem man die zu $\Delta F = \Phi$ konjugierte Funktion Ψ bestimmt und mit ihrer Hülfe auch

$$\Pi = \int (\Phi dx - \Psi dy), \quad \Omega = \int (\Psi dx + \Phi dy).$$

Dabei sind die Polarkoordinaten mitunter nicht vorteilhaft.

Einen andern Weg geben die Formeln 14), 16), 19); nach diesen ist zu $\chi = \frac{1}{4}\Delta F$ die konjugierte Funktion ϑ zu suchen, mit deren Hülfe zwei Funktionen μ und ν gemäß den Gleichungen

$$\Delta\mu = -\chi, \quad \Delta\nu = +2\vartheta$$

zu berechnen sind. Dann ist

$$\delta = 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\partial \nu}{r \partial p}\right), \quad \zeta = \frac{2}{r}\left(\frac{\partial \mu}{r \partial p} - \frac{\partial \nu}{\partial r}\right). \tag{46}$$

Bezüglich der Knoten- und Begrenzungslinien der Membran ist einfach auf das S. 9 Gesagte zu verweisen.

Wir wollen nunmehr einige einfache und praktisch bedeutungsvolle Beispiele für die vorstehenden Formeln entwickeln.

7. Ringmembran mit ungleichförmiger radialer Spannung.

Wir setzen im Einklang mit 22)

$$F = c \ln r, \tag{47}$$

woraus folgt

$$-R'_r = c/r^2, \quad -S'_s = -c/r^2, \quad R'_s = 0. \tag{48}$$

Den Gleichungen 40) genügt man dann durch

$$\lambda = mr + n/r, \quad \sigma = 0, \tag{49}$$

wobei $n(\gamma - \gamma') = -c$. m und n werden durch die Grenzbedingungen bestimmt. Ist z. B. der Rand $r = \bar{r}$ frei, $r = r_0$ festgehalten, wie im Falle eines aus einer Kreisflächenmembran mit der Anfangs-

des Radius r und der Richtung der (in positivem Rotationssinne gerechneten) Normalen s dazu durch $\varLambda$ und $\varSigma$, so wird

$$\text{38)} \qquad \operatorname{div} K = \frac{1}{r}\frac{\partial r\varLambda}{\partial r} + \frac{\partial \varSigma}{\partial s};$$

außerdem erhält man leicht

$$\text{39)} \qquad \varLambda = R'_r \frac{\partial w}{\partial r} + S'_r \frac{\partial w}{\partial s}, \qquad \varSigma = R'_s \frac{\partial w}{\partial r} + S'_s \frac{\partial w}{\partial s},$$

wobei die $R'_r, \ldots$ in demselben Sinne als Spannungskomponenten zu verstehen sind, wie oben $A'_x, \ldots$ Ihre Werte drücken sich in den radialen und tangentialen Verschiebungen λ und σ folgendermaßen aus

$$\text{40)} \qquad \begin{aligned} -R'_r &= \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \gamma'\left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial s}\right), \\ -S'_s &= \gamma' \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \gamma\left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial s}\right), \\ -R'_s &= -S'_r = \tfrac{1}{2}(\gamma - \gamma')\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r}\right). \end{aligned}$$

Statt ∂s benutzt man passender den Ausdruck $r\partial p$, wo p das Winkelelement der Drehung von r bezeichnet.

Durch die Airy'sche Funktion F drücken sich die Spannungskomponenten aus, gemäß

$$\text{41)} \qquad \begin{aligned} -R'_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \\ -S'_s &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad +S'_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right). \end{aligned}$$

Hat man eine Funktion F in Einklang mit der Bedingung $\varDelta\varDelta F = 0$ gewählt und daraus die Spannungskomponenten $R'_r, \ldots$ berechnet, so ergeben sich nach 40) durch Integration die Verrückungskomponenten λ und σ, die dem gemachten Ansatz entsprechen. Ihre Komponenten sind durch die Randbedingungen zu bestimmen.

An Stelle der Transformationsformeln 7) führen wir bei Polarkoordinaten ein

$$\text{42)} \qquad r = \varrho + \delta, \quad p = \varkappa + \zeta, \quad w = \omega(1 - \chi);$$

vergleicht man die ersten beiden hiervon mit den ersten beiden in 7) unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\text{43)} \quad x = r\cos p, \quad y = r\sin p, \quad \xi = \varrho\cos\varkappa, \quad \eta = \varrho\sin\varkappa,$$

so ergibt sich leicht

44) $\quad \delta = \varphi \cos \varkappa + \psi \sin \varkappa, \quad \zeta = \frac{1}{\varrho}(\psi \cos \varkappa - \varphi \sin \varkappa).$

Zur Bestimmung von χ, δ, ζ folgt dann aus 24) und 27)

$$4 P\chi = \varDelta F,$$

45)
$$2 P\delta = \frac{\partial F}{\partial r} - (\Pi \cos p + \Omega \sin p),$$

$$2 P\zeta = \frac{\partial F}{r^2 \partial p} + \frac{1}{r}(\Pi \sin p - \Omega \cos p).$$

Π und Ω berechnen sich dabei meist am einfachsten nach den Definitionen in 29), indem man die zu $\varDelta F = \Phi$ konjugierte Funktion Ψ bestimmt und mit ihrer Hülfe auch

$$\Pi = \int(\Phi dx - \Psi dy), \quad \Omega = \int(\Psi dx + \Phi dy).$$

Dabei sind die Polarkoordinaten mitunter nicht vorteilhaft.

Einen andern Weg geben die Formeln 14), 16), 19); nach diesen ist zu $\chi = \frac{1}{4}\varDelta F$ die konjugierte Funktion ϑ zu suchen, mit deren Hülfe zwei Funktionen μ und ν gemäß den Gleichungen

$$\varDelta\mu = -\chi, \quad \varDelta\nu = +2\vartheta$$

zu berechnen sind. Dann ist

46)
$$\delta = 2\left(\frac{\partial\mu}{\partial r} + \frac{\partial\nu}{r\partial p}\right), \quad \zeta = \frac{2}{r}\left(\frac{\partial\mu}{r\partial p} - \frac{\partial\nu}{\partial r}\right).$$

Bezüglich der Knoten- und Begrenzungslinien der Membran ist einfach auf das S. 9 Gesagte zu verweisen.

Wir wollen nunmehr einige einfache und praktisch bedeutungsvolle Beispiele für die vorstehenden Formeln entwickeln.

7. Ringmembran mit ungleichförmiger radialer Spannung.

Wir setzen im Einklang mit 22)

47)
$$F = c \ln r,$$

woraus folgt

48)
$$-R'_r = c/r^2, \quad -S'_s = -c/r^2, \quad R'_s = 0.$$

Den Gleichungen 40) genügt man dann durch

49)
$$\lambda = mr + n/r, \quad \sigma = 0,$$

wobei $n(\gamma - \gamma') = -c$. m und n werden durch die Grenzbedingungen bestimmt. Ist z. B. der Rand $r = \bar{r}$ frei, $r = r_0$ festgehalten, wie im Falle eines aus einer Kreisflächenmembran mit der Anfangs-

spannung P herausgeschlagenen kleinen Loches, so ist

50) $$P = -\frac{c}{r^2} = \frac{n(\gamma-\gamma')}{r^2}, \quad m r_a + \frac{n}{r_a} = 0.$$

$\Delta F = \Phi$ ist hier Null, Ψ also konstant $= k$; daraus folgt $\Pi = -ky = -kr\sin p$, $\Omega = +kx = +kr\cos p$ und

$$2P\vartheta = -\frac{c}{r}, \quad 2P\zeta = -k, \quad \chi = 0.$$

k stellt somit nur eine Drehung der Membran dar und ist ohne Bedeutung für unser Problem.

Unsere Lösung ist somit

$$\chi = 0, \quad \vartheta = -\frac{c}{2Pr}, \quad \zeta = 0,$$

oder

51) $$w = \omega, \quad r = \varrho - \frac{c}{2P\varrho}, \quad p = \varkappa,$$

und das Problem der Schwingung der radial ungleichförmig gespannten Membran erhält eine große Einfachheit. Es sind durch 51) und 48) in Beziehung gesetzt eine gleichförmig gespannte Membran mit den Variabeln w, r, p und eine ungleichförmig gespannte mit den Variabeln $\omega, \varrho, \varkappa$; jedem Radius der einen entspricht der gleiche Radius der andern, jedem Kreis (r) der einen ein anderer Kreis (ϱ) der andern, die durch $r = \varrho - c/2P\varrho$ oder $\varrho = r + c/2Pr$ verknüpft sind. Es korrespondiert also eine Ringmembran mit der andern, radiale und zirkulare Knotenlinien entsprechen einander und bei dem gegebenen Zusammenhang zwischen den Radien der sie begrenzenden Kreise sind nicht nur die Schwingungsperioden, sondern auch die Schwingungsweiten w resp. ω die gleichen. Dagegen sind die Perioden der beiden Membranen bei gleichen Begrenzungen ($r_i = \varrho_i$, $r_a = \varrho_a$) verschieden.

8. Ringmembran mit ungleichförmiger Drillungsspannung.

Wir setzen im Einklang mit 22)

52) $$F = qp,$$

also

53) $$R_r = 0, \quad S_s = 0, \quad S_r = R_s = -\frac{q}{r^2}.$$

Hieraus folgt gemäß 40)

54) $$\lambda = 0, \quad \sigma = hr + k/r,$$

wobei $$q = -(\gamma - \gamma')k.$$

h und k bestimmen sich, wenn σ für die begrenzenden Kreise $r = r_i$ und $r = r_a$ vorgeschrieben ist. Für den gewöhnlichen Fall $\gamma - \gamma' > 0$ ergibt $\sigma_i \lesseqgtr \sigma_a$ ersichtlich $k \lesseqgtr 0$, also $q \gtreqless 0$.

Da hier wieder $\Delta F = \Phi = 0$ ist, so folgt nach 23) $\Psi =$ Const, was nach S. 14 auf $\Psi = 0$ und $\Omega = \Pi = 0$ führt. Somit wird wiederum höchst einfach

$$\chi = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \zeta = \frac{q}{2 P r^2}, \tag{55}$$

wodurch der gleichförmig gespannten Ringmembran eine ungleich gespannte mit gleichen Radien zugeordnet wird.

Für die Knotenlinien der durch Drillung ungleichförmig gespannten Ringmembran ergeben sich hieraus einerseits dieselben konzentrischen Kreise, wie bei gleichförmiger Spannung, daneben aber statt der Durchmesser spiralig gekrümmte Kurven von den Gleichungen

$$\varkappa + \frac{q}{2 P \varrho^2} = \text{Const.}$$

In dem oben erwähnten Fall, wo $q > 0$ also $\sigma_i > \sigma_a$ ist, sind diese Kurven mit wachsendem ϱ in positiver Richtung gebogen, schließen sich also dem Sinne der relativen Verdrehung der äußern Grenzlinie der Membran gegen die innere an.

Was die Frequenzen angeht, so sind dieselben bei gleicher Anzahl radialer oder zirkularer Knotenlinien dieselben, wie bei der gleichförmig gespannten Membran, da sich gleiche r_i, r_a und ϱ_i, ϱ_a entsprechen.

9. **Ring-Membran mit ungleichförmiger Verschiebungsspannung.**

Setzt man, um 22) zu genügen,

$$F = k r p \sin p + \left(2 l r \ln r + \frac{m}{r} + n r^3\right) \cos p \tag{56}$$

so wird

$$\begin{aligned} -R_r &= 2\left(\frac{k+l}{r} + n r - \frac{m}{r^3}\right) \cos p, \\ -S_s &= 2\left(\frac{l}{r} + 3\, n r + \frac{m}{r^3}\right) \cos p, \\ -R_s &= -S_r = 2\left(\frac{l}{r} + n r - \frac{m}{r^3}\right) \sin p. \end{aligned} \tag{57}$$

Zugleich folgt aus 40)

$$58)\quad \begin{aligned} \lambda &= \left[\left(\frac{k\gamma}{\gamma-\gamma'}+l\right)\frac{2\ln r}{\gamma+\gamma'}+\frac{m}{(\gamma-\gamma')r^2}+\frac{\gamma-3\gamma'}{\gamma^2-\gamma'^2}nr^2+q\right]\cos p \\ &\quad+\left(k+\frac{4\gamma l}{\gamma-\gamma'}\right)\frac{p\sin p}{\gamma+\gamma'}, \\ \sigma &= \left[-\left(\frac{k\gamma}{\gamma-\gamma'}+l\right)\frac{2\ln r}{\gamma+\gamma'}+\frac{m}{(\gamma-\gamma')r^2}+\frac{5\gamma+\gamma'}{\gamma^2-\gamma'^2}nr^2-\frac{k+2l}{\gamma-\gamma'}-q\right]\sin p \\ &\quad+\left(k+\frac{4\gamma l}{\gamma-\gamma'}\right)\frac{p\cos p}{\gamma+\gamma'}. \end{aligned}$$

Damit die Lösung eindeutig ist, muß gelten

$$59)\quad k+\frac{4\gamma l}{\gamma-\gamma'} = 0.$$ [1]

Die Ausdrücke für λ und σ besitzen in diesem Falle die Form

$$60)\quad \begin{aligned} \lambda &= \left[k'\ln r+\frac{m'}{r^2}+n'r^2+q\right]\cos p = \varDelta_1\cos p, \\ \sigma &= \left[-k'\ln r+\frac{m'}{r^2}+n''r^2-(q+k'')\right]\sin p = \Sigma_1\sin p, \end{aligned}$$

wobei k'' durch k', n'' durch n' ausdrückbar ist, und $\varDelta_1$, Σ_1 Abkürzungen sind; wir haben in ihnen vier verfügbare Konstanten.

$$\lambda\sin p+\sigma\cos p = (\varDelta_1+\Sigma_1)\cos p\sin p = \sigma_0$$

ist die Verschiebungskomponente normal,

$$\lambda\cos p-\sigma\sin p = (\varDelta_1\cos^2 p-\Sigma_1\sin^2 p) = \lambda_0$$

diejenige parallel zur p-Axe.

Wir erhalten

$$\varDelta_1+\Sigma_1 = \left(\frac{2m'}{r^2}+(n'+n'')r^2-k''\right);$$

ist also k'' nicht Null, so läßt sich $(\varDelta_1+\Sigma_1)$ für zwei Werte von r, z. B. r_i und r_a zu Null machen. In diesem Falle ist dann für zwei konzentrische Kreise $\sigma_0 = 0$, $\varDelta_1 = -\Sigma_1$, also zugleich λ_0 konstant $= \varDelta_1 = -\Sigma_1$. Dies entspricht dem Falle, daß die zwei starren Begrenzungen einer Kreisringmembran ein wenig geradlinig und parallel gegen einander verschoben sind, ein Fall, der seiner leichten Realisierbarkeit wegen ein besonderes Interesse verdient.

Aus 56) folgt weiter

$$61)\quad \varDelta F = \Phi = 2\left(\frac{k+2l}{r}+4nr\right)\cos p,$$

[1] Die Formeln 12), 15) und 17) auf S. 26—29 der Timpe'schen Dissertation, welche den obenstehenden 57), 58), 59) entsprechen, enthalten einige Druckfehler, welche, abgesehen von der geänderten Bezeichnung, die Abweichungen bedingen.

somit also

$$\Psi = 2\left(-\frac{k+2l}{r} + 4nr\right)\sin p;$$

dies gibt nach der Bedeutung von Π und Ω gemäß 29)

$$62)\quad \begin{aligned} \Pi &= 2(k+2l)\ln r + 4nr^2\cos 2p + k_1, \\ \Omega &= 2(k+2l)p + 4nr^2\sin 2p + k_2, \end{aligned}$$

wobei k_1 und k_2 Integrationskonstanten sind.

Man erhält demnach gemäß 45)

$$63)\quad \begin{aligned} P\chi &= \left(\frac{2l+k}{2r} + 2nr\right)\cos p, \\ 2P\delta &= \left[(2l-k_1) - 2(k+l)\ln r - \frac{m}{r} - nr^2\right]\cos p \\ &\quad - [k_2 + (k+4l)p]\sin p, \\ 2P\zeta &= \left[(k+k_1) + 2(k+l)\ln r - \frac{m}{r^2} - 5nr^2\right]\frac{1}{r}\sin p \\ &\quad - \left[k_2 + (k+4l)p\right]\frac{1}{r}\cos p. \end{aligned}$$

Damit δ und ζ einwertig seien, muß indessen der Faktor von p in den beiden letzten Klammern verschwinden, demgemäß

$$64)\quad k + 4l = 0$$

sein. Diese Beziehung steht im allgemeinen im Widerspruch mit der Beziehung 59), an welche die Einwertigkeit von λ und σ geknüpft war. Die Funktionen 63) führen also generell ein Problem der ungleichförmig gespannten Membran auf eines gleichförmiger Spannung nur dann zurück, wenn k und l verschwinden. Damit fällt auch aus den Ausdrücken für λ und σ die Konstante k'' heraus, und die Anwendbarkeit der Lösung wird beschränkter. Der auf diese Weise erhaltene Charakter des Problems soll im nächsten Abschnitt allgemeiner besprochen werden.

Hier wollen wir uns nur an den Fall halten, daß die beiden Bedingungen 59) und 64) wenigstens in Annäherung vereinbar sind, also γ' klein neben γ ist. Dazu mag bemerkt werden, daß bei Körpern, welche die Poissonsche Relation $c = 3c'$ zwischen den Elastizitätskonstanten erfüllen, $\gamma = 4\gamma'$ ist. Der Fall eines neben γ sehr kleinen γ' ist also wenigstens nicht undenkbar, und er wird immerhin qualitative Aufschlüsse über den Vorgang geben, der in der Wirklichkeit eintritt.

Nach S. 16 ist die Deformation der Membran, die durch 59) ausgedrückt wird, dadurch zu erhalten, daß die beiden begrenzenden

starren konzentrischen Kreise $r = r_i$ und $r = r_a$ unendlich wenig geradlinig und parallel gegen einander verschoben werden. Die Werte δ und ζ, die diesen Kreisen entsprechen, haben die Form

$$\delta_i = D_i \cos p, \quad \zeta_i = E_i \sin p$$
$$\delta_a = D_a \cos p, \quad \zeta_a = E_a \sin p,$$

worin die D und E Konstanten sind.

Die Kurven, die den Kreisen $r = r_i$ und $r = r_a$ entsprechen, erhält man nach 42) gegeben durch die Beziehungen

$$\varrho = r - D \cos p, \quad \pi = p - E \sin p.$$

Da D eine Größe erster Ordnung ist, so stellt die erste Formel bei konstantem r einen Kreis dar, dessen Zentrum um die Strecke D nach der Seite der $-p$-Axe gegen den Punkt $r = 0$ verschoben ist. Unsere Transformation führt sonach die Schwingungen einer von konzentrischen Kreisen begrenzten, ungleichförmig gespannten Membran auf diejenigen einer analog exzentrisch begrenzten, aber gleichförmig gespannten Membran zurück.

Die nähere Diskussion der speziellen Beziehungen, welche dabei auftreten, mag unterbleiben, ebenso die Untersuchung der Frage, wie es kommt, daß die strenge Lösung des Problems gerade an den speziellen Wert $\gamma' = 0$ gebunden ist.

10) Ein allgemeinerer Typus ungleichförmiger Spannungen.

Setzt man, um 22) zu genügen,

$$F = \left(l r^h + \frac{m}{r^h} + n r^{h+2}\right) \cos hp, \quad \text{wo } h = 2, 3, \ldots, \tag{65}$$

so wird

$$\begin{aligned} -R_r &= -\left[h(h-1) l r^{h-2} + h(h+1)\frac{m}{r^{h+2}} + (h-2)(h+1) n r^h\right] \cos hp, \\ -S_s &= \left[h(h-1) l r^{h-2} + h(h+1)\frac{m}{r^{h+2}} + (h+2)(h+1) n r^h\right] \cos hp, \\ -S_r = -R_s &= \left[h(h-1) l r^{h-2} - h(h+1)\frac{m}{r^{h+2}} + h(h+1) n r^h\right] \sin hp. \end{aligned} \tag{66}$$

Für die Verrückungskomponenten λ und σ folgt hieraus nach 40)

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{-h}{\gamma - \gamma'}\left(l r^{h-1} - \frac{m}{r^{h+1}}\right) - \frac{\gamma(h-2) + \gamma'(h+2)}{\gamma^2 - \gamma'^2} n r^{h+1}\right] \cos hp \\ &= \Lambda_h \cos hp, \\ \sigma &= \left[\frac{h}{\gamma - \gamma'}\left(l r^{h-1} + \frac{m}{r^{h+1}}\right) + \frac{\gamma(h+4) + \gamma' h}{\gamma^2 - \gamma'^2} n r^{h+1}\right] \sin hp \\ &= \Sigma_h \sin hp. \end{aligned} \tag{67}$$

Hierin sind Λ_h, Σ_h die früheren Abkürzungen.

Vorstehende Worte setzen zunächst $h = 2, 3, \ldots$ voraus; sie gelten aber, wie die Vergleichung mit 58) ergibt, bei $k = l = 0$ auch für den Fall $h = 1$, nur daß hier dann das in 67) auftretende l die Rolle einer Integrationskonstante übernimmt.

Da diese Ausdrücke drei verfügbare Konstanten l, m, n enthalten, so kann man λ und σ längs einer Kreislinie, z. B. für $r = r_a$, zu Null machen, diese Begrenzung also fest halten. Für eine konzentrische Kreislinie $r = r_i$ wäre dann λ und σ bis auf einen verfügbaren Faktor vorgeschrieben, und zwar in dem Sinne einer Deformation dieser Begrenzung, die für $h > 1$ ohne Verschiebung ihres Schwerpunktes stattfinden würde.

Eine andere Deutung gestatten die Formeln 67) bei Fortlassung der in m multiplizierten Glieder, die für $r = 0$ unendlich werden. Hierdurch werden sie auf die volle Kreisflächenmembran anwendbar und lassen dann die beiden Verschiebungen $\bar{\lambda}$ und $\bar{\sigma}$ für deren Begrenzung in gewissem Umfange verfügbar. Interessant und anscheinend realisierbar ist dabei der Fall, daß diese $\bar{\lambda}$ und $\bar{\sigma}$ durch eine bloße Verbiegung des den Rand der Membran tragenden Ringes ohne Aenderung seiner Länge bewirkt werden. Hier muß, wie leicht erkennbar, $\bar{\lambda} + \overline{\partial\sigma/\partial p} = 0$ sein, was, wenn wir wieder die Abkürzungen Λ_h und Σ_h aus 67) benutzen, auf

$$\bar{\Lambda}_h + h\bar{\Sigma}_h = 0 \tag{68}$$

führt.

Aus 65) folgt weiter

$$\left\{\begin{aligned} \Delta F &= \Phi = 4(h+1)nr^h \cos hp, \\ &\text{somit also} \\ \Psi &= 4(h+1)nr^h \sin hp; \end{aligned}\right. \tag{69}$$

daraus fließt nach 29)

$$\begin{aligned} \Pi &= 4nr^{(h+1)} \cos(h+1)p + k_1, \\ \Omega &= 4nr^{(h+1)} \sin(h+1)p + k_2. \end{aligned} \tag{70}$$

Ferner ergibt sich nach 29) und 45)

$$\begin{aligned} P\chi &= (h+1)nr^h \cos hp, \\ 2P\vartheta &= \left(lhr^{h-1} - \frac{hm}{r^{h+1}} + n(h-2)r^{h+1}\right)\cos hp \\ &\quad - (k_1 \cos p + k_2 \sin p), \\ 2Pr\zeta &= -\left(lhr^{h-1} + \frac{hm}{r^{h+1}} + n(h+4)r^{h+1}\right)\sin hp \\ &\quad + (k_1 \sin p - k_2 \cos p). \end{aligned} \tag{71}$$

Hiermit sind die Substitutionsfunktionen bestimmt; die Kon-

stanten k_1 und k_2 haben keine wesentliche Bedeutung und können fortbleiben.

Für die Diskussion wählen wir nur die beiden einfachsten Fälle $h = 1$ und $h = 2$.

Für $h = 1$ haben wir nach 58) und 67) übereinstimmend

$$72)\quad \begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{\gamma - 3\gamma'}{\gamma^2 - \gamma'^2} n r^2 + q\right)\cos p = A_1 \cos p, \\ \sigma &= \left(\frac{5\gamma + \gamma'}{\gamma^2 - \gamma'^2} n r^2 - q\right)\sin p = \Sigma_1 \sin p, \end{aligned}$$

und nach 63) in Uebereinstimmung mit 70)

$$73)\quad \begin{gathered} P\chi = 2 n r \cos p \\ 2P\delta = -n r^2 \cos p, \quad 2P\zeta = -5 n r \sin p. \end{gathered}$$

Sollen die Verrückungen λ und σ die Länge der Randlinie $r = r_a$ ungeändert lassen, so muß nach 68) $\overline{A}_1 + \overline{\Sigma}_1$, verschwinden, was auf $n = 0$ führt. In diesem Falle verschwinden auch χ, δ, ζ, d. h., die Substitution führt auf den Ausgangsfall zurück; in der Tat geben die Annahmen hier keine Deformation der Membran, sondern nur eine (unendlich kleine) Dislokation, wie auch die Betrachtungen von S. 16 erkennen lassen.

Um für $h = 1$ eine Deformation zu erhalten, muß man also andere Voraussetzungen machen. Z. B. kann man λ für $r = r_a$ gleich Null annehmen; dann verlangt die zweite Formel (72) eine Verschiebung der Randpunkte der Membran längs der begrenzenden Kreislinie, die für $\overline{\Sigma}_1 > 0$ auf der positiven Seite der p-Achse eine Dilatation, auf der negativen eine Kondensation darstellt. Unsere Formeln reduzieren dann das Problem einer demgemäß ungleichförmig gespannten Membran auf dasjenige der gleichförmig gespannten Kreismembran.

Aehnlich könnte man σ_1 für $r = r_a$ zu Null machen, und λ_1 der Formel gemäß hervorbringen. Leider würden sich aber diese theoretisch so einfachen Fälle schwer realisieren lassen. —

Für $h = 2$ ergibt uns 67) bei fortgelassenem m

$$73)\quad \begin{aligned} \lambda &= \left[-\frac{2 l r}{\gamma - \gamma'} - \frac{4\gamma' n r^3}{\gamma^2 - \gamma'^2}\right]\cos 2p = A_2 \cos 2p, \\ \sigma &= \left[+\frac{2 l r}{\gamma - \gamma'} + \frac{2(3\gamma + \gamma') n r^3}{\gamma^2 - \gamma'^2}\right]\sin 2p = \Sigma_2 \sin 2p, \end{aligned}$$

während 70) liefert

$$74)\quad \begin{gathered} P\chi = 3 n r^2 \cos 2p \\ P\delta = l r \cos 2p, \quad P\zeta = -(l + 3 n r^2)\sin 2p. \end{gathered}$$

Sollen die Verrückungen λ und σ die Randlinie der Membran undilatiert lassen, so muß nach 68) $\bar{A}_2 + 2\bar{\Sigma}_2$ für $r = r_0$ verschwinden — eine Bedingung, die l und n verknüpft. Die Formeln 73) geben dann die Deformation der Membran, wie sie einer bloßen Verbiegung ihres Randes in eine (vom Kreis unendlich wenig abweichende) Ellipse entspricht.

In der Tat ist der geänderte Radius r' gegeben durch

$$r' = r + \lambda = r + A_2 \cos 2p,$$

resp. durch

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = r^2 + 2rA_2 \cos 2p,$$

eine Gleichung, die aequivalent ist mit

75) $$x'^2\left(1 - \frac{2A_2}{r}\right) + y'^2\left(1 + \frac{2A_2}{r}\right) = r^2;$$

diese entspricht aber, wenn r konstant ist, einer Ellipse.

Das Problem der Schwingung der in dieser Weise ungleichförmig gespannten Kreismembran ist also durch unsere Transformationsfunktionen 74) zurückgeführt auf dasjenige der Schwingung einer gleichförmig gespannten elliptischen Membran, denn die Gleichung $r = \varrho + \zeta$ gibt für ϱ eine Beziehung, die der für r' soeben gebildeten ganz analog ist.

Göttingen, Juni 1907.

Nachtrag.

Die Schwingungen einer Kreisringmembran mit innerem freiem Rande.

In meiner ersten Notiz über „Eigenartige Fälle schwingender Membranen" [1]) habe ich gezeigt, daß für den Fall, daß eine Membran einen freien Randteil besitzt, für diesen aus dem Hamiltonschen Prinzip eine Grenzbedingung nicht gewonnen werden kann, daß aber trotzdem für eine solche Membran das Problem der aus einem Anfangszustand folgenden Schwingung ein völlig bestimmtes ist.

Hieran anschließend habe ich bemerkt, daß dergleichen Membranen unter Umständen keine Eigenschwingungen besitzen können, und habe diese Folgerung an dem Fall einer (konzentrischen) Kreisringmembran mit einer inneren freien Grenze plausibel zu

1) W. Voigt, l. c. p. 171.

machen gesucht. Ich stellte mir dabei vor, daß auch bei dieser Membran zwei ähnliche Gattungen von partikulären Lösungen in Frage kämen, wie im Falle gleichförmiger Spannung, nämlich solche, von denen die eine in Unendlichen, die andere im Kreiszentrum unendlich würde. Letztere wäre für die Vollkreismembran auszuschließen, beim Kreisring aber zulässig; bestände dann nur eine Grenzbedingung, so würde die Folgerung resultieren, auf die ich hinwies.

Ich verdanke Herrn Hilbert den Hinweis darauf, daß die Entscheidung über die Frage der Existenz von Eigenschwingungen komplizierter liegt und nicht ohne eine vorherige Untersuchung der Ordnung, von welcher die Spannungen $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$ in der freien Grenze verschwinden, durchführbar ist. Die allgemeinen Prinzipien, die in Herrn Hilberts zweiter Abhandlung zur Theorie der Integralgleichungen [1]) entwickelt sind, dürften dem Physiker zunächst noch erhebliche Schwierigkeiten bieten. Der Kernpunkt, um den es sich im vorliegenden Falle handelt, läßt sich dagegen mit wenigen Worten schildern. In allen Fällen nämlich, wo eine Gattung partikulärer Lösungen in der freien Grenze unendlich wird, tritt als Bedingung daselbst die Endlichkeit der Verrückung in derselben Weise ein, wie bei der gleichförmig gespannten Kreisflächenmembran, ergeben sich also Eigenschwingungen.

Diese Fälle sind keineswegs die einzigen vorkommenden und so behält die gezogene Folgerung gelegentlich ihre Berechtigung. Indessen gehört gerade das zur Illustration herangezogene spezielle Problem der Kreisringmembran mit dem zum äußern konzentrischen freien innern Rande zu der andern Gattung.

Dieser Fall läßt sich nicht durch das oben auseinander gesetzte allgemeine Abbildungsverfahren behandeln, denn bei dieser Membran sind ja am innern Rande gewisse Spannungen gleich Null, ihre Änderungen also von gleicher Größenordnung mit ihrem Absolutwert; aber man kann in dem vorliegenden speziellen Falle, der mit dem von Nr. 7 übereinstimmt, eine Abbildung ohne Vernachlässigungen durchführen, bei der das gesamte Verhältnis klar hervortritt.

Aus der Airyschen Funktion $F = c \ln(r)$ ergeben sich die Ausdrücke 48) der Spannungskomponenten von R'_r, S'_s, R'_s, und bei ihrer Heranziehung und Berücksichtigung der Beziehungen 37) bis 39) nimmt die Schwingungsgleichung die Gestalt an

$$75)\qquad \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(P - \frac{c}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) + \left(P + \frac{c}{r^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\,.$$

1) D. Hilbert, Gött. Nachr. 1904 p. 213.

Führt man hier statt r eine neue Variable ϱ durch die Beziehungen

$$\text{76)} \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \varrho}\frac{d\varrho}{dr}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial \varrho}\frac{d^2\varrho}{dr^2}$$

ein, so erhält man

$$\text{77)} \qquad \begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left[\left(P-\frac{c}{r^2}\right)\frac{\varrho}{r}\frac{d\varrho}{dr} + \left(P+\frac{c}{r^2}\right)\varrho\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right]\frac{\partial w}{\varrho\,\partial \varrho} \\ &\quad + \left(P+\frac{c}{r^2}\right)\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \left(P-\frac{c}{r}\right)\frac{\varrho^2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\varrho^2\partial p^2}. \end{aligned}$$

Hierin kann man die Faktoren von $\partial w/\varrho\partial\varrho$ und von $\partial^2 w/\partial\varrho^2$ gleich P machen indem man setzt

$$\text{78)} \qquad \frac{d\varrho}{dr} = r\sqrt{\frac{P}{Pr^2+c}} \quad \text{also} \quad \varrho = \sqrt{\frac{Pr^2+c}{P}}.$$

Die Gleichung 77) nimmt hierdurch die Gestalt an

$$\text{79)} \qquad \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\left[\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2}\right) + \left(1-\left(\frac{c}{P\varrho^2-c}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\varrho^2\partial p^2}\right],$$

die, wenn $c/P\varrho^2$ als eine Größe erster Ordnung neben Eins angesehen wird, bis auf diese Ordnung inklusive in die Gleichung für die gleichförmig gespannte Membran übergeht; in der Tat stimmt in dieser Annäherung die eingeführte Abbildung mit der in Nr. 7) überein.

Macht man nun eine Anwendung des Vorstehenden auf den Fall der konzentrisch begrenzten Kreisringmembran mit innerem freien Rande, so ist zu bedenken, daß nach 48) $-R_r = P + \frac{c}{r^2}$, daß also, für $r = r_i$, $P + c/r_i^2 = 0$ wird. Nach 78) entspricht sonach der Radius $r = r_i$ dem Radius $\varrho = 0$ in der Abbildung, also dem gegebenen Kreis r i n g der V o l l kreis. Für die Lösungen von 79) gewinnt also die Bedingung, daß w für $\varrho = 0$ endlich sein muß, Geltung, und ihre Wirkung erhellt am einfachsten in dem Falle, wo w von p unabhängig, also der Schwingungszustand der Membran in konzentrischen Kreisen konstant ist. Denn hier geht die Gleichung vollständig in die für eine gleichförmig gespannte Membran geltende über, die sich durch Besselsche Funktionen behandelt; von letzteren sind denn im Falle des Vollkreises nur diejenigen erster Art zulässig, wodurch die Eigentöne in bekannter Weise sich ergeben.

Im allgemeinen Falle, wo

$$w = e^{i(\nu t + \mu\varphi)} R$$

ist, unter R eine Funktion von ϱ allein verstanden, folgt aus 79)

$$\left[\left(1 - \left(\frac{c}{P\varrho - c}\right)^2\right)\frac{\mu^2}{\varrho^2} - \varepsilon\nu^2\right] R = P\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial R}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2}\right). \tag{80}$$

Die Integrale dieser Gleichung müssen, da der Faktor von μ^2 für $\varrho = 0$ verschwindet, die Eigenschaft haben, sich für $\varrho = 0$ auf die Besselschen Funktionen J_0 und Y_0 zu reduzieren; die Forderung der Endlichkeit von w für $\varrho = 0$ schließt also auch hier die eine Lösungsgattung aus und führt zu der Existenz von Eigentönen.

Einige vorläufige Versuche im hiesigen Institut mit Kreisringmembranen der geschilderten Art haben in der Tat zu Resonanzerscheinungen und Knotenlinien geführt. Während ich anfangs geneigt war, dieselben nur als Maxima der Erregungsfähigkeit aufzufassen, die mir nach gewissen Überlegungen auch bei Membranen ohne Eigentöne wahrscheinlich geworden waren, sind dieselben nach dem Vorstehendeu nun unzweifelhaft als Aeußerungen wirklicher Eigentöne aufzufassen. Eine Membran ohne nachweisbare Eigenschwingungen könnte man dem Prinzip nach jederzeit dadurch erhalten, daß man auf die vorhin betrachtete Ringmembran von deren Centrum aus geeignete Centralkräfte wirken ließ. Außerdem scheinen nach vorläufigen Versuchen Membranen, die aus gleichförmig gespannten durch Aufschlitzen nach irgend einer Kurve, z. B. nach einem Kreisbogen, entstehen, in den nach Außen convex begrenzten Teilen Eigenschwingungen kaum zu zeigen. Die Beurteilung derartiger Fälle ist dadurch erschwert, daß die wirklichen Membranen stets eine gewisse Steifigkeit besitzen, welche die Theorie ausdrücklich ausschließt.

Göttingen, Juli 1907.

Ueber die sogenannten allgemeinen Arbeitsgleichungen der technischen Festigkeitslehre.

Von

Julius Weingarten, Correspondent.

Vorgelegt vom vorsitzenden Sekretär in der Sitzung am 20. Juli 1907.

In dem Buche „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre etc.“ von Müller-Breslau wird die Entwickelung der Theorie der Festigkeit eines elastischen festen Stabes auf eine Fundamentalgleichung, die „Arbeitsgleichung“, gegründet, welche in nachstehender Weise aufgestellt wird.

Der Stab, dessen Schwerpunktsachse eine ebene Linie bilde, wird durch geometrische Zerschneidung in ein System von unendlich dünnen prismatischen Stäben, die der Stabachse parallel verlaufen, zerlegt gedacht und durch eine Schaar von zur Stabachse senkrechten ebenen Querschnitten F in unendlich kleine prismatische Elemente dV zerfällt. Begrenzt wird er durch zwei Endquerschnitte F_0 und F_1. Die seine Teile angreifenden äußeren Kräfte sollen in zur Stabachse parallelen Ebenen wirksam sein. Die zu betrachtende „Arbeitsgleichung“ wird nun auf Seite 78 der dritten Auflage des bezeichneten Buches in folgender Weise entwickelt:

Bezeichnet F die Querschnittfläche eines Stabes, ds' die Länge eines zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten gelegenen Linienelementes der Stabachse, ds das dem Elemente ds' parallele Linienelement, welches die Länge irgend eines zwischen diesen Querschnitten gedachten unendlich kleinen Prismas darstellt, ferner Δds die Strecke, um welche sich ds in Folge einer geringen Verbiegung des Stabes ändert, und σ die Normalspannung für den Endquerschnitt dF dieses Prismas,

„so ist die Spannung

$$S = \sigma dF$$

und es ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Aenderungen der Querschnittsabmessungen, die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\int S\Delta ds = \int \sigma \frac{\Delta ds}{ds}\, dV,$$

wobei

$$dV = ds\, dF$$

den Inhalt des Stabteilchens bezeichnet. Bezeichnet nun

P eine Last
C eine Auflagerkraft
δ die durch jene Δds bedingte Verschiebung des Angriffspunkts von P im Sinne von P
ΔC die durch jene Δds bedingte Verschiebung des Angriffspunkts von C im Sinne von C

und wird angenommen, daß die äußeren und inneren Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind, so folgt, wenn die Gewichte der Stabteilchen zu den Lasten gerechnet werden, aus dem Satze von den virtuellen Verschiebungen die Arbeitsgleichung:

$$\sum P\delta + \sum C\Delta c = \int \sigma \frac{\Delta ds}{ds}\, dV, \tag{28}$$

welche für beliebige mögliche Verschiebungen δ, ΔC, Δds gilt, sobald diese nur klein genug sind, um als verschwindende Größen aufgefaßt zu werden.“

Der Umstand, daß diese Gleichung (28), die Herr Müller-Breslau zum Ausgang seiner Entwickelungen macht, bisher von keinem der theoretisch arbeitenden Techniker beanstandet oder auf ihren wahren Inhalt untersucht worden ist, läßt es angemessen erscheinen, die Bedeutung dieser Gleichung klarzulegen. Zu dem Ende möge nach der Vorschrift des Herrn Müller-Breslau die Entwickelung der einzelnen Glieder dieser Gleichung ausgeführt werden.

Es seien x und y die nach den rechtwinklichen Achsen X und Y geschätzten Koordinaten des Volumenelements dV einer beliebig herausgegriffenen ebenen Prismakurve. Sie werden bestimmt sein durch die vom Anfangsquerschnitt F_0 gewählte Länge s dieser Kurve und durch die zwei rechtwinklichen Koordinaten a, b,

welche den Durchgang der Kurve durch den im Endpunkt von s gelegten Querschnitt F bestimmen. Der Anfangspunkt dieser Koordinaten a, b sei der Schnittpunkt der Stabachse mit F und die Achse der b sei die dortige Normale zur Stabachse, in der Ebene derselben gelegen. Die Größen a, b bleiben alsdann für jede Prismakurve bei verändertem s dieselben. Unter diesen Voraussetzungen sind die Koordinaten x, y eines beliebigen Volumenelements dV durch die Gleichungen:

$$x = f(s, a, b) \qquad y = \varphi(s, a, b)$$

ausdrückbar, unter f und φ zwei bekannte Funktionen verstanden, falls die Stabachse als gegeben gedacht wird. Legt man jedem Punkt des Stabes eine unendlich kleine Verschiebung in der Ebene der x, y bei, deren Komponenten nach den Achsen x und y durch u und v bezeichnet werden mögen, welche Komponenten im ganzen Raum des Stabes stetige Funktionen der Größen s, a, b sein mögen, so sind die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ des verschobenen Punktes

$$\bar{x} = x + u \quad , \quad \bar{y} = y + v.$$

Die ursprüngliche Länge ds des Linienelements einer Prismakurve geht daher über in die veränderte Länge $\overline{ds}$, und unter Vernachlässigung der Größen höherer Ordnung du^2 und dv^2 ergiebt sich:

$$\overline{ds} = \sqrt{(dx+du)^2 + (dy+dv)^2} = \sqrt{ds^2 + 2\,(dx\,du + dy\,dv)}$$
$$= ds\sqrt{1 + 2\left(\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds}\right)}$$
$$= ds\left(1 + \frac{dx}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds}\right).$$

Hiernach wird

$$\frac{\overline{ds} - ds}{ds} = \frac{\Delta ds}{ds} = x'\frac{du}{ds} + y'\frac{dv}{ds},$$

wenn der Abkürzung wegen die Differentialquotienton von x und y nach der Variablen s durch x' und y' bezeichnet werden. Die Gleichung (28) ist daher identisch mit der folgenden:

$$(28') \qquad \int\left(\sigma x'\frac{du}{ds} + \sigma y'\frac{dv}{ds}\right)dV = \sum P\delta + \sum C\Delta c.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\sigma x'\frac{du}{ds} + \sigma y'\frac{dv}{ds} = \frac{d\,(\sigma x' u + \sigma y' v)}{ds} - \left(u\frac{d\sigma x'}{ds} + v\frac{d\sigma y'}{ds}\right)$$

und daß

$$dV = ds dF,$$

so erhält man für die Gleichung (28') die nachstehende:

$$\int dF \int \frac{d(\sigma x' u + \sigma y' v)}{ds} ds - \int \left(u \frac{d\sigma x'}{ds} + v \frac{d\sigma y'}{ds} \right) dV = \sum P\delta + \sum C\varDelta c.$$

Das innere, über die betreffende Kurve s auszudehnende Integral auf der linken Seite dieser Gleichung ist ausführbar und giebt den Unterschied der Funktion $(\sigma x' u + \sigma y' v)$ für den Anfangs- und Endpunkt dieser Kurve an. Diese Punkte befinden sich auf den den Stab begrenzenden Querschnitten F_0 und F_1. Bezeichnen dF_0 und dF_1 die Querschnitte der betreffenden unendlich dünnen Prismen an diesen Stellen, und deutet man durch das Hinzufügen der Indices 0 und 1 die Werte der für diese Stellen zu berechnenden Funktionen an, so erhält die vorstehende Gleichung die Form:

$$(28'') \quad \begin{aligned} &\int [(\sigma x')_1 u_1 + (\sigma y')_1 u_1] \, dF_1 - \int [(\sigma x')_0 u_0 + (\sigma y')_0 v_0] \, dF_0 \\ &- \int \left[u \frac{d\sigma x'}{ds} + v \frac{d\sigma y'}{ds} \right] dV = \sum P\delta + \sum C\varDelta c. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich ebenfalls durch die Verschiebungskomponenten u, v jedes Körperelements ausdrücken. Bezeichnen XdV und YdV die auf irgend ein Volumenelement dV angebrachten Komponenten der äußeren Kraft P, so ist, gleichgültig ob diese eine Last oder eine Stützkraft sei, für das betreffende dV:

$$P\delta = (Xu + Yv)\, dV \qquad C\varDelta c = (Xu + Yv)\, dV,$$

und wenn ferner durch $A_1 dF_1$, $B_1 dF_1$ und $A_0 dF_0$, $B_0 dF_0$ die auf ein beliebiges Flächenelement der Querschnitte F_1 oder F_0 angebrachten Komponenten der dortigen äußeren Kraft P_1 oder P_0 bezeichnet werden, so wird auch

$$P_1 \delta_1 = (A_1 u_1 + B_1 v_1) dF_1, \quad P_0 \delta_0 = (A_0 u_0 + B_0 v_0) dF_0.$$

Die Einführung dieser Werte liefert alsdann:

$$\sum P\delta + \sum C\varDelta c = \int (A_1 u_1 + B_1 v_1)\, dF_1 + \int (A_0 u_0 + B_0 v_0) dF_0 + \int (Xu + Yv)\, dV,$$

in welcher Gleichung sich das erste Integral auf alle Flächenelemente des Querschnitts F_1, das zweite ebenso auf alle Elemente von F_0, das dritte auf alle Volumenelemente dV des Stabes bezieht. Durch Substitution in die Gleichung (28') ergiebt sich schließlich nach Zusammenfassung aller Glieder mit gleichen Faktoren die Gleichung:

$$\int\left[\left(\frac{d\sigma x'}{ds}+X\right)u+\left(\frac{d\sigma y'}{ds}+Y\right)v\right]dV+\int\left[(A_1-\sigma x')_1 u_1+(B_1-\sigma y')_1 v_1\right]dF_1$$

$$+\int\left[(A_0+\sigma x')_0 u_0+(B_0+\sigma y')_0 v_0\right]dF_0 = 0,$$

welche Gleichung den Inhalt der „Arbeitsgleichung" (28) nach der Vorschrift des Herrn Müller-Breslau ausdrückt und für alle unendlich kleinen Verschiebungen u, v gelten soll.

Wir wollen nunmehr diese Verschiebungen sämtlich unendlich klein und von Null verschieden wählen, beliebig der absoluten Größe nach, aber dem Vorzeichen nach derart, daß wir jedem u und jedem v dasjenige Vorzeichen beilegen, welches mit demjenigen seines Multiplikators in obiger Gleichung übereinstimmt. Alsdann sind sämtliche Summanden der linken Seite derselben positiv. Ihre Addition kann daher nur Null hervorbringen, wenn jeder einzelne Summand Null ist, da jedes u und v von Null verschieden sein sollte.

Daher folgt mit Notwendigkeit, daß

1) an jedem Volumenelement dV:

$$\frac{d\sigma x'}{ds}+X = 0, \qquad \frac{d\sigma y'}{ds}+Y = 0,$$

2) an jedem Flächenelement dF_0:

$$(\sigma x')_0 + A_0 = 0, \qquad (\sigma y')_0 + B_0 = 0,$$

3) an jedem Flächenelemente dJ_1:

$$(\sigma x')_1 - A_1 = 0, \qquad (\sigma y')_1 - B_1 = 0.$$

Diese Gleichungen sprechen die notwendigen Folgerungen der von Herrn Müller-Breslau aufgestellten Arbeitsgleichung (28) aus. Ihre Bedeutung ist seit lange bekannt. Es sind diejenigen Gleichungen, deren Erfüllung für das Gleichgewicht an einer ebenen und biegsamen Fadenkurve erfordert wird, welche in jedem ihrer Elemente die Spannung $S = \sigma dF$ zeigt, und dort durch die Komponenten der äußeren Kraft XdV und YdV angegriffen wird, während die im Anfangs- und Endpunkt angreifenden Kräfte die dort auftretenden Spannungen aufheben.

Aus der Theorie der biegsamen Fäden ist hinreichend bekannt, daß zu jeder gegebenen Beanspruchungsweise eines Fadens eine durch sie bestimmte Kurve gehört, wenn Gleichgewicht eintreten soll. Die Form der Stabachse eines Müller-Breslauschen Stabes, dessen Gleichgewicht unter einer gegebenen Belastung eingetreten wäre, ist daher je nach der besonderen Belastung veränderlich. Aendert man die Belastungsweise in jedem Punkte um eine endliche Größe ab, so könnte ein neues Gleichgewicht erst nach einer endlichen beträchtlichen Formänderung des Stabes zu Stande kommen, aber nicht wie bei festen elastischen Körpern nach einer verschwindend geringen Aenderung. Es bleibt daher unerfindlich, was unter diesen Umständen unter den wirklichen elastischen Verschiebungen des Stabes verstanden werden soll. Der Müller-Breslausche Stab ist, falls seine Formänderungen der Gleichung (28) entsprechen sollen, eine jeder Beanspruchungsänderung nachgebende frei bewegliche Materie.

Wie es scheint, beruhen die weiteren Entwickelungen des Herrn Müller-Breslau auf einem Mißverstehen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und der daraus entspringenden Meinung, daß die schon von Poisson (Traité de Mécanique 2de édition pag. 668) für ein Stab- und Faden-System, in etwas anderer Bezeichnung, aufgestellte Gleichung:

$$\sum T_{pq}\,\delta l_{pq} = \sum P_i\,\delta p_i,$$

die Mohr so elegant und erfolgreich für die Theorie der festen Fachwerke verwertet hat, in der Theorie der Elastizität fester Körper ein Analogon zulasse. In dieser Gleichung bezeichnen: l_{pq} die Länge eines die Knotenpunkte p, q des Fachwerks verbindenden Stabes, T_{pq} die in ihm auftretende Spannung, P_i die an einem Knotenpunkte i angreifende äußere Kraft, δl_{pq} die Veränderung von l_{pq}, welche einer beliebigen Verschiebung der Knotenpunkte entspricht und δp_i die entsprechende Verschiebung des Angriffspunkts von P_i im Sinne von P_i.

Soll diese Gleichung für jede mögliche Verschiebung der Knotenpunkte statthaben, so ergiebt eine einfache Entwickelung als dazu notwendige Bedingungen, daß die Spannungen T_{pq} derartige sind, daß jede Kraft P_i von den im Knotenpunkt i zusammenstoßenden Spannungen im Gleichgewicht gehalten wird. Umgekehrt wird bei Erfüllung dieser Bedingung diese Gleichung für jede mögliche Verschiebung der Knotenpunkte eine identische. Aber, und hierin liegt der Unterschied zwischen dieser Gleichung

und der von Herrn Müller-Breslau verwendeten, diese Bedingungen sind für jede Wahl der äußeren Kräfte P_t (nur durch die Gleichgewichtsbedingungen für einen festen Körper beschränkt) bei festen Fachwerken erfüllbar. Die zur Herbeiführung des Gleichgewichts am elastischen Stabsystem erfolgenden wirklichen Verschiebungen bleiben daher stets verschwindend klein. Dieser Eigenschaft ermangelt die Gleichung des Herrn Müller-Breslau.

Aus den Bedingungen 1), 2), 3) folgt die Gleichung (28) zurück. Ihre Erfüllung bestimmt für jeden Körperpunkt (Punkt des Stabes) die Spannung σ vollständig. Die von Navier eingeführten Gleichgewichtsbedingungen oder die anderen der Theorie der Festigkeit gekrümmter elastischer Stäbe entnommenen, stehen mit den aus der Gleichung (28) gewonnenen Bedingungen im Widerspruch und heben die Gültigkeit dieser Gleichung auf, falls sie, wie in den „neueren Methoden etc." als bestehend verwertet werden. Die von Herrn Müller-Breslau durch die gleichzeitige Benutzung zweier einander ausschließenden Voraussetzungen erlangten Folgerungen, pag. 82. l. c. Gesetze genannt, sind daher in ihrem gesamten Umfange unbegründet.

Vier neue Briefe von Gauß.

Von

Paul Stäckel (Hannover).

Eingereicht am 27. Juli 1907.

Durch die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen überreiche ich dem Gauß-Archiv vier neue Briefe von Gauß, über deren Inhalt ich mir hier kurz zu berichten erlaube.

Der erste Brief, ein Geschenk von Herrn Prof. Dr. O. Staude in Rostock, ist vom 5. April 1833 datiert und an den derzeitigen Rektor der Universität Rostock Prof. Dr. Strempel gerichtet. Er bezieht sich auf die Einrichtung einer Sternwarte, und zwar empfiehlt Gauß in Anbetracht der geringen Mittel, die zur Verfügung stehen, den Zweck des astronomischen Unterrichts in den Vordergrund zu stellen.

Die drei anderen Briefe, die Herr Geheimrat Viktor Fuß in St. Petersburg als Geschenk überweist, haben zum Adressaten dessen Onkel, den beständigen Sekretär der Petersburger Akademie Paul Heinrich v. Fuß, und ergänzen in glücklicher Weise die im Gauß-Archiv vorhandenen 6 Briefe, die dieser 1835—1849 an Gauß geschrieben hat. Sie zeigen, welch' lebhaften Anteil Gauß an der von P. H. v. Fuß begonnenen, aber leider nicht zu Ende geführten Herausgabe der Werke seines Urgroßvaters Leonhard Euler nahm. War doch Gauß, wie er am 16. Sept. 1849 in dem letzten der drei Briefe schreibt, der Ueberzeugung, daß „das Studium aller Eulerschen Arbeiten doch stets die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird.“

Auf die Eulerschen Werke beziehen sich auch die beiden ersten Schreiben vom 8. und 15. Mai 1844. In dem Verzeichnis der Eulerschen Abhandlungen, das der Vater von P. H. v. Fuß, Nicolaus Fuß, 1783 der Gedächtnisrede auf seinen Großvater beigefügt hatte, findet sich nämlich eine Abhandlung: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* angeführt, die in dem Journal littéraire de l'Allemagne Janvier et Février 1751 erschienen sein sollte. Fuß konnte sich dieses Journal auf keine Weise verschaffen und wandte sich schließlich am 19. April 1844 an Gauß „in der Hoffnung auf die so reiche und vollständige Göttinger Bibliothek". Gauß ermittelte, daß in der Tat die Göttinger Bibliothek die vier einzigen 1741 bis 1743 zu Haag erschienenen Bände des Journals besitzt und daß der Tome II, 1. partie vom Jahre 1743 auf S. 115—127 eine anonyme Abhandlung enthält, die, wie die Anfangsworte zeigen, von Euler herrührt. Ihr Titel ist jedoch: *Démonstration de la somme de cette Suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ *etc.* Gauß hat die Mühe nicht gescheut, diese Abhandlung eigenhändig abzuschreiben, und die Abschrift, als Beitrag zu den Werken Eulers, an Fuß geschickt (vergl. Leonhardi Euleri Opera minora collecta, Commentationes arithmeticae, P. I. Petersburg 1849, S. XXIV). C. G. J. Jacobi, mit dem Fuß ebenfalls wegen der Herausgabe der Eulerschen Werke in Verbindung getreten ist, hat gefunden, daß eine Abhandlung: Découverte d'une loi extraordinaire des nombres am 22. Juni 1747 von Euler der Berliner Akademie vorgelegt wurde. Diese Abhandlung ist auf Grund des bei der Berliner Akademie aufbewahrten Manuskriptes in den Commentationes Arithmeticae P. II, S. 639 abgedruckt worden, während die Abhandlung vom Jahre 1743 noch des Abdruckes harrt.

So erfreulich dieser Zuwachs des Gauß-Archivs ist, so zeigt es sich doch wieder, wie wenig von dem umfangreichen Briefwechsel, den Gauß geführt hat, der Forschung zugänglich geworden ist, und jetzt, wo der biographische Band X der Gesammelten Werke in Angriff genommen wird, scheint es angebracht, öffentlich die Bitte zu erneuern, daß alle auf Gauß bezüglichen Aufzeichnungen und Briefe, die sich in Privatbesitz befinden, sei es in Abschrift sei es im Original dem Gauß-Archiv überwiesen werden möchten.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XVIII.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juli 1907.

I. Ueber die Synthese eines mit β-Pinen verwandten Kohlenwasserstoffs aus Nopinon.

Um ein Verfahren an die Hand zu bekommen, welches es ermöglicht, die Methen-Gruppe CH_2: in cyclische Kohlenwasserstoffe einzuführen und weiterhin ganz allgemein Kohlenwasserstoffe mit semicyclischer Bindung und längerer Seitenkette synthetisch herzustellen, habe ich zusammenhängende Versuchsreihen angestellt, welche dazu geführt haben, das angestrebte Ziel zu erreichen.

Ueber die Herstellung von Methen-Verbindungen der einfachsten nicht substituirten Kohlenwasserstoffe habe ich schon in einer früheren Abhandlung eingehender berichtet [1]). Diese Versuche waren aber nur als Vorarbeiten bestimmt, um eine ganze Reihe von Synthesen verwirklichen zu können, über die ich demnächst Mittheilung machen werde. Nachstehend soll eine solche Synthese zur Besprechung kommen, welche ein etwas allgemeineres Interesse beanspruchen darf.

In den verschiedenen Terpentinölsorten ist in wechselnder und stets nur kleiner Menge gewöhnlich ein Terpen, das β-Pinen oder Nopinen, enthalten, auf dessen Existenz man wohl durch gewisse Reactionen mit Sicherheit schließen kann, das von anderen stets gleichzeitig vorkommenden Kohlenwassenstoffen (namentlich

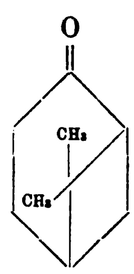
1) Annal. d. Ch. 347, 316.

von dem gewöhnlichen oder α-Pinen) zu trennen aber bislang nicht möglich ist und über dessen physikalische und sonstige Eigenschaften man daher noch nichts Zuverlässiges weiß. Um so wünschenswerther erschien es mir einen Kohlenwasserstoff, dem man die Formel eines β-Pinen:

```
            CH2
            ||
            C
          /   \
     H2C|  CH3  /|CH
        |   | /  |
     H2C| CH3/   |CH2
          \  |  /
            CH
```

zuzuschreiben hat, und der in optisch verschiedenen Modificationen existenzfähig sein sollte, künstlich aufzubauen, um seine Eigenschaften festlegen zu können.

Als Ausgangsmaterial für die Untersuchung wurde das Nopinon



gewählt, dessen Reactionsfähigkeit durch die neulich schon mitgetheilten Versuche[1]) bereits erwiesen war, und in welchem das doppelt gebundene Sauerstoffatom durch die Methen-Gruppe CH_2: zu ersetzen auf folgendem, in anderen Fällen schon erprobten Wege versucht wurde.

Nopinon wurde mit Bromessigester und Zink in Benzollösung unter den wiederholt von mir beschriebenen Bedingungen in Reaction gesetzt. Die Condensation vollzieht sich in normaler Weise. Auf die Isolierung des im ersten Schritt gemäß der Reaction:

---

1) Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. 1907, 232.

$$\text{Nopinon} + Zn + CH_2BrCO_2C_2H_5 + 2H_2O = \text{Oxyester} + Zn(OH)_2 + BrH$$

Nopinon: CO; CH_2, CH_3, CH; CH_2, CH_3, CH_2; CH

Oxyester: $CH_2CO_2C_2H_5$; C–OH; CH_2, CH_3, CH; CH_2, CH_3, CH_2; CH

sich bildenden Oxyesters wurde verzichtet, und nach Entfernung des Benzols dem Ester durch zweistündiges Erhitzen mit Kaliumbisulfat auf 150—160° Wasser entzogen.

Wie auf Grund der bei meinen erst erwähnten früheren Arbeiten gesammelten Erfahrungen angenommen werden konnte, tritt das Hydroxyl unter Herstellung einer Aethylenbindung nach der Seitenkette hin als H_2O aus und es entsteht ein ungesättigter Ester für den — falls der Vierring des bicyclischen Systems unverändert geblieben ist — nur die Formel

$CH.CO_2C_2H_5$; ‖; C; CH_2, CH_3, CH; CH_2, CH_3, CH_2; CH

in Betracht kommen kann.

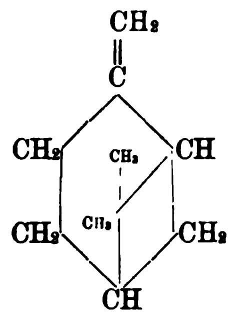
Bei der Verseifung wurde aus diesem Ester die freie Säure als eine syrupöse unter 13^{mm} zwischen 190—210° destillierende Flüssigkeit gewonnen. Ein Theil der noch einmal im Vacuum fractionierten Säure wurde in das Silbersalz verwandelt.

0.1790 Gr gaben 0.0667 Ag.

Berechnet für $C_{11}H_{15}O_2Ag$	Gefunden
Ag 37,60	37,26 %

Eine größere Menge der freien Säure wurde der Destillation unter gewöhnlichem Druck unterworfen. Dabei spaltet sich Kohlendioxyd ab und gemäß der Gleichung $C_{11}H_{16}O_2 = CO_2 + C_{10}H_{16}$

entsteht ein Terpen und zwar, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, ein bicyclisches Terpen mit einer Methen-Gruppe, in dem man erwarten konnte, das gesuchte β-Pinen



unter Händen zu haben.

Der Kohlenwasserstoff wurde zunächst durch Schütteln mit Natronlauge von anhaftender Säure befreit, durch Dampfdestillation gereinigt, getrocknet und schließlich über metallischem Natrium rectificiert. Die Ausbeute betrug aus je 30 Gramm Nopinon etwa 12 Gramm Kohlenwasserstoff. Fast die ganze Menge ging zwischen 155—161° über. Die Hauptmenge destillierte bei 158°.

Die physikalischen Eigenschaften des Kohlenwasserstoffs wurden mit Material, das aus verschiedenen Darstellungen stammte, wie folgt ermittelt:

1) $d = 0.8630, \quad n_D = 1.4699$ bei 20°
2) $d = 0.8630, \quad n_D = 1.4696$ „ 21°

Daraus folgt:

	Berechnet für		Gefunden	
	$C_{10}H_{16}\,|\!\!\overline{=}^2$	$C_{10}H_{16}\,|\!\!\overline{=}$	1.	2.
M =	45.24	43.53	43.96	43.93

Der Kohlenwasserstoff ist rechtsdrehend. Der unverdünnte Kohlenwasserstoff zeigte im 1 dm. Rohr bei 21°

$$\alpha_D = +13^{\circ}45', \text{ also } [\alpha]_D = +\mathbf{15{,}93}.$$

Für eine ätherische Lösung wurde gefunden;

$S = 1.1356, \quad L\ (\text{Aether}) = 7{,}188, \quad d = 0{,}737, \quad t = 20^{\circ},$
$p = 13{,}64\ \%, \quad l = 1\ \text{dm}, \quad \alpha = +1^{\circ}17'$

$$[\alpha]_D = +\mathbf{12{,}76^{\circ}}$$

Analyse:

0.1480 Gr. gaben 0.4775 CO_2 und 0.1577 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C 88.15	87.99
H 11.85	11.93

Der Kohlenwasserstoff bleibt auch bei sehr niederer Temperatur flüssig und besitzt einen ausgesprochenen Terpentinge-

ruch. Siedepunkt, Dichte und Molekularrefraction weisen gleichmäßig darauf hin, daß er sich von einem bicyclischen System mit einer Aethylenbindung ableitet.

Aus dem Verhalten des Terpens bei der Oxydation ist ferner mit Sicherheit der Schluß zu ziehen, daß die Verbindung eine Methen-Gruppe enthält.

Der synthetische Kohlenwasserstoff wurde unter den für die Gewinnung der Nopinsäure ausgearbeiteten Bedingungen [1]) mit Permanganat unter Zusatz von Aetznatron bei 0° oxydiert, dann nicht verbrauchter Kohlenwasserstoff abgeblasen, ausgeschiedener Braunstein abfiltriert und das Filtrat eingeengt. Es schied sich bei geeigneter Concentration eine sehr reichliche Menge schwer lösliches Natronsalz aus. Während man bei der Oxydation β-Pinenhaltigen Terpentinöls schon mit einer Ausbeute, von 5 % an schwerlöslichem Nopinsauren Natrium sehr zufrieden sein muß, lieferte das synthetische Präparat etwa den zehnfachen Betrag an schwerlöslichem Salz. Das gewonnene Salz ähnelte sehr dem nopinsauren Natrium aus Terpentinöl und zeigte insbesondere deutlich die Eigenschaft durch ein Stäubchen des letzteren zur Krystallisation angeregt zu werden.

Ein direkter Vergleich der beiden durch mehrfache Krystallisation gereinigten Salze ergab aber doch eine Verschiedenheit. Das Salz aus dem synthetischen Kohlenwasserstoff war etwas leichter löslich in Wasser und die Lösung erwies sich als stark rechtsdrehend. Dagegen sind wässrige Lösungen von nopinsaurem Natrium aus Terpentinöl linksdrehend.

Daß die Zusammensetzung des neuen Salzes aber die erwartete war, lehrte eine Analyse des aus dem Natriumsalz dargestellten Silbersalzes.

1) 0.2114 Gr. gaben 0.3171 CO_2 und 0.1002 H_2O und 0.779 Ag

2) 0.1014 Gr gaben 0.0376 Ag.

Berechnet für $C_{10}H_{15}O_3Ag$	Gefunden 1	Gefunden 2
C 41.23	40.91	—
H 5.19	5.30	—
Ag 37.08	36.85	37.08

Nun wurde aus dem umkrystallisierten und wieder in Wasser gelösten Natriumsalz durch Zusatz der genau für die Bindung des Metalls nöthigen Menge kalter verdünnter Schwefelsäure die organische Säure in Freiheit gesetzt und ausgeäthert. Die nach

1) Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. 1907, 234.

Verdunsten des Aethers zurückbleibende Säure kam beim Umkrystallisieren aus warmem Wasser — ganz wie Nopinsäure — erst ölig heraus und wurde durch ein Kryställchen Nopinsäure sofort zur Krystallisation gebracht. Viel besser krystallisiert man die Säure aus heißem Benzol um. Man erhält sie dann in Nadeln, welche nach mehrfachem Umkrystallisieren nach vorherigem ziemlich starkem Erweichen bei 154—155° schmolzen. In den Mutterlaugen fanden sich niedriger (110—122°) schmelzende Antheile, deren Menge aber nicht ausreichte, um sie für eine genaue Schmelzpunktsbestimmung genügend zu reinigen. Aetherische Lösungen der Säure erwiesen sich rechtsdrehend.

Abweichend von Nopinsäure verhält sich die bei 154—155° schmelzende Säure beim Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure. Während Nopinsäure nach v. Baeyer[1]) beim Erwärmen mit etwa 12 %iger Schwefelsäure auf dem Wasserbad unter Wasserverlust in Hydrocuminsäure übergeht, geht die neue Säure beim Erwärmen mit überschüssiger Schwefelsäure derselben Concentration zwar in Lösung, scheidet sich aber selbst nach mehrstündigem Erhitzen nach dem Erkalten der Flüssigkeit wieder unverändert aus.

Als α-Oxysäure characterisiert sich die bei 154° schmelzende aus dem Kohlenwasserstoff enstandene Säure durch folgendes Verhalten.

Das Natriumsalz wurde genau unter denselben Bedingungen, unter denen man Nopinsaures Natrium bequem in Nopinon überführen kann (l. c.), mit Uebermangansäure der Oxydation unterworfen. Es resultierte ein schon im Kühlrohr erstarrendes, von Nopinon also verschiedenes, Keton $C_9H_{14}O$. Die im Aussehen und Geruch sehr an Camphenylon und Fenchocamphoron erinnernde Verbindung zeigte nach dem Abpressen einen um 60° liegenden (noch nicht scharf bestimmten) Schmelzpunkt. Das Semicarbazon schmolz bei 206—207°.

0.1513 gr gaben 0.3411 CO_2 und 0.1226 H_2O

	Berechnet für $C_{10}H_{17}ON_3$	Gefunden
C	61.46	61.49
H	8.78	9.08

Mit Hülfe der Bertram-Walbaum'schen Hydratations-Methode läßt sich der Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{16}$ so gut wie quantitativ in einen krystallisierten, bei 62—63° schmelzenden gesättigten Alkohol, $C_{10}H_{17}OH$, von Campherartigem Geruch verwandeln, der von 202—204° siedet.

1) Ber. **29**, 1926.

0.1269 gr gaben 0.3621 CO_2 und 0.1341 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
C 77.82	77.85
H 11.82	11.77

Bei der Oxydation mit Chromsäure erhält man aus dem Alkohol $C_{10}H_{18}O$ sehr leicht ein Keton $C_{10}H_{16}O$, das nach Campher, dabei aber auch ein wenig wie Menthon riecht, oberhalb 0° flüssig ist, bei sehr niederer Temperatur aber erstarrt. Das bei 220 bis 221° schmelzende Semicarbazon krystallisiert in verfilzten, in Alkohol ziemlich löslichen Nadeln.

0.1300 gr gaben 0.3015 CO_2 und 0.1086 H_2O

Berechnet für $C_{11}H_{19}ON_3$	Gefunden
C 63.08	63.26
H 9.15	9.34

Das erinnert sehr an das Verhalten der Terpene, welche Ossian Aschan jüngst aus den flüssigen Hydrochloriden aus amerikanischem Rohpinen isoliert hat [1]).

Aus den im Vorstehenden mitgetheilten Beobachtungen geht hervor, daß der aus dem Nopinon synthetisch gewonnene Kohlenwasserstoff im allgemeinen ein Verhalten zeigt, wie man es von einem β-Pinen erwarten durfte. Um so bemerkenswerther ist die aus allen angegebenen Feststellungen sich ergebende überraschende Thatsache, daß der synthetische Kohlenwasserstoff mindestens physikalisch, wahrscheinlich aber sogar chemisch verschieden von dem β-Pinen (Nopinen) ist, welches im Terpentinöl vorkommt und beim Abbau das zur Synthese benutzte Nopinon liefert.

Daraus folgt, daß bei dem Aufbau des künstlichen β-Pinens aus Rechts-Nopinon jedenfalls eine Konfigurationsverschiebung eintritt. Vielleicht eine ähnliche Bindungsverschiebung wie sie beim Uebergang von Pinen in Camphen anzunehmen ist. Die Reaction würde damit an Interesse mehr gewinnen als verlieren, denn vielleicht gelingt es durch ihr näheres Studium mehr Licht in die noch immer nicht genügend geklärten Beziehungen zwischen Pinen und Camphen, sowie Isoborneol und Borneol zu bringen.

Schon die Festlegung der Thatsache, daß der neue Methenkohlenwasserstoff bei der Hydratation so glatt einen secundären und nicht einen tertiären Alkohol liefert, scheint mir für die Erklärung mancher Erscheinungen von Bedeutung zu sein.

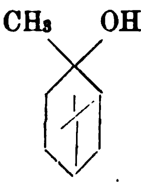
Bei der Untersuchung, welche fortgesetzt wird, habe ich mich der bewährten Hülfe meines Assistenten Dr. Hugo Köhler zu erfreuen gehabt.

---

1) Ber. **40**, 2750.

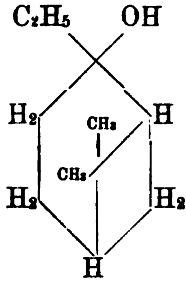
II. Ueber die Synthese homologer Verbindungen der Dipenten-Reihe.

Aus dem Nopinon kann man, wie ich neulich (l. c.) zeigte, sehr leicht das Methylnopinol (Pinenhydrat) synthetisieren: Dieser tertiäre Alkohol:



ließ sich einerseits glatt in Terpinhydrat und in Dipentendichlorhydrat überführen, andererseits in Terpinolen und in Terpinen abwandeln. Wahrscheinlich entsteht unter richtigen Bedingungen dabei auch actives Limonen und α-Pinen. Diese Kohlenwasserstoffe konnten aber noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden.

Die besprochenen Reaktionen lassen sich nun zur Gewinnung von Substanzen ausnützen, welche zu den genannten wichtigen Terpenverbindungen im Verhältnis einfacher Homologie stehen. Neulich wurde schon das um 220° siedende, schön krystallisierende und bei 43—45° schmelzende Aethylnopinol



beschrieben und das zugehörige bei 75—76° schmelzende Homo-cis-Terpinhydrat

C_2H_5 OH

H_2 H_2

H_2 H_2

C.OH

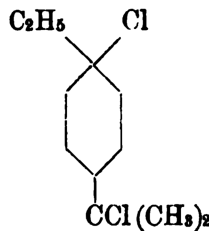
CH_3 CH_3

Aus letzterem erhält man nun durch Umsetzung mit Eisessig-Halogenwasserstoffsäure sehr glatt die zugehörigen krystallisierten Bihalogenverbindungen. Dieselben Substanzen entstehen

auch (aber verunreinigt durch flüssige Beimengungen), wenn man Aethylnopinol mit Eisessig- Halogenwasserstoff behandelt.

Die Verbindungen haben folgende Eigenschaften:

Das Bihydrochlorid



ähnelt im Aussehen und Geruch dem Dipentenbihydrochlorid zum Verwechseln. Es schmilzt bei 63—64°

0.1064 gr gaben 0.1351 AgCl

berechnet für $C_{11}H_{20}Cl_2$	Gefunden
Cl 31.79	31.39

Das Bibromhydrat $C_{11}H_{18}.2HBr$ schmilzt bei 82—84° unter vorherigem Sintern.

Das Bijodhydrat $C_{11}H_{18}.2HJ$ bildet sich sehr schnell und besteht aus ziemlich beständigen bei 63—64° schmelzenden Krystallen.

0.1228 gr geben 0.1422 Ag J

berechnet für $C_{11}H_{20}J_2$	Gefunden
J 62.53	62.59

Das bei 63—64° schmelzende Bichlorhydrat wurde, um den zugehörigen Kohlenwasserstoff $C_{11}H_{18}$ zu gewinnen, mit Anilin in Umsetzung gebracht und dabei so verfahren, wie für Abscheidung von Dipenten aus Dipentenbichlorhydrat neulich beschrieben worden ist[1]). Es wurde ein Kohlenwasserstoff von folgenden Eigenschaften erhalten: Siedepunkt: 201°—202°

$d = 0.8545$, $n_D = 1.4802$ bei 18°

berechnet für $C_{11}H_{18}\,\Gamma^2$	Gefunden
M = 49.84	49.89

Beim Bromieren in Eisessiglösung unter Abkühlung liefert der Kohlenwasserstoff mit größter Leichtigkeit ein festes Tetrabromid, das nach dem Umkrystallisieren aus Essigester, in dem es ziemlich löslich ist, bei 124—125° schmilzt.

0.0970 gr. gaben 0.1558 Ag Br.

berechnet für $C_{11}H_{18}Br_4$	Gefunden
Br 68.05	68.35

1) Ber. **40**, 603.

Mit Amylnitrit und Salzsäure in Eisessiglösung färbt sich der Kohlenwasserstoff sofort blaugrün und liefert ein leicht lösliches krystallisiertes Nitrosochlorid, welches unter Salzsäureabspaltung in ein Oxim übergeht, aus dem sich beim Zerlegen mit Säuren ein nach Carvon riechendes Oel abscheidet, welches jedenfalls das höhere Homologe dieses Ketons vorstellt.

Die nähere Untersuchung all dieser Producte steht noch aus. Man darf auf Grund der vorliegenden Beobachtungen aber schon schließen, daß der beschriebene Kohlenwasserstoff $C_{11}H_{18}$ in der Hauptmenge aus dem höheren homologen Dipenten

CH_3CH_2
C
H_2C CH
H_2C CH_2
CH
$CH_3.C:CH_2$

besteht, dem vielleicht etwas von den Isomeren der Terpinolen-Reihe beigemischt ist.

Da nun kaum etwas im Wege stehen wird, die vorstehend beschriebenen Verbindungen auch sonst noch ganz analog wie z. B. cis-Terpinhydrat, Dipentendihydrochlorid und Dipenten abzuwandeln, also neue Kohlenwasserstoffe, Terpineole, Carvone u. s. w. daraus herzustellen, so sieht man, ein wie weites Gebiet für die Forschung sich hier neu eröffnet.

Der Aufbau noch höherer homologer tertiärer Alkohole aus dem Nopinon vollzieht sich, soweit die bisherigen Erfahrungen reichen, allerdings nicht mehr so glatt wie die der Methyl- und Aethyl-Verbindung.

Das n-Propylnopinol

C_3H_7 OH
H_2 CH_3 H
CH_3
H_2 H_2
H

wurde bei der Umsetzung von Nopinon mit normal-Propyljodid und Magnesium nach Grignard nur in mangelhafter Ausbeute erhalten.

Als sehr störend erwies sich nämlich bei der Darstellung des tertiären Alkohols die gleichzeitige Entstehung des bei 101° schmelzenden Nopinols $C_9H_{16}O$, die kaum allein aus der Gegenwart von etwas Feuchtigkeit bei der ersten Reaktion erklärt werden kann, sondern die wahrscheinlich auf eine zum Theil anormal verlaufende Zersetzung des Zwischenproducts

C_3H_7 OMg J

zurückzuführen ist, die sich im Sinne der Gleichung:

$$\text{OMgJ} + \text{H OH} + \text{OH H} =$$

$$\text{C}_3\text{H}_7$$

$$\text{OH H} + C_3H_7OH + MgO + JH$$

abzuspielen scheint.

Das nach dem üblichen Verfahren isolierte Product der Umsetzung von der Grignard'schen Reaction siedete gar nicht constant in der Hauptmenge von 229—235°. Die Fractionen bis 225° setzten beim Abkühlen viel Nopinol ab. Die Fraction 225—235° lieferte beim Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure ein Terpin, das nach dem Ausziehn mit Essigester nicht zum Erstarren zu bringen war, aber mit Chlorwasserstoff-Eisessig ein gut krystallisierendes Bichlorhydrat gab, dessen Untersuchung noch aussteht, in dem man aber mit Sicherheit erwarten darf, die Verbindung $C_{12}H_{20}.2HCl$ unter Händen zu haben.

III. Über Synthesen in der Terpinenreihe.

In ganz ähnlicher Weise, wie das Nopinon läßt sich das Sabinaketon[1])

O

$CH(CH_3)_2$

zu Synthesen verwerthen.

1) Semmler, Ber. ch. Ges. **33**, 1465; **35**, 2046.

1) Synthese von Terpinenterpin (1.4 Bioxy-p-Terpan) vom Schmelzpunkt 137°.

Methylmagnesiumjodid wurde in ätherischer Lösung mit Sabinaketon in Umsetzung gebracht. Nach dem üblichen Verfahren gelang es als Produkt der Umsetzung den tertiären Alkohol

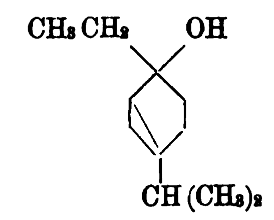
CH_3 OH

[illegible]

pin vom Schmelzpunkt 137° durch Extraction mit Essigäther leicht gewonnen werden und zeigt alle von mir früher schon angegebenen[1]) Eigenschaften.

2) Synthese von Homo-Terpinenterpin und homologer Terpinendihydrohalogenide.

Aethylmagnesiumjodid und Sabinaketon wurden in bekannter Weise in ätherischer Lösung in Umsetzung gebracht. Da der entstehende Alkohol gegen Säuren empfindlich ist (vgl. das eben über Sabinenhydrat Mitgetheilte), wurde nach beendeter Reaction die ätherische Lösung nicht in üblicher Weise mit Säure geschüttelt, sondern unmittelbar der Wasserdampfdestillation unterworfen. Der zuerst übergehende Aether wurde für sich aufgefangen, der dann folgende synthetische Alkohol ausgeäthert und nach dem Trocknen mit Pottasche im Vacuum fractioniert. Die im Vacuum zwischen 100—104° siedende Fraction stellt annähernd reines[2]) Aethylsabinaketol

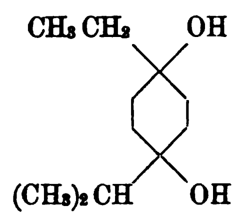


vor.

0.1160 gr geben 0,3348 CO_2 und 0.1260 H_2O

Berechnet für $C_{11}H_{20}O$	Gefunden
C 78.49	78.72
H 11.99	12.18

Wenn man das Methylsabinaketol mit verdünnter Schwefelsäure schüttelt, entsteht unter Wasseraddition das homologe Terpinenterpin.



---

1) Ber. **40**, 578—579.

2) Das Präparat enthält auch etwas ungesättigte Bestandteile.

Diese Verbindung ähnelt dem Terpinenterpin ganz außerordentlich, schmilzt aber etwas höher, nämlich bei 141—142°. Bei langsamem Erhitzen sublimiert sie in schönen schneeweißen Blättchen, bei der Umsetzung mit Eisessigbromwasserstoff lieferte sie glatt das bei 88—89° schmelzende Bibromhydrat $C_{11}H_{18}.2HBr$.

Wird Aethylsabinaketol mit Eisessig - Halogenwasserstoffsäuren in Umsetzung gebracht, so entstehen die höheren Homologen der entsprechenden Terpinen-Verbindungen von folgenden Eigenschaften:

Bihydrochlorid, $C_{11}H_{18}.2HCl$. Glänzende Tafeln vom Schmelzpunkt 67—68°

0.2090 gr gaben 0.2684 AgCl

Berechnet für $C_{11}H_{20}Cl_2$	Gefunden
Cl 31.78	31.75

Bibromhydrat, $C_{11}H_{18}.2HBr$, Schmelzpunkt 88—89°.

Bijodhydrat, $C_{11}H_{18}.2HJ$. Krystallisiert aus Methylalkohol in schönen prismatischen Krystallen vom Schmelzpunkt 89—90°

0.2630 gr gaben 0.3034 AgJ

Berechnet für $C_{11}H_{20}J_2$	Gefunden
J 62.53	62.36

Nach den nunmehrigen Feststellungen kennt man jetzt zwei Gruppen wohl characterisierter Halogen-Verbindungen einerseits der Dipenten-, andererseits der Terpinen-Reihe, die ich mit den zugehörigen Schmelzpunkten in folgender Tabelle zusammenstelle:

	Dipenten-Reihe	Terpinen-Reihe
$C_{10}H_{16}.2HCl$	49—50°	52°
$C_{11}H_{18}.2HCl$	63—64°	67—68°
$C_{10}H_{16}.2HBr$	64°	58—59°
$C_{11}H_{18}.2HBr$	82—84°	88—89°
$C_{10}H_{16}.2HJ$	77° u. 78—79°	76°
$C_{11}H_{18}.2HJ$	63—64°	89—90°

3) Über die Synthese eines Terpinen.

Sabinaketon $C_9H_{14}O$ wurde mit Bromessigester und Zink in Benzollösung genau unter denselben Bedingungen umgesetzt, wie es für andere Ringketone beschrieben ist. Aus dem zuerst entstehenden Oxyester wurde Wasser abgespalten, der ungesättigte Ester verseift und die freie ungesättigte Säure isoliert.

In Bruttoformeln ausgedrückt, verläuft die Reaction wie immer in folgenden Phasen:

1) $C_9H_{14}O + Br\,CH_2CO_2C_2H_5 + Zn + H_2O$

$$= ZnO + BrH + C_9H_{14}\begin{matrix}OH\\ CH_2CO_2C_2H_5\end{matrix}$$

2) $C_9H_{14}\begin{matrix}OH\\ CH_2CO_2C_2H_5\end{matrix} = H_2O + C_9H_{14}:CHCO_2C_2H_5$

3) $C_9H_{14}:CHCO_2C_2H_5 + H_2O = C_2H_5OH + C_9H_{14}:CHCO_2H.$

Die ungesättigte Säure $C_9H_{14}:CHCO_2H$ fällt aus dem bei der Verseifung des rohen Esters erhaltenen Salz durch Zusatz von verdünnter Schwefelsäure zunächst ölig aus, erstarrt aber nach der Destillation im Vacuum. Ausbeute aus 20 gr Keton 15 gr Säure.

Nach dem Abgießen auf Thonplatten schmolz die durch Krystallisation schwer zu reinigende Säure bei 47—48°.

Zur Analyse kam das Silbersalz:

0.1453 gr gaben 0.0543 Ag

Berechnet für $C_{11}H_{15}O_2Ag$	Gefunden
Ag 37.60	37.37

Bei langsamer Destillation unter gewöhnlichem Druck spaltet die Säure Kohlendioxyd ab und es destillirt ein Kohlenwasserstoff über, der mit Natronlauge gewaschen, mit Wasserdampf übergetrieben und nach dem Trocknen über Natrium destilliert wurde.

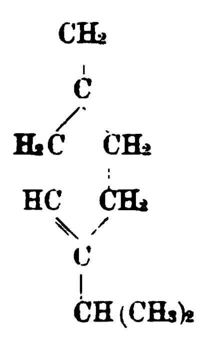
Fast die Gesamtmenge ging zwischen 175—179° über, die Hauptmenge zeigte einen Siedepunkt bei 176°. Ferner wurde bestimmt $d = 0.843$, $n_D = 0.4773$.

Berechnet für $C_{10}H_{16}f^{2}$	Gefunden
M = 45.24	45.61

Es liegt also ein Kohlenwasserstoff mit zwei Aethylenbindungen vor.

Daß dieser Kohlenwasserstoff ein Terpinen ist, folgt aus seinem sonstigen Verhalten.

Mit Chlorwasserstoff-Eisessig liefert er in ziemlich guter Ausbeute das bei 52° schmelzende Terpinendihydrochlorid. In bekannter Weise mit salpetriger Säure in Berührung, entsteht daraus nach einiger Zeit Terpinennitrosit, welches durch das bei 154° schmelzende Nitrolpiperidid identificirt werden konnte. Der Kohlenwasserstoff soll demnächst in größerer Menge [bisher standen nur ca. 8 Gramm reines Material zur Verfügung] dargestellt und näher studiert werden. Es läßt sich aber schon jetzt mit ziemlicher Sicherheit annehmen, daß man es mit dem β-Terpinen



zu tun hat. Während der oben angegebenen Reactionsfolge verschiebt sich die intracyclische Bindung des Sabinaketons zu einer Aethylenbindung, während die Wasserabspaltung aus dem Oxyester, wie meistens, nach der Seitenkette hin erfolgen dürfte.

Der beschriebenen ungesättigten Säure darf man daher die Formel

CH.CO_2H
‖
H_2 H_2
H H_2
CH$(CH_3)_2$

zuschreiben, und annehmen, daß sie durch CO_2-Verlust β-Terpinen giebt. Denn es hat sich in den jetzt schon recht zahlreichen Beispielen, die ich beigebracht habe, als eine bisher ausnahmslos bestätigte Regel herausgestellt, daß die Säuren mit semicyclischer Bindung von obigem Typus bei der Kohlendioxyd-Abspaltung Methen-Verbindungen liefern und daß sich bei diesem Vorgang eine Verlegung der Aethylenbindung in den Kern nicht vollzieht. Es sind im Gegenteil sogar schon Beispiele dafür bekannt, daß mit Hülfe der Bromessigester-Synthese aus Ketonen aufgebaute ungesättigte Säuren, welche die Aethylenbindung unzweifelhaft im Kern tragen, während der Kohlensäureabspaltung die Bindung gern nach der Seitenkette hin verschieben[1]).

Auch der Umstand, daß die für den Kohlenwasserstoff gefundene Molekularrefraction den berechneten Wert um 0,37 übersteigt, spricht für das Vorhandensein der semicyclischen Bindung. Es wird natürlich versucht werden, die Zulässigkeit der Annahme

---

1) Ber. ch. Ges. 39, 2504, Annal. 353, 286.

noch auf experimentellem Wege weiter zu prüfen. Bis dahin muß die obige Formel als die bei weitem wahrscheinlichste gelten.

In Berührung mit Säuren verlegen nun die Methen-Verbindungen die Doppelbindung leicht in den Kern. Methen-Cyklokexan z. B. wird — wie ich durch besondere Versuche festgestellt habe, von denen bei anderer Gelegenheit die Rede sein wird — unter dem Einfluß von Säuren leicht zu Methyl-Cyklohexen invertiert[1]:

CH_2 → CH_3

Daher ist es verständlich und war zu erwarten, daß β-Terpinen durch salpetrige Säure in das gewöhnliche Terpinennitrosit sich überführen läßt, welches nach den jetzt vorliegenden Feststellungen sich von dem α-Terpinen

CH_3
C
HC CH_2
HC CH_2
C
$CH(CH_3)_2$

herleitet.

Bei der Durchführung der Synthesen aus Sabinaketon, welche noch fortgesetzt werden, bin ich in vortrefflicher Weise durch Herrn Dr. Friedrich Boedecker unterstützt worden.

IV. Ueber die Synthese von Anethol aus Anisaldehyd und von Isosafrol aus Piperonal.

(Mitbearbeitet von Edgar Evans.)

In zahlreichen Fällen hat sich mir nunmehr die Versuchsanordnung bewährt, die ich für die Synthesen empfohlen habe[2], welche die Reaction von Reformatzky und Saytzeff (Wechsel-

1) Man vergleiche auch Ber. 39, 2505.

2) Annal. d. Ch. 323, 138 (1902); 347, 316. (1906).

wirkung von halogenisierten Säureestern mit Aldehyden oder Ketonen bei Gegenwart von Zink) zum Ausgangspunkt nehmen. Die vorgeschlagene Verwendung von Benzol als Verdünnungsmittel bei jener Reaction ist auf die Ausbeuten und die Reinheit der entstehenden Producte von allergünstigstem Einfluß. Das hat sich namentlich auch bei der Verwendung von Aldehyden als Ausgangssubstanzen gezeigt. Die folgenden außerordentlich glatt verlaufenden Umsetzungen bieten dafür neue Beispiele.

1) Synthese von Anethol.

10 gr Anisaldehyd wurden mit 14 gr Brompropionsäureaethylester, gelöst in 40 ccm Benzol mit 5 gr granuliertem Zink in Umsetzung gebracht. Es resultierten 15 gr des Oxyesters

$$CH_3O.C_6H_4CH\begin{matrix}OH\\CH(CH_3).CO_2C_2H_5\end{matrix},$$

Aus der unter 13mm zwischen 235—245° aufgefangenen Fraction wurde ohne weiteres durch 2stündiges Erhitzen mit der doppelten Menge Kaliumbisulfat auf 150° Wasser abgespalten. Der entstandene ungesättigte Ester

$$CH_3O.C_6H_4CH:C(CH_3).CO_2C_2H_5$$

(Siedepunkt der Hauptmenge 170—180° unter 25mm) wurde zu der Anisyl- αMethyl-Acrylsäure

$$CH_3O.C_6H_4CH:C(CH_3)CO_2H$$

verseift, von der 7,3 gr erhalten wurden. Die Säure, welche nach dem Umkrystallisieren aus Aceton bei 157° schmolz, ist bereits von W. H. Perkin sen. im Verlauf seiner klassischen Arbeiten über die Aldehydcondensationen durch Erhitzen von Anisaldehyd mit Propionsäureanhydrid erhalten worden. Perkin giebt den Schmelzpunkt zu 154° an und berichtet ferner von der Säure[1]: „When heatet to boiling, it decomposes, yielding an oil, which has the odour of oil of anise and when cooled becomes crystalline".

In der That zerfällt die Säure bei langsamer Destillation (etwa zu 50 %) unter CO_2-Abgabe und Bildung von Anethol $CH_3O.C_6H_4CH:CHCH_3$.

Das beim Abkühlen schnell erstarrende Anethol konnte durch den Siedepunkt — 232° — und Ueberführung in das bei 121° schmelzende Anetholnitrit leicht identificirt werden.

1) Journ. Chem. Soc. 31, 411—413 (1877). Ueber die Aufklärung der Konstitution der Perkinschen Säure s. Annal. 255, 294—295.

2) Synthese von Isosafrol.

18 gr Piperonal und 21 gr α-Brompropionsaures Aethyl wurden in der vierfachen Menge Benzol gelöst mit 8 gr Zink umgesetzt.

Es wurden 27 gr eines zwischen 180—210° siedenden Products erhalten, das, wie in dem vorigen Beispiel angegeben ist, mit Kaliumbisulfat erwärmt und dann verseift wurde. Die Ausbeute betrug 16 gr Piperonyl-α-Methyl-Acrylsäure

$$CH_2<^O_O>C_6H_3CH:C(CH_3)CO_2H.$$

Diese Säure ist sehr schwer löslich in Aceton, Methylalkohol, Benzol und Essigester und kann durch Waschen mit diesen Lösungsmitteln von anhaftenden röthlich gefärbten Verunreinigungen leicht befreit werden. Beim Ueberhitzen verliert die Säure Kohlendioxyd. Die Reaction verläuft aber nicht glatt. Immerhin konnte aus dem Destillat nach dem Waschen mit Alkali und folgender Reinigung mit Wasserdampf genügend Isosafrol

$$CH_2{}^O_O>C_6H_3CH:CH\,CH_3$$

erhalten werden, um es durch den Siedepunkt — 244° — und Ueberführung in das nach dem Umkrystallisieren aus Benzol bei 128° schmelzende Nitrit zu identificieren.

V. Ueber das Vorkommen von Sabinen im Ceylon-Cardamomenöl und im Majoranaöl.

Wie ich Annalen d. Chemie **350**, 168 mitgetheilt habe, findet sich im Cardamomenöl ein etwa zwischen 165—167° siedender Kohlenwasserstoff (d = 0,846), welcher in Berührung mit Eisessig-Salzsäure Terpinenbihydrochlorid vom Schmelzp. 52° liefert und den ich für Sabinen ansprach. Der Versuch das Sabinen durch Ueberführung in das krystallisierte Sabinenglycol nachzuweisen verlief aber resultatlos. Inzwischen hat mich die Erfahrung gelehrt, daß sich diese Reaction für den Nachweis von Sabinen nicht eignet, wenn der Kohlenwasserstoff nicht ziemlich rein vorliegt. Das Glycol wird nämlich durch Fremdsubstanzen leicht am Krystallisieren verhindert und dadurch der Nachweis des Vorhandenseins erschwert. Viel leichter ist es, das Sabinen auch wo der Kohlenwasserstoff als Gemengtheil vorliegt, durch Ueberführung in die Sabinensäure nachzuweisen. Auf diesem Wege gelang es denn auch festzustellen, daß die erwähnte Kohlenwasser-

stoff-Fraction des Cardamomenöls wirklich Sabinen enthält. 10 gr des Materials von dem angegebenen Siedepunkt wurden bei 0° mit der berechneten Menge Permanganat oxydirt, die bei der Oxydation erhaltenen Säuren in üblicher Weise isoliert und deren ätherische Lösung mit Natronlauge durchgeschüttelt. Das sich fest abscheidende Natriumsalz wurde abfiltrirt, durch verdünnte Schwefelsäure zersetzt und die erhaltene Säure wiederum mit Aether aufgenommen. Nach dem Verdunsten des Aethers hinterblieb eine krystallinische Säure, welche zuerst bei 53—54°, nach mehrtägigem Verweilen im Exsiccator aber bei 56—57° schmolz und bei einem Vergleich mit der aus Sabinaöl dargestellten Sabinensäure sich mit dieser als völlig identisch erwies.

Genau dasselbe Resultat wurde mit einer entsprechend siedenden Fraction des Majoranaöls erzielt. Die bei der Oxydation des Kohlenwasserstoffs erhaltene Säure stimmte gleichfalls mit Sabinensäure im Schmelzpunkt und Verhalten überein. Die Säure wurde in das Silbersalz übergeführt und dieses analysiert.

0.1733 gr gaben 0.0638 Ag.

Berechnet für $C_{10}H_{15}O_3Ag$	Gefunden
Ag 37.08	36.82

Nachdem nunmehr der Gehalt von Sabinen im Cardamomenöl und Majoranaöl festgestellt ist, wird man annehmen dürfen, daß der in beiden Oelen schon längst nachgewiesene Terpinen-Gehalt (s. Weber, Annal. d. Chem. **238**, 98 u. W. Biltz, Ber. **32**, 995) auf eine Umwandelung des Sabinen in Terpinen zurückzuführen ist. Ueber die Beziehungen der beiden Kohlenwasserstoffe und den leichten Uebergang von Sabinen und Terpinen habe ich vor kurzem berichtet[1]).

Bei den vorstehenden Feststellungen hatte ich mich der Mitarbeit von Dr. Wilh. Kempe zu erfreuen.

VI. Ueber isomere Camphene und eine neue Camphencamphersäure.

(Mitbearbeitet von Dr. Paul Gutmann.)

Während man früher allgemein der Ansicht war, daß man das künstlich aus Pinen oder aus Borneol gewinnbare und das in einigen ätherischen Oelen natürlich vorkommende Camphen als chemisch identische und ganz einheitliche Körper zu betrachten habe, ist es durch die sorgfältigen Untersuchungen von Zien-

1) Annal. d. Chem. **350**, 162; Ber. chem. Ges. **40**, 592.

kowski und Moycho[1]) ziemlich wahrscheinlich geworden, daß das künstliche Camphen ein Gemenge von chemisch verschiedenen Kohlenwasserstoffen vorstellt. Ueber natürliches Camphen liegen bereits einige Angaben vor, aus welchen hervorgeht, daß der Schmelzpunkt dieses Kohlenwasserstoffs mehrfach niedriger gefunden ist als der des synthetischen. Bei der großen Schwierigkeit das Camphen aus Gemengen ganz rein abzuscheiden, könnte man den niedrigeren Schmelzpunkt auf Rechnung von Verunreinigungen setzen. Zu entscheiden war die Frage, ob man es hier mit einem besonderen Kohlenwasserstoff zu thun habe, nur durch eine genaue chemische Untersuchung.

Durch die Freundlichkeit der Firma Dr. Mehrländer und Bergmann in Hamburg waren wir in Besitz eines „sibirischen Fichtennadelöls" gekommen, welches reich an Bornylacetat ist und in seinen niedrigst siedenden Fractionen ein Camphen enthält[2]). Dies Camphen ließ sich am bequemsten auf die Weise isolieren, daß aus den Fractionen vom Siedepunkt 156—165°, welche vorher zur Zerlegung der darin enthaltenen Ester mit alkoholischem Alkali behandelt waren, die am leichtesten angreifbaren Antheile durch Schütteln mit alkalischer Permanganatlösung fortoxydiert und der mit Wasserdampf abgeblasene Rückstand niederen Temperaturen ausgesetzt wurde. Das Camphen scheidet sich dann krystallinisch aus, wird abgesaugt und durch Destillation über Natrium und nochmaliges fractioniertes Ausfrieren weiter gereinigt.

Ein auf diesem Wege gewonnenes Präparat zeigte folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 160—161°, Schmelzpunkt 39°, d = 0,8555 bei 40°, n_D = 1.46207 bei 40°. Daraus:

$$M = 43{,}71 \text{ (ber. für } C_{10}H_{16}\overline{\ } = 43.53).$$

Das Camphen besitzt also eine Aethylenbindung. Der Kohlenwasserstoff ist links drehend.

$$S = 1{,}0268, \quad L \text{ (Aether)} = 8{,}0074, \quad d = 0{,}700, \quad t = 18^\circ$$
$$p = 11{,}36\,\%, \quad d = 1\text{ dm}, \quad \alpha_D = -6^\circ 45'$$
$$[\alpha]_D = -84^\circ{,}9.$$

0,2497 gr gaben 0,8050 CO_2 und 0,2630 H_2O.

1) Annal. 340, 17.

2) Man vergleiche dazu: Bertram u. Walbaum, J. pr. Ch. 49, 8 (1894); Schindelmeiser, Centralbl. 1903, I, 835; Golubew, Centralbl. 1888, 1622; 1905, I, 95.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C 88,23	87,92
H 11,76	11,70

Wird dies Camphen mit Permanganat unter den von G. Wagner bei Anwendung von künstlichem Camphen eingeschlagenen Bedingungen oxydiert, so gewinnt man eine mit der bekannten Camphencamphersäure[1]) isomere Säure von folgenden Eigenschaften.

Die Säure krystallisiert in Nädelchen oder Blättchen vom Schmelzpunkt 142°, ist leicht löslich in Alkohol und warmem Benzol, schwerer in Aether und in Chloroform, sehr schwer löslich in kaltem, leichter löslich in kochendem Wasser. Die Lösungen sind schwach links drehend.

$$S = 3{,}2042, \quad L\ (\text{Alkohol}) = 12{,}1632, \quad d = 0{,}861, \quad t = 16^0$$
$$p = 20{,}85\ {}^0/_0, \quad l = 2\ \text{dm}, \quad \alpha_D = -0^0 25'$$
$$[\alpha_D] = -1^0{,}166.$$

Analyse der freien Säure:

0,1576 gr gaben 0,3491 CO_2 und 0,1159 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}O_4$	Gefunden
C 60,00	60,41
H 8,00	8,17

Analyse des Silbersalzes:

0,2059 gr gaben 0,1070 Ag.
0,2107 gr gaben 0,2242 CO_2 und 0,0679 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4Ag_2$	Gefunden
C 28,98	29,02
H 3,38	3,58
Ag 52,17	51,97

Durch Umsetzung mit Phosphortrichlorid wurde die freie Säure in das Chlorid und dieses durch Behandlung mit gasförmigem Ammoniak in ätherischer Lösung in das Amid verwandelt.

Diese Verbindung krystallisierte aus heißem Wasser in Nadeln vom Schmelzpunkt 197°.

0,1655 gr gaben 0,3652 CO_2 und 0,1340 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_2N_2$	Gefunden
C 60,60	60.18
H 9,09	8,99

1) Vergl. Annal. **340**, 48.

Das auf analogem Wege dargestellte Dianilid, das unlöslich in Wasser und schwer löslich in Alkohol ist, schmolz bei 218°.

0,1501 gr gaben 0,4129 CO_2 und 0,1031 H_2O.

Berechnet für $C_{22}H_{26}O_2N_2$	Gefunden
C 75,43	75,02
H 7,43	7,63

Wenn man die Säure vom Schmelzpunkt 142° in Chloroform suspendiert mit Acetylchlorid in Berührung bringt, so entsteht ein Anhydrid, welches bisher nur in syrupöser Form erhalten wurde, sich aber mit Anilin zu einer Anilsäure umsetzen ließ, welche gleichfalls noch nicht in gut characterisierter Form abgeschieden werden konnte.

Bei der Destillation des Kalksalzes der Säure $C_{10}H_{16}O_4$, Schmelzp. 142°, konnte ein Keton nicht erhalten werden.

Die eben beschriebene Säure $C_{10}H_{16}O_4$ ähnelt der schon bekannten Camphencamphersäure, ist von dieser aber sicher verschieden, wie sich aus der Zusammenstellung der folgenden Schmelzpunkte ergiebt:

	Verbindungen aus	
	künstlichem Camphen	natürlichem Camphen Schmelzp. 39°
Säure $C_{10}H_{16}O_4$	136° bis höchstens 137°,5	142°
Diamid	222°	197°
Dianilid	210°	218°

Was die Ausbeute an Camphencamphersäure aus dem natürlichen Camphen betrifft, so konnten aus 10 gr reinem Camphen 3,6 gr bei 142° schmelzende Säure isoliert werden.

Neben der Camphenscamphersäure wurde das Vorhandensein sehr kleiner Mengen eines Glycols unter den Oxydationsprodukten nachgewiesen, ferner in geringer Menge eine Säure, welche ein schwer lösliches Natriumsalz gab.

Da vorläufig noch zu wenig von den letzterwähnten Substanzen zur Verfügung stand, muß ihre Natur noch dahin gestellt bleiben und also auch, ob ihre Entstehung sich nur durch die Anwesenheit eines Methen-Kohlenwasserstoffs erklären lassen wird. Die überwiegende Bildung der zweibasischen Camphencamphersäure aus dem natürlichen Camphen ist jedenfalls auffallend und spricht zunächst nicht gerade für das Vorhandensein einer semicyclischen Bindung, denn nach allen Erfahrungen, die man bei Verbindungen gemacht hat, deren Konstitution als einheitliche Methen-Kohlenwasserstoffe sicher gestellt ist, geben diese Substanzen bei entsprechender Oxydation mit Permanganet stets in nicht zu über-

sehender Menge und meist sogar als Hauptproduct α-Oxysäuren. Das natürliche Camphen läßt sich übrigens mit Hülfe der Bertram'schen Reaktion ebenso leicht in Isoborneol überführen, wie das künstliche.

In ätherischer Lösung mit Chlorwasserstoffgas behandelt, lieferte es ein festes Hydrochlorid. Wurde diesem Chlorid mit Hülfe von Anilin Salzsäure entzogen, so erhielt man ein Camphen vom Schmelzpunkt 51°.

Beim Bromieren nach Reychler[1]) lieferte das bei 39° schmelzende Camphen ein bei 89° schmelzendes Bibromid.

Wir haben es in dem natürlichen Camphen also augenscheinlich nur mit einer physikalisch-isomeren Modification des künstlichen, die bei 137° schmelzende Camphencamphersäure liefernden Camphens zu thun.

Es war nun von Interesse zu erforschen, ob das oben charakterisierte Camphen sich auch sonst in der Natur findet. Das hat sich leicht constatieren lassen. Die Firma Schimmel & Co. hatte die Freundlichkeit uns einen Camphenhaltigen Vorlauf aus Citronellaöl zu überlassen. Das aus diesem herausgearbeitete Camphen gab bei der Oxydation mit Permanganat gleichfalls die bei 142° schmelzende Camphencamphersäure.

Endlich wurde der Versuch gemacht Camphen noch auf einem anderen als dem bisher üblichen Wege künstlich darzustellen. Zu dem Zweck wurde von reinem Bornylamin ausgegangen, welches durch Reduction von Campheroxim gewonnen und von allen Fremdsubstanzen, namentlich von unverändertem Oxim, sorgfältig befreit worden war. Dieses Bornylamin wurde in essigsaurer Lösung mit 1 Mol. Natriumnitrit in Umsetzung gebracht, das entstandene Reactionsproduct mit Wasserdämpfen abgeblasen und aus dem Destillat die vorhandenen Kohlenwasserstoffe in üblicher Weise abgeschieden und durch fractionierte Destillation von höher siedenden Bestandtheilen befreit. Die anfangs flüssigen Producte erstarrten beim Abkühlen. Das ausgeschiedene Camphen wurde abgesaugt und abgepreßt. Es zeigte den Siedepunkt 160—161° und den Schmelzpunkt 50°, ferner eine auffallend starke optische Activität.

$$S = 0{,}8766,\ L\ (\text{Aether}) = 8{,}1828,\ d = 0{,}720\ t = 17^\circ$$
$$p = 9{,}67\,\%,\ l = 1\,\text{dm},\ \alpha_D = +7^\circ 14'$$
$$[\alpha]_D = +103^\circ{,}89$$

Bei der Oxydation lieferte dies Camphen eine Säure, welche, wie die neue Camphencamphersäure, einen Schmelzpunkt von

1) Ber. 29, 900.

141—142° aufwies. Die Säuren scheinen aber nicht identisch zu sein, denn ein Gemisch beider zeigte Schmelzpunktsdepression. Die geringe Menge Substanz, welche vorläufig vorhanden war, erlaubte es aber noch nicht dem Gegenstand weiter nachzugehen.

VII. Über Condensationsprodukte cyclischer Ketone mit aromatischen Aldehyden.

Bezüglich der Condensationsfähigkeit einiger Terpenketone mit Benzaldehyd hatte ich früher Unregelmäßigkeiten beobachtet [1]). Ferner hatte sich, wie ich kürzlich hervorhob [2]), herausgestellt, daß bei der Anwendung von Benzaldehyd zur Condensation mit gesättigten Ketonen verschiedener Ringsysteme „die Leichtigkeit, mit der die Condensation sich vollzieht, vom Pentanon zum Octanon hin stetig abnimmt.“ Die Beobachtung, daß bei den Kohlenstoff reicheren nicht substituierten Ringketonen sich die Benzyliden-Verbindungen langsamer abscheiden, als z. B. bei Anwendung von Pentanon, konnte aber auch seine Ursache in der größeren Löslichkeit jener Condensationsprodukte haben. Es war daher von verschiedenen Gesichtspunkten aus ein systematisches Studium der vorliegenden Verhältnisse wünschenswerth, zu dem ich die Herren Heinr. Mallison und Kurt von Martius veranlaßt habe.

Zur Untersuchung kamen von Ketonen:

Cyklo-Pentanon, 1.2- und 1.3-Cyklo-Methylpentanon (activ), Cyklo-Heptanon (Suberon) [bearbeitet von K. v. Martius], Cyklo-Hexanon, 1.2- und 1.4-, sowie actives und inactives 1.3-Cyklo-Methylhexanon [bearbeitet von H. Mallison].

Von Aldehyden kamen zur Verwendung:

Benzaldehyd; o-, m-, p-Nitrobenzaldehyd; o- und p-Chlorbenzaldehyd, Anisaldehyd, Cuminaldehyd, Piperonal, Zimmtaldehyd, p-Dimethylamidobenzaldehyd.

Um Vergleiche zu ermöglichen, wurden die Versuchsbedingungen möglichst gleichartig gestaltet, namentlich in Rücksicht auf das zur Verwendung kommende Condensationsmittel. Als solches wurde Aetznatron in großer Verdünnung und in der Weise angewendet, daß zu einer alkoholischen Lösung des Keton-Aldehyd-Gemisches für gewöhnlich 3—5 Tropfen 8—10 prozentiger Natronlauge gefügt wurden, um die Condensation einzuleiten. Nur wenn nach Verlauf von 12—24 Stunden noch keine Condensations-

1) Annal. d. Ch. **305**, 261.

2) Annal. d. Ch. **353**, 331.

neigung der Componenten zu beobachten war, wurden noch einige Tropfen Natronlauge hinzugefügt.

Bei den benachbart zum CO methylierten Ketonen wurde auf 1 Mol. Keton 1 Mol. Aldehyd, in allen anderen Fällen auf 1 Mol. Keton 2 Mol. Aldehyd bei den Condensationsansätzen in Rechnung gestellt.

Von den allgemeinen Resultaten dieser Versuche soll vor der Hand Folgendes hervorgehoben werden:

1) Bei Anwendung reiner Ortho-ständig substituierter Ketone (also 1.2 Methylpentanon und 1.2 Methylhexanon) konnte unter den gewählten Bedingungen mit keinem der genannten Aldehyde Condensation erzielt werden.

Das ist praktisch von nicht geringer Bedeutung, wie u. a aus folgender Erfahrung erhellt.

Käufliches 1.2 Methylhexanon (bezogen von der Firma Poulenc Frères in Paris) lieferte mit m-Nitrobenzaldehyd zur Condensation angesetzt eine geringe Menge Condensationsproduct. Es stellte sich aber heraus, daß die erhaltene Substanz identisch war mit dem Condensationsprodukt zwischen Cyklohexanon und m-Nitrobenzaldehyd. Aus dem Befunde war zu schließen, daß das käufliche Präparat mit etwa 5 % Hexanon verunreinigt war, welches seine Anwesenheit wohl jedenfalls dem Umstande verdankt, daß das zur Herstellung der hydrierten Verbindung nach der Sabatier'schen Methode verwendete Ortho-Kresol noch eine entsprechende Menge Phenol enthalten hatte. Man konnte auf diese Weise aber nicht nur die Verunreinigung erkennen, sondern auch beseitigen. Wurde das durch Hexanon verunreinigte 1.2 Methylhexanon in alkoholischer Lösung mit m-Nitrobenzaldehyd und Natronlauge in geeigneten Verhältnissen versetzt und nach eingetretener Ausscheidung des schwer löslichen Hexanon-Condensationsproductes die Flüssigkeit der Dampfdestillation unterworfen, so konnte aus dem Destillat nunmehr reines, mit Aldehyden nicht mehr reagierendes 1.2 Methylhexanon gewonnen werden.

2) Ein unerwarteter und sehr interessanter Unterschied ließ sich bei der Anwendung von activem und inactivem 1.3 Methylhexanon constatieren, der auch deutlich zeigt, welchen Einfluß die räumliche Configuration auf die Condensationsmöglichkeit auszuüben vermag. Bei Anwendung von activem 1.3 Methylhexanon blieb z. B. die Condensation mit den gechlorten Benzaldehyden unter denselben Bedingungen aus, unter denen sie bei dem inactiven Keton leicht eintrat. [Über ähnliche Unterschiede im Verhalten siehe auch sub 5.]

Beachtenswert ist bezüglich der beiden physikalisch isomeren Keton-Modificationen auch Folgendes.

Die Condensationsproducte des activen und inactiven 1.3 Methylhexanon mit 2 Mol. Aldehyd unterscheiden sich meist sehr wenig im Schmelzpunkt (s. die Tabelle sub 8). Eine Ausnahme machen die Condensationsproducte mit meta- und para-Nitrobenzaldehyd, deren Schmelzpunkt bei der activen und inactiven Modification um c. 30° aus einander liegen. Diese Verbindungen eignen sich in Folge dessen zur Unterscheidung der optisch differenten Modificationen des Ketons weit besser als andere bisher bekannte Derivate.

3) Eine auffallende Verschiedenheit zeigten bezüglich des Condensationsvermögens ortho-, meta- und para-Nitrobenzaldehyd. Gemeinsam haben diese Aldehyde nur, daß man sorgfältig einen Ueberschuß an Alkali bei der Condensation vermeiden muß. Sonst entstehen tief dunkel gefärbte Lösungen, aus denen nichts Krystallisierbares zu gewinnen ist. Die Verschiedenheit liegt darin, daß mit verd. Natronlauge unter den gewählten oben angegebenen Bedingungen meta-Nitrobenzaldehyd sich außerordentlich leicht für alle Condensationen herleiht, para-Nitrobenzaldehyd viel schwerer, ortho-Nitrobenzaldehyd gar nicht. (Vergl. dazu unter 6).

Daß dieser negative Ausfall der Versuche mit ortho-Nitrobenzaldehyd aber nicht lediglich durch die ortho-Stellung des Substituenten, sondern auch durch dessen Natur bedingt wird, geht daraus hervor, daß ortho-Chlorbenzaldehyd sich ohne Mühe zur Condensation bringen ließ.

4) Daß unter gleichen Versuchsbedingungen und unter Anwendung von Benzaldehyd die Condensationsfähigkeit von Cyklo-Pentanon zum Cyklo-Heptanon hin sich merklich vermindert (s. o.), wurde durch erneute Versuchsreihen bestätigt. Unter Bedingungen, unter denen sich Dibenzyliden-Pentanon innerhalb einer Minute ausschied, ließ die Entstehung des Dibenzyliden-Hexanons Stunden und die des Dibenzyliden-Heptanons Tage auf sich warten.

Daß dabei aber mehr die Löslichkeit des Condensationsprodukts (bezw. die Natur des Aldehyds) als die Unfähigkeit der höheren Ringketone zur Condensation überhaupt eine Rolle spielt, geht daraus hervor, daß Cykloheptanon mit Zimmtaldehyd sehr schnell mit meta-Nitrobenzaldehyd auch viel schneller als mit Benzaldehyd reagiert, während sich Anisaldehyd und Piperonal dem Benzaldehyd ähnlich verhalten.

5) Eine große Rolle spielen, wie schon gesagt wurde, die *Bedingungen*, unter denen die Condensation eingeleitet wird.

Wird *Benzaldehyd* in äußerst verdünnter wäßriger Lösung (unter Ausschluß von Alkohol) und bei Gegenwart eines Ueberschusses von Keton unter später noch genauer zu beschreibenden Bedingungen, an deren Feststellung sich namentlich auch Herr *Alex. Wacker* betheiligt hat, zur Condensation angesetzt, so gelingt es in einigen Fällen die *ersten* Produkte der Condensation, nämlich die *Aldole*

```
                                                   /OH
                                                  /
                                              —C
          —CO                                  | \CH C6 H5
 (CH2)x  |  /OH          und        (CH2) x  CO  /OH
          —C                                   | /
             \                                —C
              \CHC6H5                            \CH C6 H5

    Mono-Aldol                           Di-Aldol
```

zu fassen.

Diese Aldole sind *farblose* Verbindungen, die sich schon beim Erhitzen im Vacuum zersetzen. Beim Erwärmen mit Eisessig tritt hydrolytische Spaltung in die Componenten unter gleichzeitiger Entstehung der normalen Benzyliden-Verbindung und verharzter Condensationsprodukte ein. Auch beim Kochen der Aldole mit Essigsäureanhydrid ließ sich (im ersten Schritt) das Eintreten von Hydrolyse beobachten, dann erfolgt wieder partielle Condensation zu den gelben Benzylidenverbindungen.

Von solchen Aldolen sind bisher — unter Anwendung von *Benzaldehyd* — in analysenreinem Zustand gewonnen worden:

Vom *Cyklo-Hexanon*:

1) Das *Mono-Aldol*, Schmelzp. 101°—102°.

2) Das *Di-Aldol*, Schmelzp. 161—162°.

Vom *inactiven 1.3 Methylhexanon*:

Das *Mono-Aldol* Schmelzp. 106—107°.

Vom *1.4 Methylhexanon*:

Das *Mono-Aldol*, Schmelzp. 127°.

Auch hier ist zu bemerken, daß actives und inactives 1.3 Methylhexanon sich bei der Condensation deutlich verschieden verhalten (s. o). Von der activen Verbindung gelang es noch nicht ein gut definiertes Aldol herzustellen. Am glattesten bildet das Hexanon und das 1.4-Methylhexanon ein Aldol.

6) Aus dem Umstande, daß es in alkoholisch-alkalischer Lösung von angegebener Verdünnung nicht gelingen wollte Ortho-Nitrobenzaldehyd mit Ringketonen zur Condensation zu bringen, darf man noch nicht schließen, daß eine Condensation zwischen diesen Componenten überhaupt unmöglich ist.

Es hat sich die auffallende Thatsache ergeben, daß man Ringketone und Aldehyde auch mit Hülfe von Ameisensäure zur Condensation bringen kann. Bei mehrstündigem Kochen von 1 Mol. Pentanon oder Hexanon oder i. 1.3 Methylhexanon oder 1.4 Methylhexanon mit 2 Mol. ortho-Nitrobenzaldehyd und überschüssiger 98 %iger oder wasserfreier Ameisensäure gelang es normale Condensationsproducte zu erzielen. Der Versuch Essigsäureanhydrid an Stelle der Ameisensäure zu verwenden erwies sich als viel weniger erfolgreich.

Endlich sei erwähnt, daß sich in manchen Fällen die Condensation ebensogut mit 10 %iger Cyankaliumlösung wie mit verdünnter Natronlauge einleiten ließ.

7) Recht bemerkenswert sind die Farbreactionen, welche die mit 2 Aldehyd-Radicalen condensierten Ring-Ketone, also die Verbindungen der allgemeinen Formel:

$$
\begin{array}{l}
-\mathrm{C:CHR} \\
\quad | \\
\quad \mathrm{CO} \\
\quad | \\
-\mathrm{C:CHR}
\end{array}
$$

welche für sich sämtlich hell bis tiefer gelb (nur bei dem Dimethylamidobenzaldehyd orange) gefärbt sind, beim Lösen in concentrierter Schwefelsäure hervortreten lassen. Es zeigt sich nämlich, daß diese Reaktionen kaum beeinflußt werden durch die Natur des angewandten Ketons, in hohem Grade aber durch die spezifische Natur (in geringerem Grade durch die räumliche Stellung) des Substituenten, welche derangewandte Aldehyd enthielt. Die analog zusammengesetzten Pentanon-, Hexanon- und Heptanon-Condensationsproducte verhalten sich also ganz gleich. Dagegen lösen sich in concentrierter Schwefelsäure:

Die mit Benzaldehyd- und den Nitrobenzaldehyden dargestellten Condensationsproducte: gelb.

Die Anisaldehyd-Derivate: roth.
Die Piperonal-Derivate: carminroth.
Die Zimmtaldehyd-Derivate: violett.

	Benzaldehyd	Ortho-Nitro-Benzaldehyd	Meta-Nitro-Benzaldehyd	Para-Nitro-Benzaldehyd	Dimethyl-p. Amido Benzaldehyd	Ortho-Chlor-Benzaldehyd	Para-Chlor-Benzaldehyd	Anis-Aldehyd	Zimmtaldehyd	Piperonal	Cuminol
Pentanon	191 [1])	0 [170,5]	210—214	280—288	292	157,5	226,5	215 [1])	222,5 [1])	257	145,5
1.2 Methylpentanon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
actives 1.3 Methylpentanon	149 151° [2])	0	150	149	280,5	0	0	198,5	158,5	159	126
Hexanon	117 [1])	0 [142]	190	205	244	118	146,5	159	180	189	151
1.2 Methylhexanon	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
inactives 1.3 Methylhexanon	122 [3])	0	158	206	0	188	150	114	135	144,5	98
actives 1.3 Methylhexanon	128 [3])	0 [129]	129	172	(109)	0	0	111	150,5	148	97—98
1.4 Methylhexanon	98 99 [4])	0 [153]	153	204	212—214	121,5	161	141—142	163—164	166,5	112,5
Heptanon	107—108° [2])	0	173	209				128—129	198	187	

1) Vergl. Vorländer u. Hobohm, Ber. 29, 1838—1840.
2) „ Wallach, Ber. 29, 1597 1601.
3) Vergl. Einhorn u. Ehret, Annal. 295, 183—184.
4) „ Annal. 346, 252

8) In vorstehender Tabelle ist eine Uebersicht über die Schmelzpunkte der nunmehr bekannten Condensationsproducte der angewandten Ringketone mit 2 Mol. Aldehyd gegeben. Wo eine Condensation unter den gewählten Bedingungen mit Natronlauge nicht erzielt worden ist, wurde eine 0 in die Tabelle eingetragen. In der Columne des Ortho-Nitrobenzaldehyds beziehen sich die in eckige Klammern eingesetzten Zahlen auf die Schmelzpunkte der mit Hülfe von Ameisensäure erhaltenen Verbindungen.

Ein Beitrag zur Kenntnis des Lichtsinns der Hühner.

Von

D. Katz und G. Révész.

Eingereicht durch Herrn Schwarzschild am 6. August 1907.

Heß hat das Picken der Hühner nach Futterkörnern, die sich unter bestimmten Beleuchtungsverhältnissen befanden, benutzt, um den Lichtsinn und Farbensinn der Hühner zu untersuchen. (Archiv für Augenheilkunde. Bd. 57. H. 4). Wir berichten im Folgenden über Versuche, die wir nach derselben Methode anstellten, um Aufschluß zu erhalten über das Purkinjesche Phänomen, über die Blendung sowie über den Einfluß der Ermüdung durch farbige Lichter auf die Dunkeladaptation bei Hühnern.

I. Versuche über das Purkinjesche Phänomen.

Wir stellten uns vier quadratische Felder von 8 cm Seitenlänge aus gelbem, rotem, grünem und blauem Papier her. In Bezug auf ihre Helligkeit für das helladaptirte menschliche Auge rangieren sie in der Folge gelb, grün, rot, blau. Das dunkeladaptirte Huhn wurde vor je zwei dieser Felder gesetzt, in welche Körner gestreut waren, und es wurde dann darauf geachtet, welches der beiden Felder eine Bevorzugung beim Picken erfuhr. Wir kamen bald davon ab, natürliche Körner zu verwenden. Denn da sie sich infolge ihrer hellgelben Farbe sehr leicht von einem bestimmten Grunde deutlicher abheben können als von einem an und für sich eindringlicheren, so wäre der Schluß nicht erlaubt, daß dasjenige der beiden verwandten Felder einen intensiveren Eindruck macht, in welchem eher gepickt wird. Diese Fehlerquelle wird nur z. T. eliminiert, wenn die Körner mit der Farbe der Felder gefärbt

werden. Es kann dann immer noch der auf den Körnern liegende Glanz zu ihrer Erkennung führen, unabhängig von der Farbe des Grundes, auf dem sie liegen. Wir kamen schließlich dazu die Körner mit schwarzer Tusche auf die Felder zu malen. Für uns waren bei helladaptirtem Auge die schwarzen Bilder der Körner in Bezug auf den Grad ihrer Bemerkbarkeit so zu ordnen: sie waren am deutlichsten im Gelb, dann im Grün, im Rot und im Blau. Bei helladaptirtem Auge und Beleuchtung der Felder mit ungedämpftem Tageslicht pickten die Hühner in allen 4 Feldern annähernd mit derselben Häufigkeit. Zur Charakterisierung der bei den nun folgenden Versuchen im Dunkelzimmer herrschenden Beleuchtungsstärke und der Farben der benutzten Felder sei bemerkt, daß für uns nach einem Aufenthalt von ungefähr 20 Minuten im Dunkelzimmer die Bilder der Körner aus einer Entfernung von 20 cm im Rot ganz verschwommen erschienen. Ganz gut waren sie aus gleicher Entfernung im Gelb zu sehen, sehr gut im Grün und im Blau. Wurde dem Huhn nach 1—2 Stunden Dunkeladaptation das grüne und das rote oder das blaue und das rote Feld vorgelegt, so wurde im Rot **niemals** gepickt, häufig dagegen im Grün und im Blau. Wurde das rote und das gelbe Feld vorgelegt, so wurde im Gelb zuweilen, im Rot **niemals** gepickt. Schließlich zeigte sich, daß Blau eine bedeutende Bevorzugung erfuhr, wenn das blaue und das gelbe Feld gleichzeitig vorgelegt wurden. Erblickt man in der Bevorzugung, welche ein Feld beim Picken erleidet, ein Zeichen dafür, daß dem Huhn die Körner dieses Feldes deutlicher bemerkbar sind als die der anderen, so ist zu sagen, daß die Bemerkbarkeit der Körner in den verschiedenen hier benutzten Feldern für das dunkeladaptirte Auge des Huhnes ganz die gleichen Verschiedenheiten aufweist wie für das dunkeladaptirte Auge des Menschen. Wurde bei diesen Versuchen die Beleuchtung im Dunkelzimmer wieder heraufgesetzt, so wurde im Rot und im Blau und ebenso im Grün und im Gelb ungefähr gleich häufig gepickt.

Man hat das Purkinjesche Phänomen, d. h. die Helligkeitsverschiebung, welche zu gunsten der kurzwelliges Licht aussendenden Objekte bei dunkeladaptirtem Auge und herabgesetzter Beleuchtungsintensität eintritt, erklärt durch die besondere Funktionsweise der Stäbchen.

Nun beobachten wir beim Huhn farbigen Feldern gegenüber

im Zustand der Hell- und der Dunkeladaptation ein Verhalten, welches ganz dem Purkinjeschen Phänomen entspricht. Da das Huhn eine „an Stäbchen verhältnismäßig so sehr arme" Netzhaut besitzt (a. a. O. S. 316), kann das Purkinjesche Phänomen nicht mehr ausschließlich durch die Funktionsweise der Stäbchen erklärt werden.

II. Versuche über die Blendung der Hühner.

Die Blendungserscheinungen, welche beim menschlichen Auge nach längerem Aufenthalt im Dunkeln eintreten, wenn es plötzlich starkem Licht ausgesetzt wird, hat man erklärt durch die dabei eintretende intensive Zersetzung des Sehpurpurs und deren Einwirkung auf die Stäbchen. Da es zweifelhaft ist, ob überhaupt Spuren von Sehpurpur in der Netzhaut des Huhnes vorkommen, sind beim Huhn ähnliche Blendungserscheinungen kaum zu erwarten. Wir fanden dies durch Versuche bestätigt. Setzten wir ein Huhn nach 1—2 Stunden Dunkeladaptation auf eine von der Sonne direkt beschienene, mit Körnern bestreute Fensterbank, so konnten wir nichts davon konstatieren, daß das Huhn irgendwie durch die große Helligkeit irritiert wurde, vielmehr fing es sofort eifrig zu picken an.

III. Versuche über den Einfluß der Ermüdung durch farbige Lichter auf die Dunkeladaptation.

Die Beleuchtung war im Dunkelzimmer ziemlich stark herabgesetzt. Die Körner befanden sich auf einem grauen Papier. Die Hühner wurden jedesmal 1 Minute in einen Kasten gesetzt, dessen eine Wand aus farbiger Gelatine bestand, und der mit dieser Wand dem Lichte zugekehrt wurde. Die dabei verwandten Gelatineplatten waren für unser Auge in Bezug auf ihre Helligkeit so zu ordnen: Gelb, Rot, Blau. Mit jeder Farbe wurden die Versuche 6 mal wiederholt. Zum Vergleich ist die Zeit mit angegeben, nach welcher das Huhn im Dunkelzimmer pickt, wenn es vorher 1 Minute dem ungedämpften Tageslicht ausgesetzt war. Sie beträgt 1 Min. 15 Sek.

Nach	1	Minute	Ermüdung	durch	Gelb	pickt	d.	Huhn	nach	1 Min.	5	Sek.
„	„	„	„	„	Rot	„	„	„	„	0 „	41	„
„	„	„	„	„	Blau	„	„	„	„	0 „	27	„

Es ergibt sich also hieraus, daß die Dunkeladaptation der Hühner durch eine Ermüdung mit den hier benutzten farbigen Lichtern eine ähnliche Beeinflussung erfährt, wie sie nach den oben angegebenen Helligkeitswerten der Gelatineplatten auch für das menschliche Auge zu erwarten ist.

Göttingen im Juli 1907.

Psychologisches Institut.

Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 6. Juli 1907.

Das Problem der Uniformisierung beliebiger analytischer, insbesondere auch beliebiger algebraischer Kurven durch eindeutige automorphe „Hauptkreisfunktionen" (mit endlich oder unendlich vielen Gruppenerzeugenden) wurde vom Verfasser der vorliegenden Mitteilung in zwei kurz vorhergehenden Mitteilungen „über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven" und „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven"[1]) vollständig erledigt. Der Hauptkreis spielte dabei entweder die Rolle eines Symmetriekreises oder eines Grenzkreises für das Gebiet der uniformisierenden Hülfsveränderlichen, deren Existenz zu beweisen war.

In der vorliegenden Mitteilung handelt es sich speziell um die Uniformisierung algebraischer Kurven mittelst automorpher Funktionen mit einem Grenzkreis, also um den Beweis desjenigen Klein-Poincaré'schen Theorems, welches der Verfasser am Schlusse seiner letztgenannten Mitteilung aus den dort gewonnenen allgemeinen Ergebnissen leicht folgern konnte. Insbesondere werden hier unter Anknüpfung an einen von Herrn Johansson eingeschlagenen Gedankengang die Fälle $p = 0, 1, 2$, ferner der hyperelliptische Fall und der Fall einer beliebigen reellen algebraischen Kurve auf einem besonderen Wege erledigt. Am Schlusse wird auch ein neuer Gedanke zu einem allgemeinen Beweise (p beliebig) des in Rede stehenden Klein-Poincaré'schen Satzes mitgeteilt.

1) S. Göttinger Nachrichten 1907. Daselbst sind auch ausführlichere Litteraturangaben gemacht.

In der z-Ebene ($p = 0$) seien n Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ gegeben. Jedem dieser Punkte sei eine positive ganze Zahl, welche $\geqq 2$ oder unendlich groß ist, zugeordnet. Es handelt sich um den Nachweis der Existenz einer nur in den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und zwar den zugeordneten Zahlen entsprechend verzweigten linear-polymorphen Funktion $\zeta(z)$, durch deren Vermittelung die in passender Weise zerschnittene z-Ebene konform auf ein Grenzkreispolygon mit der gewünschten Signatur abgebildet wird.

Wir setzen $n \geqq 4$ voraus und nehmen ferner an, daß im Falle $n = 4$ nicht alle zugeordneten Zahlen gleich 2 sind[1]).

Durch Vermittelung der Funktion $\zeta(z)$ wird eine bestimmte, aus der z-Ebene durch einen bekannten Ueberlagerungsprozeß entspringende unendlich- vielblättrige Riemannsche Fläche $F^{(\infty)}$ konform auf die schlicht zu denkende Fläche des Einheitskreises abgebildet.

Um die Existenz der Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ zu beweisen, gehen wir von dem Satze aus, daß es möglich ist, jede über der z-Ebene beliebig ausgebreitete, einfach zusammenhängende endlich- oder unendlich-vielblättrige Fläche, welche mindestens drei Punkte der z-Ebene unbedeckt läßt, konform auf die schlicht zu denkende Fläche des Einheitskreises abzubilden[2]).

Unser Gedanke besteht nun darin, durch Vermittelung geeigneter Funktionen eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche $F^{(\infty)}$ auf eine andere einfach zusammenhängende Fläche herzustellen, welche mindestens drei Punkte der Ebene unbedeckt läßt.

Sind $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zugeordneten ganzen Zahlen, so betrachten wir, wie Johansson (Acta soc. Fenn, t. 33, und Math. Ann. Bd. 62: „Beweis der Existenz usw."), zunächst den Fall, in welchem sich unter diesen Zahlen drei, l_α, l_β, l_γ, befinden, für die

$$\frac{1}{l_\alpha} + \frac{1}{l_\beta} + \frac{1}{l_\gamma} < 1 \tag{1}$$

ist. Die Schwarzsche Funktion

$$s\left(\frac{1}{l_\alpha}, \frac{1}{l_\beta}, \frac{1}{l_\gamma}; \frac{z - a_\alpha}{z - a_\beta} \cdot \frac{a_\beta - a_\gamma}{a_\alpha - a_\gamma}\right)$$

1) Die ausgeschlossenen Fälle werden in bekannter Weise durch die Schwarz'sche s-Funktion bezw. das elliptische Integral erster Art erledigt. Ist $n = 2$, so kommen als Abbildungsfunktionen $\sqrt[l]{z}$ und $\log z$ in Betracht.

2) Vgl. Poincaré: Sur un théorème etc. (Bull. t. XI), sowie Osgood: on the existence etc. (Am. Transactions 1900), Johansson: Ein Satz über die konforme Abbildung etc. (Math. Ann. Bd. 62).

ist dann (nach Johansson) auf $F^{(\infty)}$ eindeutig. Durch Vermittelung dieser Funktion wird also die Fläche $F^{(\infty)}$ in umkehrbar eindeutiger Weise auf eine andere einfachzusammenhängende Fläche $F_s^{(\infty)}$ abgebildet, welche das ganze Aeußere des Einheitskreises unbedeckt läßt. Damit ist dieser Fall erledigt.

Befinden sich unter den Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ keine drei, die der Bedingung 1) genügen, so gelangen wir durch Anwendung mehrerer hintereinander ausgeführter Abbildungen zum Ziele. Herr Johansson beruft sich in diesen Fällen auf die von Herrn Fricke (Math. Ann. Bd. 59) gegebenen Spezialentwickelungen zum Kontinuitätsbeweise.

Es kann sein, daß sich unter den Zahlen l drei, $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$ befinden, für welche

$$2)\qquad \frac{1}{l_\alpha}+\frac{1}{l_\beta}+\frac{1}{l_\gamma}=1$$

ist. Dann bilden wir die Fläche $F^{(\infty)}$ zunächst mit Hülfe der Funktion

$$u(z)=s\left(\frac{1}{l_\alpha},\ \frac{1}{l_\beta},\ \frac{1}{l_\gamma};\ \frac{z-a_\alpha}{z-a_\beta}\,\frac{a_\beta-a_\gamma}{a_\alpha-a_\gamma}\right)$$

auf eine Fläche $F_u^{(\infty)}$ ab, welche den Punkt $u=\infty$ unbedeckt läßt. Ist 2ω eine Periode der Funktion $u(z)$, so geht die Fläche $F_u^{(\infty)}$ durch Vermittelung der durch den Ausdruck

$$v=e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$$

dargestellten konformen Abbildung in eine Fläche $F_v^{(\infty)}$ über, welche die Punkte $v=0$ und $v=\infty$ unbedeckt läßt.

Ist a ein von $v=0$ und $v=\infty$ verschiedener Verzweigungspunkt der Fläche $F_v^{(\infty)}$ und ist l die Zahl der im Punkte a jedesmal zusammenhängenden Blätter der Fläche $F_v^{(\infty)}$, so geht die Fläche $F_v^{(\infty)}$ durch Vermittelung der Funktion

$$w(v)=s\left(\frac{1}{\infty},\ \frac{1}{\infty},\ \frac{1}{l};\ \frac{v}{a}\right)$$

in eine Fläche $F_w^{(\infty)}$ über, welche das Aeußere des Einheitskreises unbedeckt läßt.

Kann man weder der Ungleichheitsbedingung 1) noch 2) genügen, so wähle man drei der Zahlen, $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$ so aus, daß unter

den übrig bleibenden Zahlen l sich eine befindet, welche $\geqq 3$ ist: (dies ist nur dann nicht möglich, wenn alle Zahlen l gleich 2 sind). Durch Vermittelung der Funktion

$$s\left(\frac{1}{l_\alpha}, \frac{1}{l_\beta}, \frac{1}{l_\gamma}; \frac{z-a_\alpha}{z-a_\beta}\cdot\frac{a_\beta-a_\gamma}{a_\alpha-a_\gamma}\right)$$

geht die Fläche $F^{(\infty)}$ über in eine Fläche $F_s^{(\infty)}$, welche nur an endlich vielen Stellen der s-Ebene verzweigt ist und zwar derart, daß die der Fläche $F_s^{(\infty)}$ entsprechende Signatur der s-Ebene entweder die Erfüllung der Bedingung 1) oder der Bedingung 2) gestattet.

Es bleibt somit nur noch der Fall zu erledigen, in welchem alle Zahlen l gleich 2 sind. In diesem Falle wählen wir vier der Verzweigungspunkte, a_1, a_2, a_3, a_4 aus und führen eine konforme Abbildung der Fläche $F^{(\infty)}$ auf eine Fläche $F_v^{(\infty)}$ mittelst der Funktion

$$v = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$$

aus, wobei mit u das elliptische Integral erster Art

$$u = \int^z \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}$$

und mit 2ω eine Periode desselben bezeichnet wird. Die Fläche $F_v^{(\infty)}$ kann wie die vorher mit $F_v^{(\infty)}$ bezeichnete Fläche weiter behandelt werden.

Liegt eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ vor, so gehört zu derselben ein Integral u, welches, falls auf der Riemannschen Fläche keine Stigmata gegeben sind, als Lösung der Aufgabe zu betrachten ist. Sind Stigmata gegeben, so bilde man die entsprechende Ueberlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ mit Hülfe der Funktion

$$v = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$$

wobei mit 2ω eine Periode der Funktion u bezeichnet wird, konform auf eine Fläche $F_v^{(\infty)}$ ab, welche wie die oben mit $F_v^{(\infty)}$ bezeichnete Fläche weiter behandelt werden kann.

Ist eine Fläche vom Geschlecht $p = 2$ mit oder ohne Stigmata vorgelegt, so denken wir uns dieselbe zweiblättrig und

wählen vier ihrer Verzweigungspunkte aus, denen ein elliptisches Integral erster Art u entspricht. Durch Vermittelung der Funktion $v = e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ wird dann die entsprechende Ueberlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ auf eine Fläche F_v^{∞} abgebildet, welche wie oben weiter behandelt werden kann.

Ist eine beliebige hyperelliptische Fläche vorgelegt, so kann dieselbe offenbar ebenso behandelt werden wie die soeben betrachteten Flächen vom Geschlecht $p = 2$.

Ist eine zu einer reellen algebraischen Kurve mit mindestens einem reellen Zuge gehörende Riemannsche Fläche ($p > 2$) mit oder ohne Stigmata vorgelegt, so existiert, wie ich in meiner oben genannten Mitteilung „Ueber die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven" (Theorem I a) dargetan habe, auf dieser Fläche eine relativ zur Fläche unverzweigte Funktion, welche unendlich viele reelle Werte ausläßt. Die dem vorgelegten Falle entsprechende einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ wird also mit Hülfe dieser Funktion konform auf eine Fläche abgebildet, welche unendlich viele Punkte der Ebene unbedeckt läßt.

Wird schließlich die allgemeinste einer algebraischen Funktion entsprechende Riemannsche Fläche, für welche $p > 2$ ist [1]), ins Auge gefaßt, so kann diesem Falle entsprechend der Satz aufgestellt werden, daß die Kenntnis irgend einer relativ zur Fläche unverzweigten Funktion, welche mindestens drei Werte ausläßt, sofort zu einem vollständigen Beweise des hier in Rede stehenden Theorems (Grenzkreistheorems) führt, was nach dem Vorhergehenden unmittelbar einleuchtet. Speziell würde demnach die Kenntnis eines vollständigen Beweises des von Herrn Klein (Math. Ann. Bd. XIX) formulierten Fundamentaltheorems, welches sich auf Riemannsche Flächen vom Geschlecht p (mit p die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitten) bezieht, auch einen vollständigen Beweis des Grenzkreistheorems nach sich ziehen [2]).

---

1) Die von Herrn Johansson (Math. Annal. Bd. 62) für beliebiges p angegegebene Recursionsmethode beruht, wie ich bereits an anderer Stelle bemerkt habe, auf einer irrtümlichen Schlußweise.

2) Eine andere, auf der Benutzung der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ beruhende Methode, um von dem einen zum andern Fundamentaltheorem überzugehen, hat Herr Minkowski im Jahre 1905 in einer Sitzung der Math. Gesellschaft in Göttingen mitgeteilt. S. eine darauf sich beziehende kurze Notiz in den Jahresberichten der D. M. V., Jahrgang 1905 unter den Sitzungsberichten der Göttinger Math. Gesellschaft.

Über Erdbebenwellen.

Von E. Wiechert und K. Zoeppritz.

Vorgelegt am 8. Dezember 1906 und in erweiterter Form[1]) am 12. Januar 1907 von E. Wiechert.

I. Theoretisches über die Ausbreitung der Erdbebenwellen.

Von E. Wiechert.

§ 1. Vorwort.

Sobald man in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts erkannte, daß mit feinen Instrumenten bei stärkeren Erdbeben die Erdbebenwellen auf der ganzen Erde bemerkt werden können, erwachte die Hoffnung, durch ihre Beobachtung zu Schlüssen über die Beschaffenheit des Erdinnern zu gelangen. Das fand einen schönen Ausdruck in dem von v. Rebeur-Paschwitz verfaßten Aufruf zur Errichtung eines internationalen Systems von Erdbebenstationen, der im Namen einer Reihe von Gelehrten dem 6. Internationalen Geographen-Kongreß (London 1895) vorgelegt wurde. Hier heißt es: „Wir wollen in erster Linie die Gründung eines internationalen Netzes von Erdbebenstationen in Anregung bringen, dessen Aufgabe es sein soll, die Ausbreitung der von großen Erdbebenzentren ausgehenden Bewegungen auf der Erdoberfläche und durch den Erdkörper in systematischer Weise zu beobachten.

„Die Bedeutung der hier in Vorschlag gebrachten Erdbeben-

---

1) Während in der Sitzung vom 8. Dezember die Resultate über die Beschaffenheit des Erdinnern nur auf Grund der graphischen Konstruktion der Wege der Erdbebenwellen dargelegt werden konnten, wurden in der Sitzung am 12. Januar die schärferen Ergebnisse mitgeteilt, welche mittels des rechnerischen Verfahrens gewonnen worden waren. Die so erreichte Verbesserung war freilich nicht erheblich, denn die Dicke des Steinmantels war durch die Zeichnung zu 1600 km gefunden worden, während die Rechnung dann 1500 ergab.

beobachtungen für die Physik der Erde läßt sich nicht hoch genug veranschlagen. Da es fast sicher ist, daß die von einem Erdbebenherde ausstrahlende elastische Bewegung sich durch den Erdkörper fortpflanzt, mit einer Geschwindigkeit, deren Größe von der Dichtigkeit und Elastizität der verschiedenen Tiefenschichten abhängen muß, und da sichere Anzeichen vorhanden sind, daß diese Geschwindigkeit mit der Tiefe, welche die Bewegung erreichte, veränderlich ist, so geben die Erdbebenbeobachtungen ein Mittel in die Hand, um auf indirektem Wege Aufschlüsse über den Zustand des Erdinnern zu erhalten, welches wohl für alle Zeiten der direkten Beobachtung verschlossen sein wird. Es ist daher durch diese systematischen Beobachtungen die Möglichkeit geboten, mit Aussicht auf Erfolg an die Lösung einer Frage heranzutreten, welche für die gesamte Wissenschaft von fundamentalster Bedeutung ist, und die bisher von verschiedenen Seiten in nur zu widersprechender Weise beantwortet wurde.

„Zugleich wird die Seismologie eine ungeahnte Förderung erfahren, denn nunmehr stehen der Beobachtung auch die unzugänglichsten Teile des Erdballs offen. Alle stärkeren Erd- und See-Beben, wo auch immer sie stattfinden mögen, müssen ihre Spuren auf den Photogrammen der geplanten Stationen hinterlassen."

Machtvoll ist die Saat aufgegangen, welche damals gesät wurde. Wir haben heute eine „Internationale seismologische Assoziation" der Staaten, welche den größten Teil der Kulturnationen umfaßt und so die Erde umspannt. — Auch für mich war die Verheißung, durch das Studium der Erdbebenwellen Aufschlüsse über die Beschaffenheit des Erdinnern zu gewinnen, die Triebfeder, das in Göttingen neuausgebaute Geophysikalische Institut weitgehend in den Dienst der Erdbebenforschung zu stellen. Für die Arbeit boten sich nicht nur Probleme, die den Bau unseres heimatlichen Weltkörpers als solchen betrafen, sondern auch bedeutungsvolle Fragen der allgemeinen Physik: Befindet sich doch die Materie in der Erde unter Drucken, wie wir sie in unseren Laboratorien auch nicht entfernt herstellen können. Schon in 1500 Kilometer Tiefe wird rund $^1/_2$ Million Atmosphären erreicht und weiterhin wird eine, dann eine zweite Million sicher überschritten. Wir aber, mit unseren menschlichen Mitteln, finden schon Schwierigkeiten, auch nur 10000 Atmosphären zu erreichen. Wird uns also durch die Erdbebenwellen das Innere der Erde erschlossen, so dürfen wir hoffen, zu einer erheblichen Erweiterung unseres physikalischen Forschungsgebietes zu gelangen.

Es wird nützlich sein, uns hier zunächst darüber zu informieren, was man über das Erdinnere aussagen kann, wenn die Beobachtung der Erdbebenwellen nicht zu Hilfe genommen wird.

§ 2. Aggregatzustand der Erde und kritische Temperatur.

Welches mag der Aggregatzustand im Erdinnern sein? — In einer neueren Arbeit[1]), die uns noch mehrfach beschäftigen wird, sagt R. D. Oldham: „Mannigfache Theorien der Erde sind im Laufe der Zeit vorgeschlagen worden: es wurde wechselweise angenommen, die Substanz im Innern sei feurig, flüssig, fest und gasförmig, bis die Geologen sich von der Frage voller Verzweiflung ganz abwendeten, um ihre Aufmerksamkeit nur noch der äußeren Rinde der Erde zuzuwenden und ihr Inneres den Mathematikern als freien Tummelplatz zu überlassen." — Wie mir scheint, läßt sich der Pessimismus, der hier zum Ausdruck kommt, recht wohl überwinden, wenn Missverständnisse ausgeschaltet werden, die bei der Anwendung einiger bedeutsamer physikalischer Sätze auf das Innere der Erde wieder und wieder in die Irre führten. Vor allem wurde die Ansicht verhängnisvoll, die Erde müsse im Innern feurig „gasförmig" sein, weil die Temperatur jedenfalls so hoch sei, daß für alle bekannten Substanzen, die „kritische" Temperaturgrenze überschritten sei, über welche sie nach den „physikalischen Erfahrungen" nur „gasförmig" existieren könnten. Demgegenüber ist zu sagen, daß die physikalischen Erfahrungen durchaus nicht zu diesen Schlüssen berechtigen. Die sogenannte „kritische Temperatur" hat gewiß eine große Bedeutung, aber man verkennt diese völlig, wenn man annimmt, es handele sich um eine allumfassende einschneidende Grenze für den betreffenden Stoff. Davon ist nicht die Rede, die „kritische Temperatur" bezieht sich stets nur auf eine einzige besondere Art der Zustandsänderung des Stoffes. Fassen wir zum Beispiel die Verdampfung des Wassers zu Wasserdampf ins Auge. Wird die Temperatur, bei welcher die Wasserverdampfung untersucht wird, mehr und mehr erhöht, so nimmt die Dichte des verdampfenden Wassers mehr und mehr ab, die Dichte des gesättigten Dampfes wächst höher und höher an; schließlich, bei der „kritischen Temperatur", verschwindet die Dichtedifferenz überhaupt; darüber hinaus fällt der Sprung der „Verdampfung"

1) R. D. Oldham, The Constitution of the Earth, as revealed by Earthquakes, Quarterly Journal of the Geol. Soc., 1906, vol. 62, p. 456.

in der Zustandsänderung fort, indem sich nun dort, wo unterhalb der kritischen Temperatur bei Drucksteigerung eine unstetige Änderung einstellte, eine ständige Folge von Änderungen aneinanderreiht. Damit ist die Bedeutung der kritischen Temperatur dargelegt, damit ist sie aber auch völlig erschöpft. Wir haben nicht den mindesten Anlaß, zu vermuten, daß auch beliebig weit über der kritischen Temperatur die Zustandsänderungen bei steigendem Druck nicht zu immer größerer Zähheit und schließlich zu beliebig großer Riegheit [1]) führen, und es gibt auch keinen Grund, nach dem selbst sprunghafte Zustandsänderungen an anderen Stellen der ganzen Reihe ausgeschlossen sein sollten. — Nun wird freilich für jemand, der sich daran gewöhnt hat, zur Ausmalung der Vorstellungen über die Materie der kritischen Temperatur eine über die direkte Beobachtung hinausgehende Bedeutung zu geben, das Gesagte vielleicht wenig überzeugend sein Da trifft es sich glücklich, daß wir im Stande sind, Tatsachen sprechen zu lassen. G. Tamman, bei seinen Untersuchungen über die Zustandsänderungen der Substanzen unter hohen Drucken, hat für das Verhalten des Phosphoniumchlorids Folgendes gefunden: Die kritische Temperatur des flüssigen Phosphoniumchlorids liegt bei ca. 50° C, der kritische Druck beträgt dabei ca. 75 Atmosphären. Wird nun aber bei 50° C der Druck weiter erhöht, so gelangt man bei ca. 750 Atmosphären zu einem Erstarrungspunkt, und zwar tritt hier Kristallisation ein. Wird die Temperatur noch weiter erhöht, also über die kritische Temperatur des flüssigen Phosphoniumchlorids hinaus, so läßt sich die Kristallisation, also der feste Aggregatzustand immer noch beobachten, nur steigt der Druck, welcher nötig ist, um zum Kristallisationspunkt zu kommen, immer weiter an. Bei 100° C ergibt sich der Kristallisationsdruck schon zu 3000 Atmosphären. Durch diese schönen Resultate ist vollkommen sichergestellt, daß auch weit über der sogenannten „kritischen Temperatur“ der feste Aggregatzustand sehr wohl bestehen kann, wenn nur der Druck genügend erhöht wird. Bedenkt man, daß alle unsere Erfahrungen über die Molekularkonstitution uns dahinführen, in den Atomen äußerst widerstandsfähige Dinge zu sehen, so liegt die Vermutung nahe, daß wenigstens in dem Bereiche der Temperaturen, welche der mensch-Beobachtung zugänglich ist, alle Substanzen durch genügend hohen Druck in den festen Aggregatzustand übergeführt werden können. —

1) Riegheit = Elastische Widerstandsfähigkeit gegen Formveränderungen.

Für die Erdphysik scheint es mir wichtig, noch besonders darauf hinzuweisen, daß die Verfestigung nicht an sprunghafte Zustandsänderungen gebunden ist, sondern sich auch allmählich anwachsend einstellen kann. Hier kommt das Phänomen in Betracht, das man Flüssigkeitsreibung oder Zähigkeit zu nennen pflegt. — Parafinöl z. B. ist bei höherer Temperatur leichtflüssig, bei gewöhnlicher Temperatur schon recht „zähflüssig“ und wird bei tiefer sinkender Temperatur steifer und steifer. Pech ist bei gewöhnlicher Temperatur so zähflüssig, daß es als ein spröder fester Körper erscheint, dennoch zeigt es sich wie allbekannt als Flüssigkeit, wenn man ihm nur Zeit läßt, den deformierenden Kräften zu folgen. Gewöhnliches Glas bietet uns ein weiteres vortreffliches Beispiel. In noch höherem Grade als Pech erscheint es uns bei gewöhnlicher Temperatur als ein spröder fester Körper. Wird es aber erwärmt, so sehen wir, wie es ganz allmählich nachgiebiger und nachgiebiger wird, es wird plastisch, weich und schließlich flüssig. — In allen diesen Fällen zeigt uns das bequem zu handhabende Mittel der Temperaturveränderung, wie mit einer Auflockerung der Moleküle eine Verminderung, mit einer Verdichtung eine Vermehrung der Zähigkeit verbunden ist. Wir werden erwarten dürfen, daß das zweite Mittel, die Druckvermehrung, das unseren menschlichen Beobachtungen freilich in viel geringfügigerem Umfang zur Verfügung steht, in entsprechender Weise wirken wird.

Es ist ja bei der hohen Temperatur des Erdkörpers sehr wahrscheinlich, daß die Substanzen im tiefen Erdinnern, wenn wir sie vom Druck ohne Änderung der Temperatur entlasten könnten, in den gasförmigen Zustand übergehen würden. — Aber deswegen die Substanzen in der Erde gasförmig zu nennen, ist zum mindesten bedenklich, weil irreführend. Wer Neigung zu paradoxen Formulierungen hat, mag ja von „Gasen“ reden, aber er muß dann nicht vergessen hinzuzufügen, daß bei seiner Ausdrucksweise „Gase“ auch „fest“ sein können.

Sehr wichtig scheint es, an den Beispielen des Peches und der Gläser zu beachten, wie ein und derselbe Stoff schneller wechselnden Kräften gegenüber als sehr riege erscheinen kann, während er lange andauernden Kräften gegenüber durchaus das Verhalten einer Flüssigkeit annimmt. Sehr wahrscheinlich bietet uns die Erde im ganzen oder wenigstens mit ihrer Rinde einen ähnlichen Fall, indem sie sich gegenüber den bei Erdbeben im Laufe von Sekunden oder Minuten, bei der Ebbe und Flut im Laufe von Stunden oder Tagen, bei den Polschwankungen im Laufe von

Monaten variirenden Kräften als sehr riege erweist und dennoch nachgiebig wie eine Flüssigkeit ist gegenüber den in Jahrtausenden oder Jahrmillionen variirenden Kräften infolge von geologischen Umgestaltungen oder von kosmischen Änderungen ihrer Rotationsgeschwindigkeit.

§ 3. Elastische Widerstandsfähigkeit (Riegheit) der Erde im Ganzen nach ihrem Verhalten bei der Ebbe und Flut und bei den Polschwankungen.

Ueber das Verhalten der Erde im Ganzen gegenüber deformierenden Kräften geben die Erscheinungen der Ebbe und Flut und die Polschwankungen Aufschluß.

Ebbe und Flut zeigen eine relative Bewegung des Meeres gegenüber dem festen Erdkörper an. Wäre der Erdkörper unter dem Einfluß der Anziehung von Sonne und Mond so nachgiebig wie eine Flüssigkeit, so würde er eben dieselben Bewegungen ausführen wie das Meer und es gäbe darum für uns keine Ebbe und Flut. Hieraus folgt, daß in der Ebbe und Flut ein direktes Anzeichen für eine Festigkeit des Erdkörpers gesehen werden kann.

Die halbtägige Ebbe und Flut ist so groß, wie es etwa im Großen und Ganzen bei vollkommener Starrheit der Erde zu erwarten wäre. Weitere Schlüsse über das Verhalten der Erde zu ziehen ist bei der Komplikation des Phänomens durch Schwingungen und Stauungen des Meeres nicht möglich gewesen. Günstiger liegen die Verhältnisse bei der halbmonatlichen Flut, welche durch die Bewegung des Mondes in seiner Bahn verursacht wird. Hier wird bei der viel längeren Dauer dem Wasser Zeit gelassen sich die neue Ruhelage gemäß den veränderten Kräften zu suchen. Lord Kelvin, der alle diese Fragen prüfte, hat daher insbesondere die halbmonatliche Flut untersucht, um zu einem Urteil über die Nachgiebigkeit der Erde zu gelangen. Es zeigte sich, daß die Erde jedenfalls rieger ist wie Glas, doch schien die Größe der Ebbe und Flut nicht ganz die Grenze zu erreichen, welche der völligen Starrheit entsprechen würde, sodaß eine gewisse Nachgiebigkeit etwa von der Größenordnung der des Stahles wahrscheinlich wurde.

Dieses außerordentlich wichtige Resultat hat durch die im vorigen Jahrhundert entdeckte und neuerdings durch die „Internationale Erdmessung“ sorgfältig untersuchte Erscheinung der „Polschwankungen“ eine Bestätigung und eine schärfere Abgrenzung gefunden.

Die „Polschwankungen" fand man durch die Beobachtung, daß die geographische Breite innerhalb gewisser Grenzen veränderlich ist, und es wurde festgestellt, daß sie eintreten, weil die Achse, um welche die Erde sich dreht, sich im Laufe der Zeit im Erdkörper ein wenig ändert. Es ist zu schließen, daß die Rotationsachse im allgemeinen nicht in die kleine Achse der Erdfigur fällt, sondern im Laufe der Zeit in deren Nachbarschaft herumwandert. Die Abweichungen steigen erfahrungsgemäß bis auf etwa 0,3 Bogensekunden, sodaß der Durchstoßungspunkt der jeweiligen Drehungsachse an einem der Erdpole auf der Erdoberfläche sich von der Mittellage bis zu rund etwa 10 m entfernt. Von entsprechender Größe sind die Breitenschwankungen. Aus theoretischen Gründen kann angenommen werden, daß die Drehungsachse bei ihren Wanderungen im Erdkörper zugleich auch ihre Lage im Weltenraum ein wenig ändert, doch sind diese Wanderungen so klein, daß sie sich den Beobachtungen entziehen.

Das Phänomen der Polschwankungen läßt sich als eine ganz ähnliche Erscheinung wie bei der Erde bei jedem Kreisel beobachten und ist der mathematischen Behandlung leicht zugänglich. — Wäre die Erde vollkommen starr und wirkten keine störenden Kräfte, so müßten danach die Drehpole Kreise um die Mittellage beschreiben und diese in 305 Tagen durchlaufen. Der wirkliche Verlauf der Polschwankungen ist wesentlich anders: Die Drehaxe beschreibt statt der Kreise unregelmäßige Schleifen wechselnder Größe. Eine bestimmte Periode des Umlaufes um die Mittellage läßt sich allerdings erkennen, aber sie umfaßt nicht 305 sondern 427 Tage; ist also sehr erheblich größer. Man kann aus diesen Erfahrungen schließen, daß Störungen, welche eine Verlegung der Drehachse bewirken, fortwährend stattfinden, und daß die Erde sich nicht wie ein starrer Körper verhält. Die Störungen entstehen in der Hauptsache wohl durch die Verlagerungen der Massen der Atmosphäre, welche mit den meteorologischen Vorgängen verbunden sind; von einigen Autoren wird nach dem Vorgang von J. Milne wahrscheinlich zu machen gesucht, daß eine wesentliche Ursache in den Erdbeben zu finden sei. — Die Verlängerung der Periode entspricht — worauf S. Newcomb 1892 hingewiesen hat — einer gewissen Nachgiebigkeit der Erde. Die Periode von 305 Tagen, welche einer völligen Starrheit der Erde entsprechen würde, pflegt man die Eulersche Periode zu nennen, und die tatsächliche Periode (427 Tage) zu Ehren ihres Entdeckers die Chandlersche Periode. Aus dem Unterschied der beiden Perioden kann man durch die Rechnung einen Schluß auf die Riegheit (elastische

Widerstandsfähigkeit) des Erdkörpers machen. Es folgt, daß die Erde im Mittel etwa 2 mal rieger als Stahl ist. Wir wollen beachten, daß diese außerordentlich große Widerstandsfähigkeit sich noch gegenüber deformierenden Kräften zeigt, die ihre Periode erst in 427 Tagen, also in mehr als einem Jahr durchlaufen.

Es ist bequem und für unsere Ziele vorteilhaft die Riegheit relativ zur Dichte zu messen, denn eben so wird sie durch die Rechnungen, welche sich auf das Verhalten der Erde bei der Ebbe und Flut und bei den Polschwankungen stützen, gefunden und ebenso kommt sie auch für die Erdbebenwellen in Betracht. Riegheit durch Dichte dividiert gibt gerade das Quadrat der Geschwindigkeit der elastischen transversalen Wellen, welche bei den Erdbeben die zweiten Vorläufer bilden. Aus den Polschwankungen ist so zu schließen, daß die Geschwindigkeit der transversalen Wellen in der Erde im Mittel etwa 6 Kilometer in 1 Sekunde beträgt. Ich möchte nicht versäumen, hier sogleich hinzuzufügen, daß manches „Wenn und Aber“ dabei ist. Bei der Abschätzung wurde nämlich die Dichte der Erde und ihre Riegheit als gleichmäßig durch das ganze Innere hindurch angenommen, was sicherlich nicht zutrifft. Es kommt hier eben zur Geltung, daß die Polschwankungen nur eine summarische Schätzung erlauben. Wir werden erfahren, daß die Untersuchung der Erdbebenwellen uns sehr viel weiter in die Einzelheiten zu führen vermag.

Haben die Überlegungen des § 2 über die Bedeutung der kritischen Temperatur gelehrt, daß alle Folgerungen über einen flüssigen oder gar gasförmigen Aggregatzustand, welche an die jedenfalls vorhandene hohe Temperatur im Innern der Erde geknüpft wurden, durchaus unsicher und gefährlich sind, so lassen die Erklärungen der Ebbe und Flut und der Polschwankungen nicht den mindesten Zweifel darüber, daß solchen Vorstellungen entsagt werden muß. Die Erde im Ganzen verhält sich wie ein fester Körper, dessen Riegheit selbst die des Stahles unter den uns gewohnten Temperatur- und Druckverhältnissen noch weit übertrifft.

§ 4. Massenverteilung in der Erde, Hypothesen von Legendre und Roche.

Die Gestalt der Erde, also vor allem ihre Abplattung, hängt von der Massenverteilung im Innern ab. Wäre die Dichte überall gleich, so müßte die Erde um $^{1}/_{231}$ abgeplattet sein, d. h. der Polarradius müßte um so viel kleiner sein als der Äquatorialradius.

Tatsächlich erreicht die Abplattung nur etwa $^1/_{298}$; daraus läßt sich folgern, daß die Dichte der Erdmasse nach der Tiefe zu wachsen muß. Dies wird auch wahrscheinlich gemacht durch den Umstand, daß die mittlere Dichte der Erde (die aus Messungen der „Gravitationskonstante" erschlossen werden kann) sich zu 5,53 ergibt, während die Oberfläche der Erde aus Gestein gebildet wird, dessen Dichte etwa bei 2,5 oder nicht viel darüber liegt.

Bis zu einem gewissen Grade erlaubt die Größe der tatsächlichen Abplattung einen Schluß auf die Massenverteilung im Innern der Erde, doch bleibt hierbei noch eine weitgehende Unbestimmtheit, denn es lassen sich unendlich viele Dichte-Verteilungen angeben, welche zu dem wirklichen Wert der Abplattung führen würden. So hat man sich in älteren Zeiten darauf beschränkt gesehen, die Massenanordnung hypothetisch zu erschließen. Man hat dabei früher stets eine allmähliche Veränderung der Dichte vom Mittelpunkt der Erde zur Oberfläche angenommen. Unter den aufgestellten Hypothesen will ich zwei, die Hypothesen von Legendre und von Roche als Beispiele besprechen. Legendre (1789, kurze Zeit nach ihm auch Laplace) setzte:

$$\delta = \delta_c \frac{\sin nr}{nr} \tag{1}$$

wobei δ die Dichte im Abstand r vom Mittelpunkt bedeutet; δ_c ist die Dichte im Mittelpunkt der Erde, n eine gewisse Zahl. Die Konstanten δ_c und n bestimmen sich durch die aus den Beobachtungen bekannten Werte der mittleren Dichte und der Abplattung. Setzt man die mittlere Dichte $\delta_m = 5{,}53$, die Abplattung $= {}^1/_{298}$ so folgt:

$$\delta_c = 11{,}0; \quad \bar{r}n = 2{,}487 \tag{2}$$

$\bar{r}$ bezeichnet den mittleren Radius der Erdoberfläche, sodaß

$$\bar{r} = 6370 \text{ km}$$

zu setzen ist. — Als Dichte an der Oberfläche der Erde, also für $r = \bar{r}$ ergibt sich

$$\bar{\delta} = 2{,}69; \tag{3}$$

es ist hiernach

$$\delta_c = 4{,}09\,\bar{\delta}. \tag{4}$$

In der Folgerung (3) zeigt sich ein erster Erfolg der Legendreschen Hypothese: sie ergibt für die Dichte an der Erdoberfläche einen Wert, der mit der Erfahrung recht wohl zusammenstimmt.

— Zu noch interessanteren Folgerungen gelangt man bei Beachtung der Druckverteilung, die im Innern der Erde als eine Wirkung der Schwere der Erdschichten hervorgeht. Bezeichnet p den Druck, so ergibt (1) für ihn

$$p = \frac{3}{2}\,\frac{\overline{g\,r}}{n^2\bar{r}^2\,\delta_m}(\delta^2 - \bar{\delta}^2) \tag{5}$$

$\bar{g}$ bezeichnet hier die Schwerkraft an der Erdoberfläche. — (5) ordnet den Druck p in einfachster Weise der Dichte δ zu und legt so folgende Vorstellung nahe: Die Erde ist einheitlich aus einem einzigen Stoff aufgebaut und die Dichtezunahme nach innen kommt daher allein auf Rechnung des wachsenden Druckes der darüber lastenden Erdschichten. Das Gesetz

$$p = k\,(\delta^2 - \delta_0^2) \tag{6}$$

verbindet für den Erdstoff Druck (p) und Dichte (δ), und bestimmt die Dichtezunahme. — k ist in (6) eine Konstante, welche die Kompressibilität kennzeichnet; δ_0 bedeutet die Dichte beim Druck $p = 0$ und darf für die Erde $= \bar{\delta}$ gesetzt werden:

$$\delta_0 = \bar{\delta}. \tag{7}$$

Der Wert von k ergibt sich durch Vergleich von (6) und (5). Setzt man unter Verwertung der gewöhnlichen physikalischen Centimeter - Gramm - Sekunden - Einheiten $\bar{g} = 981$, $\bar{r} = 6{,}37.10^8$, ferner $\delta_m = 5{,}53$, $n\bar{r} = 2{,}49$, so folgt

$$k = 27300\,.\,10^6 \text{ (cm, gr, sec)}. \tag{8}$$

Bei diesen Einheiten wird der Druck p nach „Dynen“ per Quadratcentimeter gemessen. Rechnet man statt dessen nach Atmosphären, so folgt, wenn man bedenkt, daß 10^6 Dynen per Quadratcentimeter nahe $= 1$ Atmosphäre sind, $k =$ ca. 27000 Atmosphären und daher nach (6):

$$p = 27000\,(\delta^2 - \bar{\delta}^2) \text{ Atmosphären.} \tag{9}$$

Der Druck im Mittelpunkt der Erde würde hiernach 3,1 Millionen Atmosphären betragen. —

Die Kompressibilität der Stoffe, welche die Erdrinde zusammensetzen, ist für kleine Drucke, also für $\delta = \delta_0 = \bar{\delta}$ bekannt. Wir müssen nun fragen: Stimmt damit die Formel (9) zusammen? Um das zu prüfen setzen wir

$$\frac{dp}{K} = -\frac{dv}{v} = +\frac{d\delta}{\delta}, \tag{10}$$

wobei v das Volumen einer bestimmten, beliebig abgemessenen Menge der Substanz und dp die zur Volumverminderung $-dv$ und zur Dichtevermehrung $d\delta$ gehörige Druckvermehrung bezeichnet. Die Größe $1/K$ bedeutet dann die Kompressibilität, da sie die Volumverminderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens angibt, welche sich einer Druckvermehrung um die Druckeinheit zuordnet. K selbst gibt den Druck an, der das Volumen auf 0 reduzieren würde, wenn die Volumenverminderung stets in gleichem Maße fortschreiten würde wie bei kleinen Drucken. — Vergleicht man (10) mit (6) so folgt

$$K = 2\,k\delta^2. \tag{11}$$

Setzt man hierin $k = 27\,000$, $\delta = \bar{\delta} = 2{,}7$, $\delta = \delta_c = 11{,}0$ so ergibt sich für die Volumelastizität des Erdstoffes

an der Oberfläche: im Mittelpunkt:

$$\bar{K} = 400\,000, \qquad K_c = 6\,500\,000. \tag{12}$$

Durch $\bar{K}$ wird für die Oberfläche eine Kompressibilität angezeigt, die etwa den geologisch älteren Gesteinen entspricht, sich also den wirklichen Verhältnissen gut anpaßt. Wiederum und in sehr charakteristischer Weise scheint sich die Legendre'sche Hypothese zu bewähren.

Will man die ganze Bedeutung dieser günstigen Ergebnisse recht verstehen, so muß man beachten, daß bei alleiniger Herrschaft des Zufalles ja gar kein Grund ersichtlich ist, warum die Legendre'sche Hypothese für die Dichte und die Kompressibilität der Erdschichten an der Oberfläche nicht völlig unsinnige Resultate ergeben sollte. Es kann und soll daher nicht geleugnet werden, daß manches für die Legendre'sche Hypothese spricht, und die sorgfältige Beachtung, welche sie so oft gefunden hat, durchaus gerechtfertigt scheint. — Wir wollen bemerken, daß sie bei der hier skizzierten Ausdehnung uns die Erde als einen Steinball erscheinen läßt. Wollten wir eine Schichtung nach verschiedenen Materialen, wollten wir insbesondere einen Metallkern von erheblichen Dimensionen annehmen, so würde aller Reiz der physikalischen Folgerungen sogleich verschwinden. Die Grundformel

$$\delta = \delta_c \frac{\sin nr}{nr}$$

sänke dann zu einer Interpolationsformel. Die Formel (6) stellte kein fundamentales physikalisches Gesetz dar, sondern wäre nichts als ein überraschendes Spiel des Zufalles; ebenso hätte dann nur

der Zufall die scheinbar zutreffenden Folgerungen für die Kompressibilität der Erdrinde herbeigeführt. —

Die Legendre'sche Formel (1) ist für die Rechnung wegen ihrer transzendenten Form oft unbequem. So hat man daher vielfach versucht, durch Umgestaltung die mathematische Behandlung zu erleichtern. — Das kann z. B. sehr einfach geschehen, wenn man Reihenentwicklungen vornimmt und diese dann abkürzt. Es ist:

$$(13) \qquad \delta = \delta_c \frac{\sin nr}{nr} = \delta_c \left(1 - \frac{1}{1.2.3}(nr)^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}(nr)^4 - \cdots\right)$$

Beschränkt man sich, statt die ganze unendliche Reihe zu nehmen, rechts in der Klammer auf das erste Glied hinter der 1, so kann geschrieben werden:

$$(14) \qquad \delta = \delta_c \left(1 - s\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)$$

wobei δ_c nach wie vor die Dichte im Mittelpunkt bezeichnet und s eine gewisse Konstante ist. Die Formel (14) pflegt man das Roche-sche Gesetz zu nennen. Setzt man die Abplattung $\varepsilon = {}^1/_{298}$, die mittlere Dichte = 5,53, so ergibt sich[1])

$$(15) \qquad s = 0{,}78, \quad \delta_c = 10{,}4, \quad \bar{\delta} = 0{,}22, \quad \delta_c = 2{,}3.$$

Auch bei der Roche'schen Hypothese wird stetige Änderung der Dichte vorausgesetzt, liegt es also nahe, an einen einheitlichen Aufbau der Erde aus einem einzigen Stoff zu denken, der nach innen zu durch den wachsenden Druck immer stärker komprimiert ist. Es folgt aus (14):

$$(16) \qquad p = \frac{\overline{gr}}{2} \frac{\delta_m}{(1 - \frac{3}{5}s)^2}\left(1 - \tfrac{4}{5}s + \tfrac{1}{5}s^2 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 + \tfrac{4}{5}s\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^4 - \tfrac{1}{5}s^2\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^6\right)$$

und daher:

$$(17) \qquad p = \frac{\overline{gr}}{10s} \frac{\delta_m}{(1 - \frac{3}{5}s)^2}\left(-2 + 5s - 4s^2 + s^3 + \left(\frac{\delta}{\delta_c}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\delta_c}\right)^3\right)$$

worin δ_c durch $\delta_0 = \bar{\delta}$ ersetzt werden kann, wenn man beachtet, daß $\delta_c/\bar{\delta} = \delta_c/\delta_0 = 1/(1-s)$ ist. Die Formel (17) ersetzt bei der Roche'sche Hypothese das Gesetz (6), welches zu der Legendreschen Hypothese führte. (17) ergibt für die Kompressibilität:

1) G. H. Darwin. The Theorie of the Figure of the Earth carried to the Second Order of Small Quantities. Monthly Notices Roy. Ast. Soc. vol. 60, 1899, p. 81.

$$\frac{K}{\delta} = \frac{\overline{gr}}{10\,s\,(1-\frac{3}{5}s)}\left(2\frac{\delta}{\delta_e} + 3\left(\frac{\delta}{\delta_e}\right)^2\right) \tag{18}$$
$$= \frac{\overline{gr}}{2}\,\frac{1}{s\,(1-\frac{3}{5}s)}\left(1 - s\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right)\left(1 - \frac{3}{5}s\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right).$$

Hiernach wäre der Druck im Mittelpunkt der Erde

$$p_e = 3 \text{ Millionen Atmosphären} \tag{19}$$

und die Volumelastizität, wenn der Druck nach Atmosphären gemessen wird:

	an der Oberfläche:	im Mittelpunkt:
(20)	$\bar{K} = 200\,000,$	$K_e = 8\,000\,000.$

Vergleichen wir im Ganzen genommen die Roche'sche Hypothese mit der Legendreschen, so folgt, daß sie sich in Bezug auf die Oberflächendichte $\bar{\delta}$ etwa ebenso, in Bezug auf die Oberflächen-Volumelastizität wohl etwas weniger gut bewährt.

§ 5. Massenverteilung in der Erde; Annahme eines Metallkerns.

Bei aller Anerkennung der Erfolge der Legendre'schen und der verwandten Hypothesen hegte ich doch schon seit langem ernste Bedenken gegen die hier zugrunde gelegte Annahme einer stetigen Zunahme der Dichte nach dem Innern der Erde hin. Will man in der Dichtevermehrung eine Wirkung des steigenden Druckes sehen, so müßte bei der Legendre'schen Hypothese eine Kompression auf $1/4$, bei der Roche'schen Hypothese nahezu auf $1/5$ des Volumens von der Oberfläche der Erde bis zum Mittelpunkt angenommen werden. Bei der außerordentlichen Widerstandsfähigkeit, die den Molekülen nach den physikalischen Erfahrungen zugeschrieben werden muß, schien mir das durchaus unerlaubt. Entschließt man sich demgemäß, die Vorstellung einer weitgehenden Mitwirkung des Druckes aufzugeben, so muß die Dichtevariation auf Rechnung von Materialänderung gesetzt werden, und es werden sprungartige Änderungen der Dichte weit wahrscheinlicher als allmälich verlaufende. Insbesondere ist dann bei der hohen mittleren Dichte der Erde anzunehmen, daß der Steinuntergrund, auf dem wir leben, nur einen Mantel anzeigt, der einen Metallkern umhüllt. Diese Vorstellung mir zu eigen machend, unterwarf ich zunächst einmal den denkbar einfachsten Fall der Rechnung, daß ein Steinmantel von nicht merklich variabeler Dichte einen Metallkern von nicht merklich

variabeler Dichte umhülle.[1]) Wird dabei für die Abplattung ε aus der Erfahrung ein bestimmter Wert eingesetzt, so bleibt die Größe des Metallkerns noch unbestimmt; man kann jede beliebige Größe annehmen, jedoch ist dann stets sowohl die Dichte des Metallkerns δ' wie die des Steinmantels δ mitbestimmt. Daß auch die Dichte des Steinmantels sich als Folge der Annahme über die Dimensionen des Metallkerns ergibt, hat eine weitgehende Einschränkung der Wahl zur Folge, denn man muß verlangen, daß der Steinmantel eine Dichte erhält, die nach unseren Erfahrungen noch innerhalb der Grenzen des Wahrscheinlichen liegt. Als solche Grenzen nahm ich die Dichten $\delta = 3{,}0$ und $\delta = 3{,}4$ an. Dann ergibt sich unter der Annahme

$$\delta_m = 5{,}53$$

für die mittlere Dichte der Erde:

ε	$\delta = 3{,}0$	$\delta = 3{,}2$	$\delta = 3{,}4$	$\delta = 3{,}0$	$\delta = 3{,}2$	$\delta = 3{,}4$
	$r'/\bar{r}$			δ'		
$^1/_{298}$	0,792	0,773	0,749	8,05	8,22	8,45
$^1/_{297}$	0,795	0,776	0,753	8,00	8,16	8,38
$^1/_{296}$	0,798	0,780	0,757	7,94	8,10	8,30

Der Wert $\varepsilon = {}^1/_{298}$ für die Abplattung ist nach Helmert der beste, den man zur Zeit aus der Gesamtheit der Pendelbeobachtungen ableiten kann. $^1/_{297}$ schien mir bei Abfassung meiner Arbeit als der beste Wert, der damals aus der Gesamtheit der Pendelbeobachtungen der geodätischen und der astronomischen Untersuchungen erschlossen werden konnte. Auch Darwin entschied sich in der vorhin zitierten Arbeit für $^1/_{297}$. — r' bedeutet den Radius des Metallkerns; die Tabelle zeigt, daß er auf $^4/_5$ bis $^3/_4$ des Radius $\bar{r}$ der Erdkugel zu schätzen ist. — δ' bedeutet die Dichte des Metallkerns; es ergibt sich, daß sie ein wenig über 8 liegt, das heißt, es folgt eine Dichte, die gerade dem etwas komprimierten Eisen ($\delta_0 = 7{,}8$) entspricht. Die Hypothese der zweiteiligen Erde paßt sich also ganz vorzüglich der Vorstellung an, daß der Metallkern in der Hauptsache aus Eisen besteht. Dieser Umstand spricht gewiß zu ihren Gunsten, denn Eisen ist sowohl bei dem Aufbau der Erde als auch bei dem der Sonne sehr be-

1) Nachrichten d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1897, S. 221.

deutend beteiligt, und es fallen auf die Erde vorherrschend Meteorite, die teils aus Stein, teils aus Eisen bestehen, Eisen ist also sicher einer der Hauptbestandteile unseres Sonnensystemes.

Mathematisch ist die von mir vertretene Hypothese der zweiteiligen Erde im Nachteil gegenüber der Hypothese einer einheitlich gebauten Erde, wie sie den Formeln von Legendre und Roche entspricht, weil sie 3 Größen (r', δ, δ') statt 2 (δ_* und k bei Legendre, δ_* und s bei Roche) als Unbekannte in die Rechnung einführt. So wird es nötig, über die Dichte des Steinmantels eine besondere Annahme zu machen, während diese sich bei der Hypothese der einheitlich gebauten Erde als eine Folgerung ergibt, die in ihrem Ergebnis als verträglich mit der Erfahrung erkannt wird und sich so als eine Stütze für die Ausgangshypothese verwertet werden kann. Physikalisch fällt der Vergleich fast noch mehr zu Ungunsten der Hypothese der 2-teiligen Erde aus, denn die überaus interessanten Folgerungen über Kompressibilität der Erdsubstanz, welche insbesondere bei der Hypothese von Legendre zu so überraschend guter Übereinstimmung mit der Erfahrung führten, fallen bei der Hypothese der 2-teiligen Erde ganz fort. So kann denn diese Hypothese für sich zunächst nur geltend machen, daß sie den physikalischen Vorstellungen über die Widerstandsfähigkeit der Moleküle etwas besser gerecht werde — was aber vielleicht nicht einmal von allen Physikern anerkannt werden wird —, und daß sie für die Dichte des angenommenen Metallkerns gerade diejenige ergibt, welche aus unserer Kenntnis von dem Aufbau unseres Sonnensystems am meisten zu erwarten ist. Ihre Stellung erweist sich so nicht gerade als besonders bevorzugt. Um so viel wichtiger ist es, daß durch die Analyse der seismischen Erscheinungen eine Entscheidung möglich wird, welche uns von den Zweifeln befreit: Das Urteil lautet zugunsten der Hypothese der 2-teiligen Erde.

§ 6. Fundamental-Gleichungen der Elastizitätstheorie.

Es ist der Fall der „Doppelbrechung“ der elastischen Wellen von M. J. Rudzki in seinen „Studien aus der Theorie der Erdbeben“ [1]) zwar schon ins Auge gefaßt worden, aber diese Frage wird sich für uns noch der Aufmerksamkeit entziehen. Auch die Abplattung der Erde soll hier noch außer Spiel gelassen werden, obgleich die Erdbebenbeobachtungen immerhin schon einen so

1) Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. III, 1898, S. 519.

hohen Grad von Schärfe gewonnen haben, daß eine Erweiterung in dieser Hinsicht sehr bald nötig werden wird. Vorläufig jedenfalls genügt es, mit der Annahme einer aus isotropem Material aufgebauten und aus konzentrischen Kugelflächen geschichteten Erde zu rechnen und wir wollen uns im Interesse der Einfachheit der Darstellung darauf beschränken.

Ganz kurz weise ich zunächst auf die Grundlagen hin, welche die Elastizitätstheorie isotroper Medien uns bietet.

Sind $\mathfrak{T}^{(n)}$, $\mathfrak{T}_x^{(n)}$, $\mathfrak{T}_y^{(n)}$, $\mathfrak{T}_z^{(n)}$ der elastische Druck und seine Komponenten auf einem Flächenelement mit der Normalen n bezogen auf die Flächeneinheit, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{U}_y$, $\mathfrak{U}_z$ die Verschiebung und ihre Komponenten an der betreffenden Stelle des elastischen Körpers bei der Deformation, welche den elastischen Druck $\mathfrak{T}$ erweckt, so ist

$$(21) \qquad -\mathfrak{T}_n^{(n)} = (a^2 - 2b^2) \operatorname{div} \mathfrak{U} + 2b^2 \frac{\partial \mathfrak{U}_n}{\partial n}$$

$$n = x,\ y,\ z,$$

$$(22) \quad -\mathfrak{T}_z^{(y)} = -\mathfrak{T}_y^{(z)} = b^2\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial y}\right), -\mathfrak{T}_x^{(z)} = -\mathfrak{T}_z^{(x)} = b^2\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial z}\right)$$

$$-\mathfrak{T}_y^{(x)} = -\mathfrak{T}_x^{(y)} = b^2\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial x}\right).$$

div $\mathfrak{U}$ bedeutet die „Divergenz“ der Verschiebung $\mathfrak{U}$ im Sinne der Vektoranalysis; es ist daher

$$(23) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{U} = \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z}.$$

a^2 und b^2 sind zwei Elastizitätskonstanten, die bei allen Materialien positiv sein müssen; man wird das leicht durch Betrachtung spezieller Fälle erkennen können. b^2 ist das Maß der Riegheit und verschwindet bei Flüssigkeiten; b^2 kann daher als „Riegheit“ oder als Koeffizient der „Formelastizität“ bezeichnet werden. a^2 kommt allein zur Geltung, wenn die Substanz nur in einer einzigen Richtung eine Dilatation erfährt, wenn z. B. $\partial u/\partial x$ allein von 0 verschieden ist. Man kann darum a^2 den Koeffizienten der „Linear-Elastizität“ nennen. Mit den viel benutzten Lamé'schen Konstanten λ und μ hängen a^2 und b^2 durch die Beziehungen

$$(24) \qquad \lambda = a^2 - 2b^2,\ \mu = b^2$$

zusammen.

Die Divergenz der Verschiebung $\mathfrak{U}$ gibt die Volumdilatation an, sodaß

$$(25)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{U} = \frac{dv}{v} = -\frac{d\delta}{\delta}$$

wird, wenn, v das Volumen, dv seine Vermehrung, δ die Dichte, $d\delta$ ihre Vermehrung bezeichnet. Bei einer reinen Volumveränderung findet eine Druckvermehrung dp statt, die man aus (21) erhält, indem man für $n = x, y, z$, $dp = \mathfrak{T}_n^{(n)}$ setzt. Es ergibt sich:

$$(26)\qquad \frac{dp}{K} = \frac{-dv}{v} = \frac{d\delta}{\delta},$$

wobei

$$(27)\qquad K = a^2 - \tfrac{4}{3}b^2$$

den „Koeffizienten der Volumelastizität", $1/K$ die „Kompressibilität" darstellt. —

Bei der Dehnung eines freien Stabes in der x-Richtung, wobei von alle den Druckkomponenten $\mathfrak{T}_x^{(x)}$, $\mathfrak{T}_y^{(x)}$ u. s. w. nur $\mathfrak{T}_x^{(x)}$ von 0 verschieden wird, hängen Längsdehnung $dl/l = \partial\mathfrak{U}_x/\partial x$ und Zug $-\mathfrak{T}_x^{(x)}$ durch die Formel

$$(28)\qquad \frac{-\mathfrak{T}_x^{(x)}}{E} = \frac{dl}{l} = \frac{\partial\mathfrak{U}_x}{\partial x}$$

zusammen, wobei

$$(29)\qquad E = 3\,\frac{a^2 - \tfrac{4}{3}b^2}{a^2 - b^2}\,b^2 = 3\,\frac{b^2}{a^2 - b^2}\,K$$

den „Elastizitätskoeffizienten für Längedehnungen" bezeichnet. Die Querkontraktion μ, das heißt, das Verhältnis der Verminderung der Querdimensionen zur Vermehrung der Länge, ergibt sich zu:

$$(30)\qquad \mu = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}.$$

Es ist hiernach auch:

$$(31)\qquad b^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu}\,a^2$$

$$(32)\qquad \begin{aligned} K &= \tfrac{1}{3}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\,a^2 = \tfrac{2}{3}\,\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,b^2 = \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{1-2\mu}\,E \\ E &= \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{1-\mu}\,a^2 = 2(1+\mu)\,b^2 = 3(1-2\mu)K. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall

$$\mu = \tfrac{1}{4};$$

denn einmal zeigen die Beobachtungen, daß für die bei weitem größte Mehrzahl der festen Körper und speziell für die Gesteine, welche die Erdrinde aufbauen, der tatsächliche Wert von μ in der Nachbarschaft von $^1/_4$ liegt, und zweitens haben theoretische Untersuchungen französischer Mathematiker gleich anfangs, als man im 18. Jahrhundert das allgemeine Problem der Elastizität zu behandeln begann, gezeigt, daß μ den Wert $^1/_4$ annehmen muß, wenn die Materie sich aus Molekülen aufbaut, die nur mit Zentralkräften von Mittelpunkt zu Mittelpunkt aufeinander einwirken. Damals nahm man es meist als selbstverständlich an, daß nur so beschaffene Kräfte die Moleküle verbinden könnten und war in Verlegenheit, wie die beobachteten Abweichungen von dem Wert $^1/_4$ zu erklären seien. Heute haben wir uns zu komplizierteren Vorstellungen über die Wechselwirkungen der Moleküle bequemen müssen, wir finden keine Schwierigkeit darin, polare und multipolare Kräfte vorauszusetzen. Wir sehen daher in $^1/_4$ nur einen speziellen unter unendlich vielen möglichen Fällen. Um so interessanter und wichtiger ist es, daß die Erdbebenbeobachtungen, wie wir später sehen werden, für das Innere der Erde bei den für unsere menschliche Vorstellung ganz außerordentlich hohen Drucken für μ ebenfalls Werte ergeben, welche sich von $^1/_4$ nicht weit entfernen. — Für $\mu = {}^1/_4$ selbst wäre:

$$(33) \qquad \begin{aligned} 3b^2 &= a^2; \qquad \mu = \tfrac{1}{4}; \\ 3K &= \tfrac{5}{3}a^2 = 5b^2 = 2E. \end{aligned}$$

§ 7. Fortpflanzung elastischer Erschütterungen in homogenen Medien.

Für die Fortpflanzung elastischer Erschütterungen in homogenen Medien ergibt die Mechanik nach (21), (22) das Gesetz:

$$(34) \qquad \frac{d^2\mathfrak{U}}{dt^2} = \mathfrak{a}^2 \text{ grad div } \mathfrak{U} - \mathfrak{b}^2 \text{ vers vers } \mathfrak{U}.$$

Hierin ist abkürzend

$$(35) \qquad \mathfrak{a}^2 = \frac{a^2}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}^2 = \frac{b^2}{\varrho}$$

gesetzt worden. Im Übrigen wurden die Vektorbezeichnungen angewandt. Die „Divergenz“ wurde schon auf Seite 16 erklärt. „grad“ bedeutet „Gradient“. Ein Vektor $\mathfrak{V}$ mit den Komponenten

$\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{V}_y$, $\mathfrak{V}_z$ ist der Gradient einer Raumfunktion f, wenn bei rechtwinkligen Koordinaten

$$\mathfrak{V}_x = \frac{\partial f}{\partial x},\ \mathfrak{V}_y = \frac{\partial f}{\partial y},\ \mathfrak{V}_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{36}$$

ist. — „vers" bedeutet „Version". Version ist ein von Maxwell gleichbedeutend mit „curl" und „rotation" gebrauchter Ausdruck. Ein Vektor $\mathfrak{V}'$ ist die Version eines Vektors $\mathfrak{V}$, wenn bei rechtwinkligen Koordinaten

$$\mathfrak{V}'_x = \frac{\partial \mathfrak{V}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}_y}{\partial z},\ \mathfrak{V}'_y = \frac{\partial \mathfrak{V}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{V}_z}{\partial x},\ \mathfrak{V}'_z = \frac{\partial \mathfrak{V}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{V}_x}{\partial y} \tag{37}$$

ist. — Bei rechtwinkligen Koordinaten sagt (34) hiernach z. B. für die x-Richtung aus:

$$\frac{d^2 \mathfrak{U}_x}{dt^2} = \mathfrak{a}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z}\right) - \mathfrak{b}^2\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial x}\right)\right\}.$$

Es folgt nach (34), daß 2 Wellenbewegungen unabhängig nebeneinander in solcher Weise verlaufen, daß die Verrückung $\mathfrak{U}$ als Superposition zweier Verrückungen $\mathfrak{U}^{(1)}$ und $\mathfrak{U}^{(2)}$ erscheint

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(1)} + \mathfrak{U}^{(2)}, \tag{39}$$

von denen die eine den Gleichungen

$$\frac{d^2 \mathfrak{U}^{(1)}}{dt^2} = \mathfrak{a}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{U}^{(1)}, \tag{40}$$

$$\operatorname{vers} \mathfrak{U}^{(1)} = 0, \tag{41}$$

und die andere den Gleichungen

$$\frac{d^2 \mathfrak{U}^{(2)}}{dt^2} = -\mathfrak{b}^2 \operatorname{vers} \operatorname{vers} \mathfrak{U}^{(2)} \tag{42}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{U}^{(2)} = 0 \tag{43}$$

genügt. Die Unabhängigkeit der beiden Wellenbewegungen wird gewährleistet, indem die Schwingungsgleichungen (40), (42) die Beziehungen (41), (43) dauernd aufrecht erhalten. Man kann die Bewegungen (1) als die „Verdichtungswellen", die Bewegungen (2) als die „Scheerungswellen" bezeichnen, da nur bei (1) nicht aber bei (2) Volumänderungen eintreten, und da andererseits bei (2) allein die Scheerungselastizität zur Geltung kommt.

Die Bedingung (41) besagt, daß der Verschiebungsvektor $\mathfrak{U}^{(1)}$ ein „Potential" besitzt. Nennen wir dieses φ, sodaß

(44) $$\mathfrak{U}^{(1)} = - \operatorname{grad} \varphi$$

ist, so kann die Schwingungsgleichung (40) in der Form

(45) $$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \mathfrak{a}^2 \Delta \varphi$$

geschrieben werden, wobei das Operationszeichen Δ für eine Funktion f in der von Laplace benutzten Abkürzung div grad bedeutet:

(46) $$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Nach (45) ist $\mathfrak{a} = a/\sqrt{\varrho}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen erster Art $\mathfrak{U}^{(1)}$; die aus (44) folgende Beziehung (41) sagt dabei aus, daß es sich um longitudinale Wellen handelt.

Die Gleichung (42) kann auch in der Form

(47) $$\frac{d^2 \mathfrak{U}^{(2)}}{dt^2} = \mathfrak{b}^2 \Delta \mathfrak{U}^{(2)}$$

geschrieben werden. Es tritt dann hervor, daß die elastischen Wellen zweiter Art $\mathfrak{U}^{(2)}$ sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$ fortpflanzen. Aus der Optik ist dabei bekannt, daß durch die Bedingung (43) Transversalität der Wellen angezeigt wird. Der mit der elektromagnetischen Lichttheorie Vertraute kann zu denselben Folgerungen leicht auch durch Umwandlung der Formeln (42) (43) in die Hertz-Heaviside'schen Gleichungen gelangen. —

Zurückblickend erkennen wir, daß bei elastischen Erschütterungen unabhängig von einander Verdichtungswellen als longitudinale Wellen mit der Geschwindigkeit

(48) $$\mathfrak{a} = \frac{a}{\sqrt{\varrho}}$$

und Scheerungswellen als transversale Wellen mit der Geschwindigkeit

(49) $$\mathfrak{b} = \frac{b}{\sqrt{\varrho}}$$

in die Ferne gehen.

Die Unabhängigkeit der beiden Wellenarten besteht nur in Bereichen in denen das elastische Medium homogen ist. Sie gilt insbesondere auch in dem Fall nicht, wenn die elastischen Wellen durch eine Trennungsfläche aus einem Medium in ein elastisch

verschiedenes anderes übertreten, oder wenn sie an einer äußeren Oberfläche reflektiert werden. Dann gehen im allgemeinen von der Unstetigkeitsfläche nicht nur Wellen derselben Art gebrochen oder reflektiert weiter, sondern es treten auch Wellen der anderen Art hinzu. Ein einheitlicher Wellenzug, der auf eine Trennungsfläche fällt, erregt also im allgemeinen 2 gebrochene und 2 reflektierte Wellenzüge, und er wird an einer äußeren Grenzfläche im allgemeinen in 2 Wellenzügen reflektiert. Das Problem der Brechung und Reflexion elastischer Wellen nimmt hiernach eine recht komplizierte Gestalt an. Im Folgenden soll es nur in einzelnen Grundzügen behandelt werden; etwas eingehender wird allein die Reflexion an einer äußeren Oberfläche besprochen werden, da diese für die Erdbebenwellen eine besonders große Wichtigkeit hat. Sie kommt nämlich immer da zur Geltung, wo die Erdbebenwellen an die Erdoberfläche treten und geht so in jede Beobachtung der ersten und zweiten Vorläufer ein. — Für unsere Zwecke genügt es völlig, wenn wir sowohl die elastischen Wellen als auch die Unstetigkeitsflächen als eben betrachten.

§ 8. Ebene Wellen gleichmäßiger Intensität.

Zunächst sollen die ebenen Wellen betrachtet werden, bei denen die Bewegung auf jeder Wellenfläche überall in der gleichen Weise und mit der gleichen Intensität vorsichgeht. Wir beginnen mit den longitudinalen Wellen. $\mathfrak{x}$ sei die Fortschreitungsrichtung, sodaß die Wellenebenen senkrecht auf $\mathfrak{x}$ stehen; α sei die jeweilige Verrückung parallel $\mathfrak{x}$, sodaß in der Vektorschreibweise

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{x}} = \alpha, \; \mathfrak{U}_{\eta} = 0, \; \mathfrak{U}_{\mathfrak{z}} = 0 \tag{50}$$

ist. α muß wegen der angenommenen gleichmäßigen Intensität auf jeder Ebene $\perp \mathfrak{x}$ konstant sein, hängt also nur von der Raumkoordinate $\mathfrak{x}$ und der Zeit t ab. Da es sich um eine mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ in der Richtung $\mathfrak{x}$ fortschreitende Wellenbewegung handelt, kann versucht werden, den Zusammenhang zwischen α und $t, \mathfrak{x}$ durch die Formel

$$\alpha = F^{(\alpha)}\left(t - \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}}\right) \tag{51}$$

darzustellen, wobei $F(p)$ eine Funktion einer Variablen p bedeutet, die für jede Stelle $\mathfrak{x}$ zur Zeit t den Wert $p = t - \mathfrak{x}/\mathfrak{a}$ hat. (51) kennzeichnet eine Welle, die beim Fortschreiten in sich ganz un-

verändert bleibt. Setzen wir für den Augenblick $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{U}_x = \alpha$, $\mathfrak{U}_y = 0$, $\mathfrak{U}_z = 0$, so erkennen wir, daß in der Tat (51) sowohl die Schwingungsgleichung (40), als auch die Bedingungen der Longitudinalität (41) erfüllt. — Da die Funktion F ganz unbestimmt bleibt, ist klar, daß jede beliebig gestaltete Welle durch die Formel (51) wieder gegeben werden kann.

Bei den transversalen ebenen Wellen findet die Bewegung der Teilchen des elastischen Trägers in den Ebenen senkrecht zur Fortschreitungsrichtung statt. So ist nicht eine bestimmte Schwingungslinie sondern nur eine Schwingungsebene vorgeschrieben, und es empfiehlt sich daher eine Zerlegung nach 2 Komponenten vorzunehmen. Wir wollen für die Komponenten „linear" schwingende Bewegungen annehmen (entsprechend „linear polarisierten" Wellen). $\mathfrak{x}$ sei wieder die Fortschreitungsrichtung; zwei zu $\mathfrak{x}$ und untereinander senkrechte Richtungen η und $\mathfrak{z}$ wählen wir aus und zerlegen die Verrückungen $\mathfrak{U}$ bei der Wellenbewegung in die Komponenten β und γ parallel η und $\mathfrak{z}$:

$$(52) \qquad \mathfrak{U}_{\mathfrak{x}} = 0, \ \mathfrak{U}_{\eta} = \beta, \ \mathfrak{U}_{\mathfrak{z}} = \gamma.$$

Dann gibt β eine linear schwingende Welle mit Schwingungsebenen parallel $(\mathfrak{x}, \eta)$ und γ ebenso eine linear schwingende Welle mit Schwingungsebenen parallel $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nun $\mathfrak{b}$. Nach Analogie des Falles der longitudinalen Wellen können wir setzen;

$$(53) \qquad \beta = F^{(\beta)}\left(t - \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}}\right), \ \gamma = F^{(\gamma)}\left(t - \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}}\right),$$

wobei die Funktionen $F^{(\beta)}(p)$ und $F^{(\gamma)}(p)$ ganz beliebig sind, sodaß jede beliebige transversale Wellenbewegung dargestellt werden kann.

Unter den ebenen elastischen Wellen sind für uns diejenigen mit Sinusschwingungen besonders interessant. Bedeutet $F(p)$ irgend eine der Funktionen $F^{(\alpha)}$, $F^{(\beta)}$, $F^{(\gamma)}$, so ist im Falle der Sinusschwingungen zu setzen:

$$(54) \qquad F(p) = S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda}\right),$$

wobei T die Periode, λ die Wellenlänge ist, und S und C Konstanten sind, die Amplitude und Phase bestimmen. Die Maximalamplitude wird durch $\sqrt{S^2 + C^2}$ angegeben. Periode T und Wellenlänge λ hängen durch die Gleichung

$$(55) \qquad \lambda = \mathfrak{v} T$$

zusammen, wobei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Wellen angibt, also gleich $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ ist. —

§ 9. Ebene Wellen ungleicher Intensität.

Neben den ebenen Wellen gleichmäßiger Intensität sind für die Seismik auch solche ungleichmäßiger Intensität von Wichtigkeit, da sie sich bei der Brechung und Reflexion von ebenen Wellen gleichmäßiger Intensität einstellen und auch in den „Hauptwellen“ der Erdbeben selbständig auftreten. Als „Oberflächenwellen“ finden wir sie an der Oberfläche der Erde selbst; sie werden aber auch als „Schichtwellen“ eine wesentliche Rolle spielen; es ist mir sogar sehr wahrscheinlich, daß die Vibrationen am Erdbebenherde selbst zu Schichtwellen gehören. In der vorliegenden Arbeit kann von diesem weiten Gebiet der mathematischen Analysis nur das allereinfachste zur Sprache kommen, was für das Verständnis der Reflexion und Brechung der ebenen Wellen und der „Hauptwellen“ der Erdbeben durchaus erforderlich ist.

Bei der Reflexion und Brechung ebener elastischer Wellen gleichmäßiger Intensität kann es ähnlich wie bei der „Totalreflexion“ des Lichtes dahin kommen, daß neben Wellen gleichmäßiger Intensität noch andere Bewegungen auftreten. Wie dabei der allgemeine Fall beliebiger Art der einfallenden Wellenbewegung zu behandeln ist, vermag ich nicht zu übersehen, ich weiß auch nicht anzugeben, ob von seiten eines anderen Autors dieses Problem je in Angriff genommen worden ist. Der Spezialfall der Sinusschwingungen aber bietet mindere Schwierigkeiten und läßt auch für die elastischen Erschütterungswellen eine ganz ähnliche Art der Behandlung zu, wie sie für die Optik seit langem wohl bekannt ist. Hier kommt man auf jene besondere Art ebener Wellen ungleicher Intensität mit Sinusschwingungen, die auch bei den „Hauptwellen“ der Erdbeben auftreten. Auf ihre Besprechung werde ich mich weiterhin beschränken.

Wiederum sind „Verdichtungs-“ und „Scheerungswellen“ zu unterscheiden, die bei der hier benutzten Symbolik auch „$\mathfrak{a}$“- und „$\mathfrak{b}$“-Wellen genannt werden können. ξ sei die Fortschreitungsrichtung, ζ eine zu ξ senkrecht stehende Richtung, in welcher die Intensität variiert; auf den zu ξ und ζ senkrechten Richtungen η sei die Intensität konstant. α, β, γ seien die Verschiebungen $\parallel \xi, \eta, \zeta$:

$$\mathfrak{u}_\xi = \alpha,\ \mathfrak{u}_\eta = \beta,\ \mathfrak{u}_\zeta = \gamma. \tag{56}$$

Dann können wir für die „Verdichtungswellen" (a-Wellen) mit exponentiell variierender Intensität" setzen:

$$
(57a)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda_a}{A} e^{-2\pi\frac{\zeta}{Z}}\left(S \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right) - C \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right)\right), \\ \beta = 0, \\ \gamma = \dfrac{\lambda_a}{Z} e^{-2\pi\frac{\zeta}{Z}}\left(S \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right)\right). \end{cases}
$$

T bedeutet die Schwingungsperiode, A die Wellenlänge, λ_a die Wellenlänge, welche bei ebenen Wellen gleichmäßiger Intensität zur Periode T gehören würde; die Konstante Z gibt eine Entfernung an, in welcher $\parallel \zeta$ die Amplitude variiert wie $e^{2\pi} : 1 =$ ca. 500 : 1. Die Konstanten S und C bestimmen Amplitude und Phase. — Setzt man $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, $\alpha = \mathfrak{U}_x$, $\beta = \mathfrak{U}_y$, $\gamma = \mathfrak{U}_z$, so wird man leicht feststellen können, daß durch die Ansätze (57a) die Bedingung (41) erfüllt wird. Man wird ferner finden, daß auch der Schwingungsgleichung (40) Genüge geleistet wird, wenn

$$
(58a)\quad \frac{1}{A^2} - \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{a^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_a^2}
$$

gesetzt wird. Bedeutet noch $\mathfrak{B}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, so ist

$$
(59a)\quad A = \mathfrak{B} T = \frac{\mathfrak{B}}{a} \lambda_a.
$$

Nach (58a) muß

$$
(60a)\quad A < \lambda_a,\ \mathfrak{B} < a
$$

sein, wenn A und λ_a als positive Größen betrachtet werden. — Z kann durch $-Z$ ersetzt werden; man kann auch für Z einmal $+Z$, dann $-Z$ setzen und die Resultate addieren oder subtrahieren, um so Wellen mit einer „hyperbolischen" Anordnung der Intensität zu erhalten. —

Für „Verdichtungswellen (a-Wellen) mit periodisch variierender Intensität" kann gesetzt werden:

$$
(57b)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda_a}{A} \cos 2\pi \dfrac{\zeta}{Z}\left(S \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right) - C \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right)\right), \\ \beta = 0, \\ \gamma = \dfrac{\lambda_a}{Z} \sin 2\pi \dfrac{\zeta}{Z}\left(S \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{A}\right)\right). \end{cases}
$$

$$\text{(58b)} \qquad \frac{1}{\varLambda^2}+\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{\mathfrak{a}^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathfrak{a}}^2},$$

$$\text{(59b)} \qquad \varLambda = \mathfrak{V} T = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{a}} \lambda_{\mathfrak{a}},$$

$$\text{(60b)} \qquad \varLambda > \lambda_{\mathfrak{a}}, \ \mathfrak{V} > \mathfrak{a}.$$

Z ist hier die Entfernung, in welcher man beim Fortschreiten in der ζ-Richtung wieder zu den Ausgangswerten der Verrückungen α, γ kommt. Es ist selbstverständlich, daß für ζ auch $\zeta+\zeta_0$ gesetzt werden kann, wobei ζ_0 irgend eine Konstante bedeutet. Setzt man z. B. $\zeta_0 = Z/2$, so geht $\sin 2\pi\ (\zeta/Z)$ in $\cos 2\pi\ (\zeta/Z)$, $\cos 2\pi\ (\zeta/Z)$ in $-\sin 2\pi\ (\zeta/Z)$ über. —

Bei den Scheerungswellen ($\mathfrak{b}$-Wellen) sind 2 Arten zu unterscheiden, je nachdem die Schwingungen parallel oder senkrecht zu den Ebenen erfolgen, welche die Fortschreitungsrichtung (ξ-Richtung) und die Variationsrichtung der Intensität (ζ-Richtung) enthalten. Die Scheerungswellen mit parallelen Schwingungen entsprechen bei exponentiell variirender Intensität den Formeln:

$$\text{(61a)} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{Z} e^{-2\pi\frac{\zeta}{Z}} \left(S \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right) - C \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right)\right), \\ \beta = 0, \\ \gamma = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{\varLambda} e^{-2\pi\frac{\zeta}{Z}} \left(S \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right) + C \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right)\right), \end{cases}$$

$$\text{(62a)} \qquad \frac{1}{\varLambda^2}-\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{\mathfrak{b}^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathfrak{b}}^2},$$

$$\text{(63a)} \qquad \varLambda = \mathfrak{V} T = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{b}},$$

$$\text{(64a)} \qquad \varLambda < \lambda_{\mathfrak{b}}, \ \mathfrak{V} < \mathfrak{b}.$$

Z kann wieder positiv oder negativ gewählt werden; unter Benutzung beider Fälle können wieder Wellen mit hyperbolisch variirender Intensität zusammengesetzt werden. Bei periodisch variirender Intensität ist zu setzen;

$$\text{(61b)} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{Z} \cos 2\pi\dfrac{\zeta}{Z} \left(S \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right) - C \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right)\right), \\ \beta = 0, \\ \gamma = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{\varLambda} \sin 2\pi\dfrac{\zeta}{Z} \left(S \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right) + C \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\xi}{\varLambda}\right)\right), \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{\mathfrak{b}^2 T^2}=\frac{1}{\lambda_\mathfrak{b}^2}, \tag{62b}$$

$$\Lambda = \mathfrak{B}T = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\lambda_\mathfrak{b}, \tag{63b}$$

$$\Lambda > \lambda_\mathfrak{b},\ \mathfrak{B} > \mathfrak{b} \tag{64b}$$

wieder können $\sin 2\pi\,(\mathfrak{z}/Z)$ und $\cos 2\pi\,(\mathfrak{z}/Z)$ durch $\cos 2\pi\,(\mathfrak{z}/Z)$ und $-\sin 2\pi\,(\mathfrak{z}/Z)$ ersetzt werden.

Die Scheerungswellen mit Schwingungen senkrecht zu den Richtungen des Fortschreitens und der Variation der Intensität entsprechen bei exponentiell variirender Intensität den Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= 0,\\ \beta &= e^{-2\pi\frac{z}{Z}}\left(S\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}}{\Lambda}\right)+C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}}{\Lambda}\right)\right),\\ \gamma &= 0 \end{aligned}\right. \tag{65a}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}-\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{\mathfrak{b}^2 T^2}=\frac{1}{\lambda_\mathfrak{b}^2}, \tag{66a}$$

$$\Lambda = \mathfrak{B}T = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\lambda_\mathfrak{b}, \tag{67a}$$

$$\Lambda < \lambda_\mathfrak{b},\ \mathfrak{B} < \mathfrak{b}; \tag{68a}$$

und bei periodisch variirender Intensität den Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= 0,\\ \beta &= \sin 2\pi\frac{z}{Z}\left(S\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}}{\Lambda}\right)+C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\mathfrak{x}}{\Lambda}\right)\right),\\ \gamma &= 0, \end{aligned}\right. \tag{65b}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}+\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{\mathfrak{b}^2 T^2}=\frac{1}{\lambda_\mathfrak{b}^2}, \tag{66b}$$

$$\Lambda = \mathfrak{B}T = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\lambda_\mathfrak{b}, \tag{67b}$$

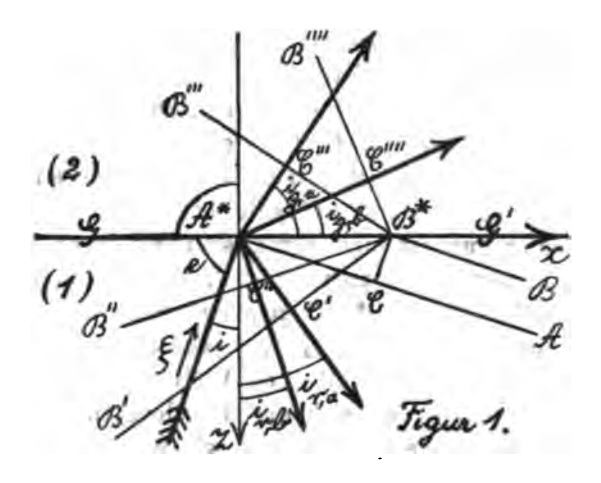
$$\Lambda > \lambda_\mathfrak{b},\ \mathfrak{B} > \mathfrak{b}. \tag{68b}$$

Für (65a) ist der Übergang zu hyperbolisch variirender Intensität wie früher zu machen, in (65b) darf $\sin 2\pi\,(z/Z)$ durch $\cos 2\pi\,(z/Z)$ ersetzt werden.

§ 10. Geometrisches über Reflexion und Brechung.

Bevor wir daran gehen, die Reflexion elastischer Wellen in den verschiedenen einzelnen Fällen zu untersuchen, die für die Seismik bedeutungsvoll sind, sollen einige Vorbemerkungen allgemeiner Art in Bezug auf Reflexion und Brechung gemacht werden. Es kommen hier wichtige geometrische Beziehungen in Betracht, die sich auch auch ohne eingehende Verwertung der in den letzten Paragraphen aufgestellten Formeln leicht überblicken lassen. Dann wird auch von der Formulierung der Grenzbedingungen zu sprechen sein.

Eine ebene Welle gleichmäßiger Intensität falle auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei elastisch sich verschieden verhaltenden Medien (1) und (2). Eine Ebene, welche auf der Grenzebene senkrecht steht und die Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle enthält, kann dann nach dem üblichen Sprachgebrauch als „Einfallsebene“ bezeichnet werden. Sie stellt zugleich die „Reflexionsebene“ und die „Brechungsebene“ dar, denn sie muß aus Gründen der Symmetrie auch die Fortschreitungsrichtungen der gebrochenen und der reflektierten Wellen enthalten.



Figur 1 stelle die Einfallsebene dar. GG' sei die Schnittlinie der Trennungsebene zwischen den Medien (1) und (2). A^*A sei ein Stück einer Wellenebene der einfallenden Welle zur Zeit t. Wie in der Figur angedeutet, soll der „Einfallswinkel“ im Sinne der Optik mit i bezeichnet werden; i ist also der Win-

kel, den die Einfallsrichtung mit der Normalen der Trennungsfläche bildet. In der Seismologie verwendet man häufig statt des „Einfallswinkel“ den sogenannten „Emersionswinkel“, das heißt den Winkel, den die Einfallsrichtung mit der Trennungsfläche selbst bildet; in der Figur ist er mit e bezeichnet worden. Einfallswinkel und Emergenzwinkel ergänzen einander, wie man sieht, zu 90^0. — Je nach ihrer Art rückt die Welle A^*A in der Einfallsrichtung, das heißt in ihrer Normalen, mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}^{(1)}$ oder $\mathfrak{b}^{(1)}$ vor. Ist sie also zu einer um Δt späteren Zeit $t+\Delta t$ nach B^*B gelangt, und stellt B^*C das von B^* auf A^*A gefällte Lot dar, so muß $CB^* = \mathfrak{a}^{(1)}\Delta t$ oder $= \mathfrak{b}^{(1)}\Delta t$ sein. In der Grenzfläche ist der Fortschritt der Welle in der gleichen Zeit durch A^*B^* angegeben. Bedeutet also $\mathfrak{B}$ die Oberflächengeschwindigkeit, so ist $\mathfrak{B} = A^*B^*/\Delta t$. Die Figur lehrt, daß $\sin i = B^*C/A^*B^*$, so folgt denn der Satz $\sin i = \mathfrak{a}^{(1)}/\mathfrak{B}$ oder $= \mathfrak{b}^{(1)}/\mathfrak{B}$, das heißt, es sind der Einfallswinkel i, die Raumgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ($= \mathfrak{a}$ oder $= \mathfrak{b}$) und die Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ allgemein durch die Beziehung verbunden:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{v}}{\sin i}. \tag{69}$$

Eine reflektierte Wellenebene wird in der Zeit Δt um $\mathfrak{a}^{(1)}\Delta t$ oder $\mathfrak{b}^{(1)}\Delta t$ vorgerückt sein müssen; wählen wir diejenige, welche zur Zeit t durch A^* geht, welche also die einfallende Welle A^*A fortsetzt, so muß sie zur Zeit $t+\Delta t$ durch B^* gehen, muß also eine solche Lage B^*B' oder B^*B'' einnehmen, daß das von A^* auf B^*B' oder B^*B'' gefällte Lot A^*C' oder A^*C'' die Länge $\mathfrak{a}^{(1)}\Delta t$ oder $\mathfrak{b}^{(1)}\Delta t$ hat. Ganz ähnliches muß für die Lote auf die beiden gebrochenen Wellen B^*B''', B^*B'''' gelten: $B^*C''' = \mathfrak{a}^{(2)}\Delta t$, $B^*C'''' = \mathfrak{b}^{(2)}\Delta t$. In der Figur ist der Einfallswinkel durch B^*A^*C, und sind die Reflexionswinkel durch A^*B^*C', A^*B^*C'', die Brechungswinkel durch A^*B^*C''', A^*B^*C'''' gegeben; bezeichnen wir sie der Reihe nach durch i, $i_{r,\mathfrak{a}}$, $i_{r,\mathfrak{b}}$, $i_{g,\mathfrak{a}}$, $i_{g,\mathfrak{b}}$, schreiben wir noch $\mathfrak{v}$ für die Geschwindigkeit der einfallenden Welle, sodaß $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}^{(1)}$ oder $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}^{(1)}$ ist, je nachdem es sich um eine longitudinale oder eine transversale Welle handelt, bezeichnen wir endlich die Oberflächengeschwindigkeit wieder mit $\mathfrak{B}$, so folgt aus der Figur leicht:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{v}}{\sin i} = \frac{\mathfrak{a}^{(1)}}{\sin i_{r,\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{b}^{(1)}}{\sin i_{r,\mathfrak{b}}} = \frac{\mathfrak{a}^{(2)}}{\sin i_{g,\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{b}^{(2)}}{\sin i_{g,\mathfrak{b}}}. \tag{70}$$

Hiermit sind die bekannten Reflexions- und Brechungsgesetze formuliert. Insbesondere ergibt sich, daß von den beiden reflektierten

Wellen nur die gleichartige unter demselben Winkel zurückgeworfen wird, unter dem die einfallende Welle ankommt.

Unsere Figur und unsere Überlegungen werden hinfällig, wenn sich für eines oder für mehrere der Lote B^*C', B^*C'', B^*C''', B^*C'''', die $= \mathfrak{a}^{(1)}\Delta t$, $\mathfrak{b}^{(1)}\Delta t$, $\mathfrak{a}^{(2)}\Delta t$, $\mathfrak{b}^{(2)}\Delta t$ gemacht werden sollen, eine größere Länge als A^*B^* ergibt, denn dann wird es unmöglich, die betreffenden Wellen zu konstruieren. In (70) drückt sich das durch imaginär-werden der betreffenden unter den Winkeln $i_{r,\mathfrak{a}}$, $i_{r,\mathfrak{b}}$, $i_{g,\mathfrak{a}}$, $i_{g,\mathfrak{b}}$ aus. Wenn die einfallende Welle einfache Sinusschwingungen darstellt, so wird, wie eine eingehende mathematische Untersuchung zeigt, jede der imaginär werdenden reflektierten oder gebrochenen ebenen Wellen durch Oberflächenwellen der in § 9 betrachteten Art mit exponentiell variirenden Intensität ersetzt. Bei komplizierteren Wellenbewegungen sind kompliziertere Folgen zu erwarten.

Begrenzt GG' das Medium (1) gegen den leeren Raum, oder gegen ein Medium, welches sich nicht merklich anders wie dieser verhält, so findet nur Reflexion statt, die gebrochenen Wellen fällen ganz fort. Dieser Fall soll in der vorliegenden Arbeit allein behandelt werden. Ich gebe hier teilweise vorgreifend eine Übersicht der in Betracht kommenden verschiedenen Fälle.

Einfallende Welle longitudinal, $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$.

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{a}}{\sin i} = \frac{\mathfrak{a}}{\sin i_{r,\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{b}}{\sin i_{r,\mathfrak{b}}}. \tag{71}$$

Da $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ ist, bleiben beide Reflexionswinkel $i_{r,\mathfrak{a}}$, $i_{r,\mathfrak{b}}$ reell. Es treten dann also 2 reflektierte ebene Wellen gleichmäßiger Intensität auf, eine longitudinale und eine transversale. Aus Symmetriegründen ist zu folgern, daß die Schwingungen der transversalen Welle parallel der Einfallsebene erfolgen.

Einfallende Welle transversal, $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}$, Schwingungen parallel der Einfallsebene:

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{b}}{\sin i} = \frac{\mathfrak{a}}{\sin i_{r,\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{b}}{\sin i_{r,\mathfrak{b}}}. \tag{72}$$

Solange

$$\sin i \leq \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, \tag{73}$$

solange also der Einfallswinkel eine gewisse Neigung gegen die Normale der Grenzebene nicht überschreitet, der Emersionswinkel $e = 90^0 - i$ oberhalb einer gewissen Grenze bleibt, sind $i_{r,\mathfrak{a}}$ und

$i_{r,\mathfrak{b}}$ reell. Es treten dann 2 reflektierte ebene Wellen gleichmäßiger Intensität auf, eine logitudinale und eine transversale. — Wenn

$$\sin i > \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \tag{74}$$

ist, die Neigung der einfallenden Welle den durch $\sin i = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ gegebenen Grenzwert also überschreitet, wird $i_{r,\mathfrak{a}}$ imaginär. Eine longitudinale ebene Welle gleichmäßiger Intensität kann dann nicht auftreten, vielmehr werden von der Grenzebene kompliziertere Wellenformen ausgehen, deren Art von der Art der Schwingungen der einfallenden Wellen abhängt. Der Fall der reinen Sinusschwingungen läßt sich mathematisch leicht verfolgen und ergibt das Auftreten von Oberflächenwellen der $\mathfrak{a}$-Form. Daneben werden ebene $\mathfrak{b}$-Wellen gleichmäßiger Intensität reflektiert. —

Einfallende Welle transversal, $\mathfrak{v} = \mathfrak{b}$, Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Hier können reflektierte longitudinale Wellen aus Symmetrierücksichten nicht auftreten. Demgemäß sind nur reflektierte transversale Wellen ($i_{r,\mathfrak{b}} = i$) zu erwarten und zwar selbstverständlich nur solche mit Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

§ 11. Grenzbedingungen bei der Reflexion.

Die Grenzbedingungen, welche im Falle der Reflexion an einer Oberfläche erfüllt sein müssen, sind gegeben durch

$$\overline{\mathfrak{T}}_x^{(n)} = 0, \ \overline{\mathfrak{T}}_y^{(n)} = 0, \ \overline{\mathfrak{T}}_z^{(n)} = 0, \tag{75}$$

wobei n die Normale der Oberfläche bezeichnet, und der über $\mathfrak{T}$ gesetzte Strich darauf hinweist, daß es sich um den Wert an der Oberfläche selbst handelt. Da wir die Oberfläche als frei annehmen, muß ja in der Tat die zu ihr gehörige elastische Druckkraft $\mathfrak{T}$ mit allen ihren Komponenten dauernd verschwinden. Für die Rechnung werden wir jede der Komponenten $\mathfrak{T}_x^{(n)}$, $\mathfrak{T}_y^{(n)}$, $\mathfrak{T}_z^{(n)}$ in die Anteile zerlegen, welche den verschiedenen einfallenden und fortgehenden Wellen entsprechen. Da alle unsere Formeln linear sind, ergeben sich die totalen Komponenten $\mathfrak{T}_x^{(n)}$, $\mathfrak{T}_y^{(n)}$, $\mathfrak{T}_z^{(n)}$ einfach durch Summation der Einzelkomponenten und können die Einzelkomponenten ohne weiteres so berechnet werden, als wären nur die zugehörigen Verschiebungen vorhanden.

Wir benutzen ein Koordinatensystem, dessen z-Axe senkrecht zur reflektierenden, als eben angesehenen Grenzfläche steht und

in das elastische Medium hinweist, dessen x-Achse in der Einfallsebene liegt und dessen y-Axe auf dieser Ebene senkrecht steht. Die (z, x)-Ebene wird dann die Fortschreitungsrichtungen sowohl der einfallenden als auch der reflektierten Wellen enthalten. Den Anfangspunkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) legen wir in die Grenzfläche selbst. Jeder Welle, den ankommenden Wellen sowohl, wie den reflektierten ordnen wir ein besonderes Koordinantensystem ξ, η, ζ mit gleichem Anfangspunkt ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$) zu, wobei ξ stets die Richtung der Fortpflanzung angibt und $\eta \parallel y$ liegt. Ähnliche Abkürzungen wie in § 8 und 9 benutzend, werden wir die Verrückungen parallel x, y, z und ξ, η, ζ mit u, v, w und α, β, γ bezeichenen:

$$(76) \qquad u = \mathfrak{U}_x,\ v = \mathfrak{U}_y,\ w = \mathfrak{U}_z,\ \alpha = \mathfrak{U}_\xi,\ \beta = \mathfrak{U}_\eta,\ \gamma = \mathfrak{U}_\zeta.$$

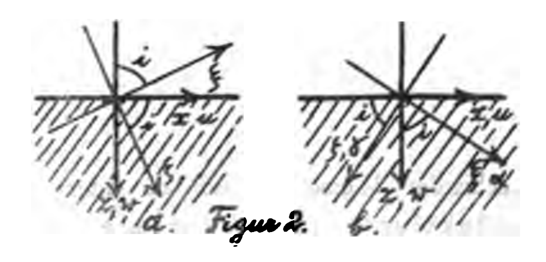
Nach diesen Bestimmungen ist für eine einfallende Welle (Figur 2a):

$$(77) \qquad \begin{cases} u = \alpha \sin i + \gamma \cos i, & v = \beta, & w = -\alpha \cos i + \gamma \sin i, \\ \xi = x \sin i - z \cos i, & \eta = y, & \zeta = x \cos i + z \sin i, \end{cases}$$

und für eine reflektierte Welle (Figur 2b):

$$(78) \qquad \begin{cases} u = \alpha \sin i - \gamma \cos i, & v = \beta, & w = +\alpha \cos i + \gamma \sin i, \\ \xi = x \sin i + z \cos i, & \eta = y, & \zeta = -x \cos i + z \sin i. \end{cases}$$

In dem zuletzt hingeschriebenen System von Formeln bedeutet i den Reflexionswinkel und ist demgemäß, wo die Unterscheidung notwendig scheint, durch $i_{r,a}$, $i_{r,b}$ zu ersetzen. Ebenso könnte man die u, v, w, α, β, γ, $\mathfrak{T}_x^{(n)}$, $\mathfrak{T}_y^{(n)}$, $\mathfrak{T}_z^{(n)}$, welche zu den verschiedenen einzelnen Wellen gehören, durch Indices von einander unterscheiden, etwa in der Art: $u^{(e,a)}$, $u^{(r,a)}$, ... $\mathfrak{T}_x^{(e,a,n)}$, $\mathfrak{T}_x^{(r,a,n)}$, ..., doch scheint es nicht notwendig, sich dieser Umständlichkeit zu unterziehen. —



Die Normale der Oberfläche ist hier parallel der z-Axe; so ist denn $n = z$ zu setzen, und es verlangen die Grenzbedingungen

(75) die Bestimmung der $\mathfrak{T}_x^{(z)}, \mathfrak{T}_y^{(z)}, \mathfrak{T}_z^{(z)}$. Dazu stellt § 6 die Formeln:

$$(79)\begin{cases} -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_x^{(z)} = \mathfrak{b}^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), & -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_y^{(z)} = \mathfrak{b}^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_z^{(z)} = (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mathfrak{b}^2\left(-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

zur Verfügung.

Abkürzend setzen wir noch

$$(80)\qquad \frac{\partial F(p)}{\partial p} = F'(p).$$

Handelt es sich dann um eine einfallende oder eine reflektierte longitudinale Welle

$$(81)\qquad \alpha = F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right),\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

so ist für die Oberfläche ($z = 0$) nach (77), (78) und (79):

$$(82)\begin{cases} -\frac{1}{\varrho}\overline{\mathfrak{T}}_x^{(z)} = \pm\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\sin 2i\,F'\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{a}}\right), & -\frac{1}{\varrho}\overline{\mathfrak{T}}_y^{(z)} = 0, \\ -\frac{1}{\varrho}\overline{\mathfrak{T}}_z^{(z)} = -\mathfrak{a}\cos 2i_{\mathfrak{b}}F'\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{a}}\right), \end{cases}$$

wobei für $\mathfrak{T}_x^{(z)}$ das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Welle einfällt oder reflektiert wird. $i_{\mathfrak{b}}$ ist eine Hülfsgröße leicht ersichtlicher Bedeutung, bestimmt durch

$$(83)\qquad \mathfrak{V} = \frac{\sin i}{\mathfrak{a}} = \frac{\sin i_{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}}.$$

$\mathfrak{V}$ bedeutet wie bisher die Oberflächengeschwindigkeit. — Es mag noch bemerkt werden, daß in der Oberfläche die Verrückungen

$$(84)\qquad \bar{u} = \sin i\,F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{a}}\right),\ \bar{v} = 0,\ \bar{w} = \mp\cos i\,F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{a}}\right)$$

stattfinden.

In entsprechender Weise gehören zu einer einfallenden oder einer reflektierten transversalen Welle, deren Schwingungen in der Einfallsebene erfolgen:

$$(85)\qquad \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{b}}\right),$$

die für die Oberfläche geltenden Formeln:

$$(86)\quad \begin{cases} -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_x^{(s)} = \mathfrak{b}\cos 2i\, F'\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right), \quad -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_y^{(s)} = 0, \\ -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_z^{(s)} = \pm\, \mathfrak{b}\sin 2i\, F'\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right). \end{cases}$$

$$(87)\quad \bar{u} = \pm\cos i\, F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right),\ \bar{v} = 0,\ \bar{w} = \sin i\, F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right).$$

Für eine einfallende oder reflektierte transversale Welle mit zur Einfallsebene senkrechten Schwingungen:

$$(88)\quad \alpha = 0,\ \beta = F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{b}}\right),\ \gamma = 0,$$

ergeben sich für die Oberfläche die Formeln:

$$(89)\quad -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_x^{(s)} = 0,\ -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_y^{(s)} = \pm\, \mathfrak{b}\cos i\, F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right), -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_z^{(s)} = 0,$$

$$(90)\quad \bar{u} = 0,\ \bar{v} = F\left(t-\frac{x\sin i}{\mathfrak{b}}\right),\ \bar{w} = 0.$$

Handelt es sich speziell um Sinusschwingungen, so wollen wir die längs der Oberfläche gemessene Wellenlänge mit $\varDelta$ bezeichnen; die Oberflächengeschwindigkeit sei wiederum $\mathfrak{V}$. Es ist dann bei longitudinalen Wellen

$$(91)\quad \varDelta = \mathfrak{V}T = \frac{\lambda_{\mathfrak{a}}}{\sin i},\ \lambda_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}T$$

und bei transversalen Wellen

$$(92)\quad \varDelta = \mathfrak{V}T = \frac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{\sin i},\ \lambda_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}T.$$

Für eine einfallende oder reflektierte longitudinale Welle ist zu setzen:

$$(93)\quad \alpha = S\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\xi}{\lambda_{\mathfrak{a}}}\right) + C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\xi}{\lambda_{\mathfrak{a}}}\right), \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

und es folgt außer $\bar{\mathfrak{X}}_y^{(s)} = 0$:

$$(94)\quad \begin{cases} -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_x^{(s)} = \pm\, \mathfrak{b}^2 \sin 2i\, \frac{2\pi}{\lambda_{\mathfrak{a}}}\left(S\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\varDelta}\right) - C\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\varDelta}\right)\right), \\ -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{X}}_z^{(s)} = -\mathfrak{a}^2 \cos 2i_{\mathfrak{b}}\, \frac{2\pi}{\lambda_{\mathfrak{a}}}\left(S\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\varDelta}\right) - C\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\varDelta}\right)\right), \end{cases}$$

wobei wieder das obere Zeichen zur einfallenden, das untere zur reflektierten Welle gehört, und es ist neben $\bar{v} = 0$:

$$(95)\quad \begin{cases} \bar{u} = \quad \sin i\left(S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right), \\ \bar{w} = \mp \cos i\left(S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right). \end{cases}$$

Für eine einfallende oder reflektierte **transversale Welle mit Schwingungen parallel der Einfallsebene** ist ebenso:

$$(96)\quad \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right)$$

und gilt außer $\mathfrak{T}_y^{(s)} = 0$, $\bar{v} = 0$:

$$(97)\quad \begin{cases} -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{T}}_x^{(s)} = \quad \mathfrak{b}^2 \cos 2i \frac{2\pi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\left(S \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) - C \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right), \\ -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{T}}_z^{(s)} = \pm\, \mathfrak{b}^2 \sin 2i \frac{2\pi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\left(S \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) - C \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right). \end{cases}$$

$$(98)\quad \begin{cases} \bar{u} = \pm \cos i\left(S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right), \\ \bar{w} = \quad \sin i\left(S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right). \end{cases}$$

Für eine einfallende oder reflektierte **transversale Welle mit zur Einfallsebene senkrechten Schwingungen** endlich ist zu setzen:

$$(99)\quad \alpha = 0,\ \beta = S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\mathfrak{x}}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right),\ \gamma = 0,$$

und außer $\mathfrak{T}_x^{(s)} = 0$, $\mathfrak{T}_z^{(s)} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\bar{w} = 0$:

$$(100)\quad -\frac{1}{\varrho}\bar{\mathfrak{T}}_y^{(s)} = \pm\, \mathfrak{b}^2 \cos i \frac{2\pi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\left(S \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) - C \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right)\right),$$

$$(101)\quad \bar{v} = S \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right) + C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{A}\right).$$

Für **Oberflächenwellen** sollen bezeichnet werden: die Oberflächenwellenlänge mit A, die Oberflächengeschwindigkeit mit $\mathfrak{B}$, die Verminderungsstufen mit $Z_{\mathfrak{a}}$ und $Z_{\mathfrak{b}}$, je nachdem es sich um Verdichtungs- oder um Scheerungswellen handelt. Ich will ferner als mathematische Hülfsgrößen noch verwerten: die Wellenlängen $\lambda_{\mathfrak{a}}$ und $\lambda_{\mathfrak{b}}$, welche zu ebenen Wellen gleichmäßiger Intensität

bei gleicher Schwingungsperiode T gehören würden, und die fingierten Einfallswinkel i_a, i_b solcher Wellen bestimmt durch

$$\text{(102)} \qquad \sin i_a = \frac{\lambda_a}{\Lambda} = \frac{a}{\mathfrak{B}}, \quad \sin i_b = \frac{\lambda_b}{\Lambda} = \frac{b}{\mathfrak{B}}.$$

Von diesen ist hier i_a immer, und i_b in einen Teil der Fälle imaginär, da λ_a immer und λ_b in einem Teil der Fälle größer als Λ sein wird. Bei diesen Festsetzungen ist:

$$\text{(103)} \qquad \Lambda = \mathfrak{B}T = \frac{\mathfrak{B}}{a}\lambda_a = \frac{\mathfrak{B}}{b}\lambda_b,$$

$$\text{(104)} \qquad \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{Z_a^2} = \frac{1}{a^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_a^2}; \quad \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{Z_b^2} = \frac{1}{b^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_b^2}.$$

Zur Erhöhung der Uebersicht werde ich in den Formeln einige aus (102) berechenbare trigonometrische Funktionen von i_a und i_b benutzen, die zum Teil imaginär sind. Dies tut nichts, da nur Kombinationen mit reellen Werten auftreten, es sich also eigentlich nur um eine abkürzende Schreibweise in imaginärem Gewande handelt. — Bei $\sin i_a > 1$ sind reell die Größen:

$$\text{(105)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos i_a}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\lambda_a}{Z_a} = \sqrt{\dfrac{\lambda_a^2}{\Lambda^2} - 1} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\mathfrak{B}^2} - 1}, \\[2ex] \dfrac{\sin 2 i_a}{\sqrt{-1}} = 2\dfrac{\lambda_a^2}{\Lambda Z_a} = 2\dfrac{\lambda_a}{\Lambda}\sqrt{\dfrac{\lambda_a^2}{\Lambda^2} - 1} = 2\dfrac{a}{\mathfrak{B}}\sqrt{\dfrac{a^2}{\mathfrak{B}^2} - 1}. \end{cases}$$

Ebenso sind für den Fall $\sin i_b > 1$ reell:

$$\text{(106)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos i_b}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\lambda_b}{Z_b} = \sqrt{\dfrac{\lambda_b^2}{\Lambda^2} - 1} = \sqrt{\dfrac{b^2}{\mathfrak{B}^2} - 1}, \\[2ex] \dfrac{\sin 2 i_b}{\sqrt{-1}} = 2\dfrac{\lambda_b^2}{\Lambda Z_b} = 2\dfrac{\lambda_b}{\Lambda}\sqrt{\dfrac{\lambda_b^2}{\Lambda^2} - 1} = 2\dfrac{b}{\mathfrak{B}}\sqrt{\dfrac{b^2}{\mathfrak{B}^2} - 1}. \end{cases}$$

Stets reell sind:

$$\text{(107)} \qquad \begin{cases} \cos 2 i_a = -\left(2\dfrac{\lambda_a^2}{\Lambda^2} - 1\right) = -\left(2\dfrac{a^2}{\mathfrak{B}^2} - 1\right), \\[2ex] \cos 2 i_b = -\left(2\dfrac{\lambda_b^2}{\Lambda^2} - 1\right) = -\left(2\dfrac{b^2}{\mathfrak{B}^2} - 1\right). \end{cases}$$

Für Verdichtungs-Oberflächen-Wellen kann nach (57a) gesetzt werden:

$$(108)\quad\begin{cases} u = \dfrac{\lambda_a}{A} e^{-2\pi\frac{z}{Z_a}}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)-C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\\ v = 0,\\ w = \dfrac{\lambda_a}{Z_a} e^{-2\pi\frac{z}{Z_a}}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)+C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\end{cases}$$

wobei für z außer 0 nur positive Werte eingesetzt werden dürfen. Z_a muß reell sein, also ist nach (105) die Bedingung:

$$(109)\qquad A < \lambda_a, \quad \mathfrak{V} < \mathfrak{a}$$

zu erfüllen; im übrigen ist bei gegebener Periode T jedes Wertpaar der Oberflächen-Wellenlänge A, bezüglich der Oberflächen-Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ zulässig. — Für die Oberfläche, der $z = 0$ entspricht, folgt außer $\overline{\mathfrak{T}}_y^{(z)} = 0$, $\bar{v} = 0$:

$$(110)\quad\begin{cases} -\dfrac{1}{\varrho}\overline{\mathfrak{T}}_x^{(z)} = -\mathfrak{b}^2\dfrac{\sin 2i_a}{\sqrt{-1}}\dfrac{2\pi}{\lambda_a}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)-C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\\ -\dfrac{1}{\varrho}\overline{\mathfrak{T}}_z^{(z)} = \mathfrak{a}^2\cos 2i_b\dfrac{2\pi}{\lambda_a}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)+C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right).\end{cases}$$

$$(111)\quad\begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\lambda_a}{A}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)-C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\\ \bar{w} = \dfrac{\lambda_a}{Z_a}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)+C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right).\end{cases}$$

Für Scheerungs-Oberflächenwellen mit Schwingungen in Ebenen parallel der Fortschreitungsrichtung und senkrecht zur Oberfläche ist außer $v = 0$ zu setzen:

$$(112\text{a})\quad\begin{cases} u = \dfrac{\lambda_b}{Z_b} e^{-2\pi\frac{z}{Z_b}}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)-C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\\ w = \dfrac{\lambda_b}{A} e^{-2\pi\frac{z}{Z_b}}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)+C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\end{cases}$$

$$(113\text{a})\qquad A < \lambda_b, \quad \mathfrak{V} < \mathfrak{b},$$

und es ergiebt sich außer $\mathfrak{T}_y^{(z)} = 0$, $\bar{v} = 0$:

$$(114\text{a})\quad\begin{cases} -\dfrac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_x^{(z)} = \mathfrak{b}^2\cos 2i_b\dfrac{2\pi}{\lambda_b}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)-C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\\ -\dfrac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_z^{(z)} = -\mathfrak{b}^2\dfrac{\sin 2i_b}{\sqrt{-1}}\dfrac{2\pi}{\lambda_b}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)+C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right),\end{cases}$$

$$(115\text{a})\quad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\lambda_b}{Z_b}\left(S\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right) - C\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right), \\ \bar{w} = \dfrac{\lambda_b}{A}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right) + C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right). \end{cases}$$

Für **Scheerungs-Oberflächenwellen mit Schwingungen parallel der Oberfläche** ist zu setzen:

$$(112\text{b})\quad \begin{cases} u = 0, \quad w = 0, \\ v = \epsilon^{-2\pi\frac{z}{Z_b}}\left(S\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right) + C\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{A}\right)\right). \end{cases}$$

$$(113\text{b})\qquad A < \lambda_b, \quad \mathfrak{B} < \mathfrak{b}$$

und es ergiebt sich außer $\mathfrak{T}_z^{(u)} = 0$, $\mathfrak{T}_z^{(w)} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\bar{w} = 0$:

$$(114\text{b})\qquad -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{T}_z^{(v)} = -\mathfrak{b}^2\frac{2\pi}{Z_b}\left(S\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{A}\right) + C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{A}\right)\right),$$

$$(115\text{b})\qquad \bar{v} = S\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{A}\right) + C\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{A}\right).$$

§ 12. Reflexion longitudinaler Wellen.

Die einfallende longitudinale Welle gleichmäßiger Intensität sei gegeben durch:

$$(116)\qquad \alpha = F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right), \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

ihr Einfallwinkel sei i. Reflektiert wird dann eine ebene longitudinale Welle gleichmäßiger Intensität unter dem gleichen Winkel und eine ebene transversale Welle gleichmäßiger Intensität unter dem Winkel i_b, gegeben durch

$$(117)\qquad \sin i : \sin i_b = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}.$$

Man wird sogleich zu der Vermutung geführt, daß für die reflektierte longitudinale Welle

$$(118)\qquad \alpha = R_a F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right), \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

und für die reflektierte transversale Welle

$$(119)\qquad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = R_b F\left(t-\frac{\xi}{\mathfrak{b}}\right)$$

zu setzen ist, wobei R_a und R_b gewisse Zahlen sind, denn da in

der Oberfläche $\mathfrak{x} = x \sin i$, bezüglich $\mathfrak{x} = x \sin i_\mathfrak{b}$ ist, erhalten dann alle Wellen die gleiche Oberflächengeschwindigkeit:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{a}}{\sin i} = \frac{\mathfrak{b}}{\sin i_\mathfrak{b}}, \tag{120}$$

was die Bedingung für die Zusammengehörigkeit ist. In der Tat läßt sich leicht nachweisen, daß die Ansätze (118), (119) dem Problem genügen.

Die 3 Wellen müssen zusammen $\overline{\mathfrak{T}}_x^{(z)} = 0$, $\overline{\mathfrak{T}}_z^{(z)} = 0$ ergeben. Hieraus folgt nach § 11:

$$\begin{cases} (1 - R_\mathfrak{a}) \sin 2i + \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} R_\mathfrak{b} \cos 2 i_\mathfrak{b} = 0, \\ (1 + R_\mathfrak{a}) \cos 2 i_\mathfrak{b} + \dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} R_\mathfrak{b} \sin 2 i_\mathfrak{b} = 0. \end{cases} \tag{121}$$

Dies sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der beiden Zahlen $R_\mathfrak{a}$, $R_\mathfrak{b}$. Verwertet man die Lösungen für (118) und (119), so wird den Grenzbedingungen an der Oberfläche und damit allen Anforderungen des Problemes genügt.

Wird

$$\frac{1 - R_\mathfrak{a}}{1 + R_\mathfrak{a}} = m, \quad -R_\mathfrak{a} = \frac{m-1}{m+1} \tag{122}$$

gesetzt, so folgt aus (121):

$$m = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_\mathfrak{b}} \operatorname{ctg}^2 2 i_\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \frac{\cos^2 2 i_\mathfrak{b}}{4 \sin^2 i_\mathfrak{b} \cos i_\mathfrak{b}} \frac{1}{\cos i} = \frac{\left(\dfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} - 2 \sin^2 i\right)^2}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} - \sin^2 i}} \frac{1}{4 \sin^2 i \cos i}. \tag{123}$$

$$R_\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \frac{2}{m+1} \operatorname{ctg} 2 i_\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \frac{1}{m+1} \frac{\dfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} - 2 \sin^2 i}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} - \sin^2 i}} \frac{1}{\sin i}. \tag{124}$$

Die Energie ist proportional mit dem Quadrat der Amplitude. Der Verlust an Energie, den die reflektierte longitudinale Welle gegenüber der einfallenden erfährt, ist also durch $1 - R_\mathfrak{a}^2$ angezeigt. Unsere Formeln ergeben

$$1 - R_\mathfrak{a}^2 = R_\mathfrak{b}^2 \frac{\sin 2 i_\mathfrak{b}}{\sin 2 i} = \frac{4m}{(m+1)^2}. \tag{125}$$

Der Verlust der longitudinalen Welle wird vollständig zur Bildung der transversalen Welle aufgewandt; ohne auf den sehr einfachen

Beweis näher einzugehen, mag hier bemerkt werden, daß die Transformation der Energie in (125) zum vollen Ausdruck kommt, sodaß (125) die „Energiegleichung" darstellt.

Die Beobachtungen der Erderschütterungen an der Erdoberfläche ergeben nur die Gesammtbewegung ohne Trennung in die drei Wellen. Nach (84), (87) ist an der Oberfläche

$$\bar{u} = \alpha \cdot \frac{-R_b \cos i_b}{\cos 2 i_b}; \quad -\bar{w} = \alpha \cdot \frac{-R_b}{2 \sin i_b}. \tag{126}$$

Für den scheinbaren Austrittswinkel $\bar{i}$ gemessen wie i und i_b gegen die Normale der Oberfläche ergiebt sich

$$\operatorname{tg} \bar{i} = \frac{\bar{u}}{-\bar{w}} = \operatorname{tg} 2 i_b. \tag{127}$$

Es ist also der scheinbare Austrittswinkel longitudinaler Wellen

$$\bar{i} = 2 i_b \tag{128}$$

und nicht etwa $= i$, wie man ihn erhielte, wenn man die Reflexion außer Acht lassen dürfte, und wie man in der Tat oft genug fälschlich angenommen hat. Für streifenden Einfall, $i = 90°$, $\sin i = 1$, wird $\sin i_b = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, also

$$(\operatorname{tg} \bar{i})_{i=90°} = \left(\frac{u}{-w}\right)_{i=90°} = \frac{2\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \frac{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}}{1 - 2\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}. \tag{129}$$

Da $\mathfrak{b}^2$ ungefähr $= \frac{1}{3}\mathfrak{a}^2$ ist, folgt ungefähr $(\operatorname{tg}\bar{i})_{i=90°} = 2{,}8$ $(\bar{i})_{i=90°} =$ ca $70°$ d. h. schon dann, wenn eine longitudinale Welle streifend einfällt, wie es in Nähe eines oberflächlich gelegenen Herdes der Fall sein wird, scheint der Stoß aus der Tiefe unter einem Winkel von nahe $20°$ gegen die Horizontale aufzusteigen! Unmittelbar ersichtlich ist hiernach, daß ein Beobachter, der ohne Rücksicht auf die Elastizitätstheorie dem Augenschein traut, aus den fühlbaren und sichtbaren Wirkungen in der Umgebung des Epizentrums auf eine viel zu tiefe Lage des Herdes schließen wird. In der Tat sind derartige Fehler bisher wohl stets gemacht worden.

Die Größe der Oberflächen-Verschiebungen $\bar{u}$ und $\bar{w}$ variirt bei gleich bleibender Amplitude α der einfallenden Welle in ziemlich komplizierter Weise mit dem Einfallswinkel i. Für den Fall der Reflexion des Erdbebenwellen an der Erdoberfläche wird im II. Teil dieser Arbeit das Nähere angegeben werden.

Dort wird auch eine Tabelle für den Zusammenhang von i und $\bar{i}$ mitgeteilt werden.

§ 13. Reflexion transversaler Wellen.

Bei der Reflexion transversaler Wellen sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, jenachdem die Schwingungen parallel oder senkrecht zur Einfallsebene erfolgen. Wenn Wellen beliebiger Art mit beliebig gerichteteten und ihre Richtung beliebig wechselnden Schwingungen einfallen, sind für die Rechnung Zerlegungen in die 2 Komponenten parallel und senkrecht der Schwingungsebene vorzunehmen, und müssen die Komponenten dann gesondert behandelt wenden.

A. Schwingungen parallel der Einfallsebene.

Finden die Schwingungen parallel zur Einfallsebene statt, so können nach den Symmetrieverhältnissen sowohl die transversalen Wellen der gleichen Art, als auch longitudinale Wellen reflektiert werden und in der Tat treten außer in speziellen Fällen beide Arten von Wellen auf. Dabei ergibt sich aber eine Komplikation dann, wenn der Reflexionswinkel für eine etwaige ebene longitudinale Welle gleichmäßiger Intensität i_a imaginär wird, denn dann kann eine solche Welle nicht auftreten, es müssen vielmehr Wellen anderer und von vornherein nicht angebbarer Art von der Oberfläche ausgehen.

A, 1. Wir beginnen mit dem einfachen Fall, in welchem i_a reell wird. Er findet statt, wenn

$$\sin i \leqq \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \tag{130}$$

ist, wenn also die Richtung, in der die einfallende Welle vorwärts geht, mit der Normalen der Oberfläche keinen größeren Winkel bildet, als den durch $\sin i = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ bestimmten Grenzwinkel. Bei den Erdbebenwellen werden wir dabei auf die Gebiete fern vom Herd hingewiesen. Für die einfallende Welle ist zu setzen:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = F\left(t - \frac{\xi}{\mathfrak{b}}\right), \tag{131}$$

für die reflektierte longitudinale Welle, deren Reflexionswinkel i_a durch

$$\sin i_a = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \sin i \tag{132}$$

der Ober-
(147) zu
windigkeit,

= 0 ergeben, da

$\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\Lambda}\right)$

Unter

talen und vertikalen Bewegungen $\bar{u}$ und $\bar{w}$ an der Oberfläche so beurteilt, als handele es sich um longitudinale Stöße; er ergibt sich als negativ, wie vorauszusehen. Beachtet man den transversalen Charakter der Wellen, so muß als scheinbarer Austrittswinkel der Winkel $\bar{i} = 90^0 + \bar{i}'$ gelten, der nach (141) durch

$$\text{(142)} \qquad \operatorname{tg} \bar{i} = \frac{\bar{w}}{\bar{u}} = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_a} \operatorname{tg} 2i = \sqrt{\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} - \sin^2 i}\, \frac{2 \sin i}{\cos 2i}$$

dargestellt wird.

A, 2. Der Fall: i_a imaginär, tritt ein, wenn

$$\text{(143)} \qquad \sin i > \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

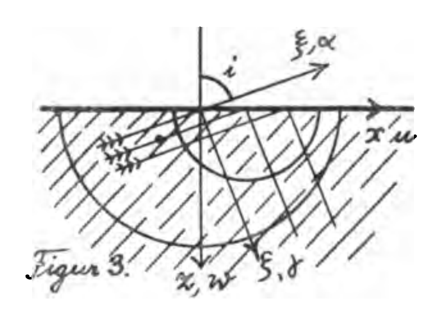
wenn also die Richtung der einfallenden transversalen Welle stärker gegen die Normale der Oberfläche geneigt ist als im Grenzwinkel, für den $\sin i = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ wird. Dann wird

$$\text{(144)} \qquad \sin i_a = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \sin i$$

größer als 1 und

$$\text{(145)} \qquad \cos i_a = \sqrt{-1}\, \sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2} \sin^2 i - 1},$$

eine rein imaginäre Größe. Eine ebene longitudinale Welle gleichmäßiger Intensität kann sich dann überhaupt nicht bilden, da die nach der Huygensschen Vorstellung in der Grenzebene entspringenden elementaren longitudinalen Kugelwellen nicht mehr gemeinsame Tangentialebenen besitzen, sondern ohne sich zu schneiden in einander liegen (vgl. Figur 3). Bemerkenswert ist, daß diese longitudinalen Wellen in der Grenzfläche den erregenden ein-



fallenden Transversalwellen vorauseilen, sodaß sie schon vor dem Eintreffen der letzteren Bewegungen veranlassen. —

Wie schon früher angekündigt, soll hier das Problem nur in dem speziellen Fall der reinen Sinusschwingungen besprochen werden und zwar unter der Annahme, daß die Schwingungen schon so lange andauern, daß sich an der Grenzfläche ein stationärer Zustand herausgebildet hat.

Die unter dem Winkel i einfallende Welle sei

$$(146) \qquad \alpha = 0, \;\; \beta = 0, \;\; \gamma = \Gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right),$$

die unter dem Winkel i reflektierte ebene transversale Welle gleichmäßiger Intensität:

$$(147) \quad \alpha = 0, \;\; \beta = 0, \;\; \gamma = \Gamma \left\{ R_{\mathfrak{b},s} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right) + R_{\mathfrak{b},c} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right) \right\}.$$

Die Wellen (146) und (147) zusammengenommen, erlauben noch nicht, die Grenzbedingungen zu erfüllen, es fehlen also noch weitere reflektierte Bewegungen. Als solche finden wir Oberflächen-Verdichtungswellen, bei denen die Schwingungen in Ellipsen stattfinden, die parallel der Reflexionsebene liegen. Für diese Wellen setzen wir nach (108):

$$(148) \begin{cases} u = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{a}}}{\varLambda} e^{-2\pi \frac{z}{Z_{\mathfrak{a}}}} \Gamma \left(R_{\mathfrak{a},c} \cos 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\varLambda}\right) - R_{\mathfrak{a},s} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\varLambda}\right)\right), \\[2ex] w = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{a}}}{Z_{\mathfrak{a}}} e^{-2\pi \frac{z}{Z_{\mathfrak{a}}}} \Gamma \left(R_{\mathfrak{a},c} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\varLambda}\right) + R_{\mathfrak{a},s} \cos 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\varLambda}\right)\right). \end{cases}$$

$\varLambda$, die Oberflächen-Wellenlänge, muß hier offenbar gleich der Oberflächen-Wellenlänge sein, welche den Wellen (146) und (147) zu gehört. Bedeutet $\mathfrak{B}$ wiederum die Oberflächen-Geschwindigkeit, so ist also zu setzen:

$$(149) \qquad \varLambda = T\mathfrak{B} = \frac{\lambda_{\mathfrak{b}}}{\sin i} = \frac{\mathfrak{b}T}{\sin i} = \frac{\lambda_{\mathfrak{a}}}{\sin i_{\mathfrak{a}}} = \frac{\mathfrak{a}T}{\sin i_{\mathfrak{a}}}.$$

Die Verminderungsstufe $Z_{\mathfrak{a}}$ wird nach (104) durch

$$(150) \qquad \frac{1}{\varLambda^2} - \frac{1}{Z_{\mathfrak{a}}^2} = \frac{1}{\mathfrak{a}^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathfrak{a}}^2}$$

bestimmt. Die Grenzbedingungen $\mathfrak{T}_z^{(z)} = 0$, $\mathfrak{T}_x^{(z)} = 0$ ergeben, da jedesmal die Faktoren von $\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\varLambda}\right)$ und $\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\varLambda}\right)$ der Null gleich gesetzt werden müssen, hier 4 Gleichungen. Unter

Verwertung der Formeln des § 11 folgt:

$$(151)\quad\begin{cases} \cos 2i\,(1+R_{\mathfrak{b},s}) - \dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\dfrac{\sin 2i_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{-1}}R_{\mathfrak{a},c} = 0, \\ \cos 2i\,R_{\mathfrak{b},c} - \dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\dfrac{\sin 2i_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{-1}}R_{\mathfrak{a},s} = 0, \\ \sin 2i\,(1-R_{\mathfrak{b},s}) + \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\cos 2i\,R_{\mathfrak{a},s} = 0, \\ \sin 2i\,R_{\mathfrak{b},c} + \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\cos 2i\,R_{\mathfrak{a},c} = 0. \end{cases}$$

zur Bestimmung der 4 Unbekannten R. Bei der Feststellung der Bedeutung der trigonometrischen Funktionen von $i_{\mathfrak{a}}$ sind die Formeln (106) zu beachten. Es folgt:

$$(152)\quad\begin{cases} R_{\mathfrak{a},s} = -\dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\operatorname{tg} 2i\,R_{\mathfrak{b},c},\ R_{\mathfrak{a},c} = \operatorname{ctg} 2i\,\dfrac{\sqrt{-1}}{\cos i_{\mathfrak{a}}}\cos i\,R_{\mathfrak{b},c} \\ 1 - R_{\mathfrak{b},s} = -\sqrt{-1}\,m\,R_{\mathfrak{b},c},\ 1 + R_{\mathfrak{b},s} = -\dfrac{1}{\sqrt{-1}\,m}R_{\mathfrak{b},c}, \end{cases}$$

wobei ebenso wie $\cos i_{\mathfrak{a}}/\sqrt{-1}$ auch

$$(153)\quad\begin{cases} \sqrt{-1}\,m = \dfrac{\sqrt{-1}\operatorname{tg} i_{\mathfrak{a}}}{\operatorname{tg} i}\operatorname{ctg}^2 2i = \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\dfrac{\sqrt{-1}}{\cos i_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\cos^2 2i}{4\sin^2 i\cos i} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 i - \dfrac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}}\dfrac{\cos^2 2i}{4\sin^2 i\cos i} \end{cases}$$

eine reelle Größe darstellt.

Nach (152) ist

$$(154)\qquad 1 = R^2_{\mathfrak{b},s} + R^{(2)}_{\mathfrak{b},c},$$

die reflektierte ebene Welle, deren Amplitude $= \Gamma\sqrt{R^2_{(\mathfrak{b},s)} + R^2_{(\mathfrak{b},c)}}$ ist, nimmt also die ganze Energie der einfallenden Welle mit sich fort. Denkt man an das entsprechende Problem der Optik, so kann man sagen, es finde „Totalreflexion“ der transversalen Welle statt. Da $R_{(\mathfrak{b},c)}$ nicht $= 0$ ist, gibt es ganz ähnlich wie in der Optik eine „Phasenverschiebung“. — Weitere Beziehungen finden wir, wenn die Werte der $R_{(\mathfrak{b},s)}$, $R_{(\mathfrak{b},c)}$ selbst aufgesucht werden. Nach (152) ist

$$(155)\quad \frac{1-(R_{\mathfrak{b},s} - \sqrt{-1}\,R_{\mathfrak{b},c})}{1+(R_{\mathfrak{b},s} - \sqrt{-1}\,R_{\mathfrak{b},c})} = m,\ -(R_{\mathfrak{b},s} - \sqrt{-1}\,R_{\mathfrak{b},c}) = \frac{m-1}{m+1};$$

$$(156) \qquad -R_{\mathfrak{b},r} = -\frac{m^2+1}{m^2-1}, \quad R_{\mathfrak{b},i} = \frac{2\sqrt{-1}\,m}{m^2-1}.$$

Vergleicht man die Formeln (153) und (137), so ist ersichtlich, daß m hier formal eben denselben Wert erhalten hat, wie im Falle der partiellen Reflexion ($i < \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$). Dabei zeigen (155) und (136), daß bei totaler Reflexion die „komplexe Amplitude“ $R_{\mathfrak{b},r} - \sqrt{-1}\,R_{\mathfrak{b},i}$ anstelle der „reellen Amplitude“ $R_{\mathfrak{b}}$ bei partieller Reflexion tritt. Durch das Komplex-Werden der Amplitude wird in derselben Weise wie bei der Totalreflexion des Lichtes eine Phasenverschiebung angezeigt. Ist δ diese Verschiebung im Bogenmaß, so darf unter Rücksicht auf die durch (154) formulierte Totalreflexion statt (147) für die Schwingungen der reflektierten Welle geschrieben werden:

$$(157) \qquad \gamma = \Gamma \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\zeta}{\lambda_{\mathfrak{b}}}\right) + \delta\right\},$$

und es wird

$$(158) \qquad R_{\mathfrak{b}} = \cos\delta, \quad R_{\mathfrak{b},i} = \sin\delta,$$

$$(159) \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{R_{\mathfrak{b},i}}{R_{\mathfrak{b},r}} = \frac{2\sqrt{-1}\,m}{m^2+1}.$$

Die Verschiebungen in der Grenzfläche setzen sich hier aus den Anteilen der einfallenden, der reflektierten und der Oberflächenwelle zusammen. Im Ganzen ergiebt eine einfache Rechnung neben $\bar{v} = 0$:

$$(160) \quad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\mathfrak{a}}{2\mathfrak{b}\sin i}\,\Gamma\left(R_{\mathfrak{a},r}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right) - R_{\mathfrak{a},i}\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right)\right), \\ -\bar{w} = -\dfrac{\cos i_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{-1}\cos 2i}\,\Gamma\left(R_{\mathfrak{a},r}\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right) + R_{\mathfrak{a},i}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right)\right). \end{cases}$$

Denkt man sich diese Gleichungen durch die Faktoren der großen Klammern rechts dividiert, dann quadriert und addiert, so erkennt man sogleich, daß die Teilchen der Oberfläche Ellipsen beschreiben, deren Axen parallel und senkrecht zur Oberfläche stehen. Bedeuten U und W die halben großen Axen, so ist:

$$(161) \quad \begin{cases} U = \dfrac{\mathfrak{a}}{2\mathfrak{b}\sin i}\,\Gamma\sqrt{R_{\mathfrak{a},r}^2 + R_{\mathfrak{a},i}^2} \\ W = \dfrac{\cos i_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{-1}\cos 2i}\,\Gamma\sqrt{R_{\mathfrak{a},r}^2 + R_{\mathfrak{a},i}^2} \end{cases}$$

$2\,U$ und $2\,W$ stellen hier die maximalen Bewegungen parallel

und senkrecht zur Oberfläche dar. Der scheinbare Austrittswinkel $\bar{i}'$ gemessen gegen die Vertikale bei der Fiktion longitudinaler Stöße ist hiernach gegeben durch

$$(162)\qquad \operatorname{tg}\bar{i}' = \frac{U}{W} = \sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{tg} i_a}{\operatorname{tg} i}\operatorname{ctg} 2i = \frac{\cos i \operatorname{ctg} 2i}{\sqrt{\sin^2 i - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}},$$

und der scheinbare Emergenzwinkel $\bar{i}$ bei Rücksicht auf die transversale Bewegung durch

$$(163)\qquad \operatorname{tg}\bar{i} = -\frac{W}{U} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_a}\operatorname{tg} 2i = -\frac{\operatorname{tg} 2i}{\cos i}\sqrt{\sin^2 i - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}.$$

$\bar{i}'$ und $\bar{i}$ werden hiernach durch Ausdrücke dargestellt, wie sie analog bei beliebigartigen transversalen Wellen im Fall $\sin i \leq \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ auftreten.

Wieder wie bei der Reflexion longitudinaler Wellen ergibt sich schon bei streifendem Einfall, also für $i = 90^0$, ein scheinbarer Emergenzwinkel, der eine bedeutende Neigung gegen die Oberfläche anzeigt:

$$(164)\qquad (\operatorname{tg}(90-\bar{i}))_{i=90^0} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(\operatorname{tg} i_a)_{i=90^0} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}}.$$

Da $\mathfrak{a}^2$ nahezu dreimal größer ist als $\mathfrak{b}^2$, ist der Zahlenwert der rechten Seite nahezu 0,6; so folgt $90-\bar{i}$ für $i = 90$ nahezu $= 20^0$. Es beträgt also schon bei streifendem Einfall die scheinbare Neigung gegen die Oberfläche, unter der die Transversalwellen aufsteigen, ca. 20^0,—

B. Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Der zweite Hauptfall der Reflexion transversaler Wellen, bei dem die Schwingungen der Wellen senkrecht gegen din Einfallsebene, also parallel zur Oberfläche erfolgen, bietet äußerst einfache Verhältnisse. Aus Gründen der Symmetrie können nämlich hier longitudinale Wellen überhaupt nicht reflektiert werden. So setzt sich denn die einfallende Welle einzig und allein durch eine reflektierte transversale Welle fort, deren Schwingungen ebenfalls parallel zur Oberfläche erfolgen. Der Reflexionswinkel muß dabei gleich dem Einfallswinkel sein. Da ferner die reflektierte Welle alle eingestrahlte Energie mit sich fortführt, muß ihre Intensität ebenso groß wie die Intensität der einfallenden

Welle sein. Offen bleibt hiernach für uns nur noch die Frage, ob die reflektierte Welle gleichsinnige oder entgegengesetzte Schwingungen fortführt. Setzen wir für die einfallende Welle wie in (88):

$$\alpha = 0, \quad \beta = F\left(t - \frac{\xi}{b}\right), \quad \gamma = 0, \tag{165}$$

so haben wir hiernach für die reflektierte Welle zu setzen:

$$\alpha = 0, \quad \beta = q\,F\left(t - \frac{\xi}{b}\right), \quad \gamma = 0, \tag{166}$$

wobei F beide Mal dieselbe Funktion bedeutet, und q einen der Werte $+1$ oder -1 hat. Die Oberflächenbedingungen reduzieren sich hier, da $\overline{\mathfrak{T}}_x^{(\nu)}$ und $\overline{\mathfrak{T}}_z^{(\nu)}$ von vorne herein $= 0$ sind, auf die eine, daß die gesammte Druckkomponente $\overline{\mathfrak{T}}_y^{(\nu)}$ verschwinden muß. So folgt denn nach (89):

$$\mathfrak{b} \cos i \left(F'\left(t - \frac{x \sin i}{\mathfrak{b}}\right) - q\,F'\left(t - \frac{x \sin i}{\mathfrak{b}}\right)\right) = 0; \tag{167}$$

$$q = +1. \tag{168}$$

Dies besagt: *Eine einfallende transversale Welle, deren Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene (also parallel zur Oberfläche) erfolgen, geht bei der Reflexion in eine Welle der gleichen Art mit gleichgroßen gleichgerichteten Schwingungen über.* — Die reflektierte Welle bietet in diesem Falle eine direkte Fortsetzung der einfallenden Welle; es tritt bei der Reflexion nichts anders als eine Richtungsänderung ein.

Für die Verschiebungen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ an der Oberfläche ergiebt sich nach (97) unmittelbar:

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 2\beta, \quad \bar{w} = 0. \tag{169}$$

Die Oberfläche zeigt also der transversalen Art der Welle entsprechende Querschwingungen und *zwar sind die Ausweichungen gerade doppelt so groß als die Ausweichungen in der einfallenden, bezüglich in der reflektierten Welle.*

§ 14. Oberflächenwellen.

Lord Rayleigh hat entdeckt, daß die Oberflächenwellen auch selbstständig auftreten können, unabhängig von dem Fall der Reflexion von Wellen. Es scheint durch die Beobachtungen sicher gestellt, daß die sogenannten Hauptwellen in den Erdbeben wenigstens näherungsweise Beispiele für diese „Rayleigh-Wellen“ bieten.

Ein einzelnes der Systeme von Oberflächenwellen wie sie in § 11 unter (108), (112 a), (112 b) dargestellt wurden, kann nicht selbstständig sein, da es nach § 11 für die Oberfläche die Bedingungen $\mathfrak{T}_x^{(o)} = 0$, $\overline{\mathfrak{T}}_y^{(o)} = 0$, $\mathfrak{T}_z^{(o)} = 0$ nicht erfüllt. Eine Kombination aber kann frei auftreten. Es ist klar, daß hier nur die Systeme (108) und (112 a) in Betracht kommen können, da nur sie die gleichen Druckkomponenten an der Oberfläche erregen, also die Möglichkeit der Kompensation bieten. Wird der Koordinaten-Anfangspunkt passend gewählt, so kann gesetzt werden für die Verdichtungswellen:

$$(170)\quad \begin{cases} u_a = \dfrac{\lambda_a}{\Lambda} e^{-2\pi \frac{z}{Z_a}} S_a \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right) \\ w_a = \dfrac{\lambda_a}{Z_a} e^{-2\pi \frac{z}{Z_a}} S_a \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right), \end{cases}$$

$$(171)\quad \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{Z_a^2} = \frac{1}{\mathfrak{a}^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_a^2},$$

und für die Scheerungswellen:

$$(172)\quad \begin{cases} u_b = \dfrac{\lambda_b}{Z_b} e^{-2\pi \frac{z}{Z_b}} S_b \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right), \\ w_b = \dfrac{\lambda_b}{\Lambda} e^{-2\pi \frac{z}{Z_b}} S_b \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\Lambda}\right), \end{cases}$$

$$(173)\quad \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{Z_b^2} = \frac{1}{\mathfrak{b}^2 T^2} = \frac{1}{\lambda_b^2}$$

Da es sich um eine einheitliche Wellenbewegung handeln soll, war für die Oberflächenwellenlänge Λ in (170) und (172) der gleiche Wert zu wählen. Die Minderungsstufen Z mußten dann wegen (171) und (173) als verschieden angenommen werden.

Denken wir uns die Schwingungsperiode T vorgegeben, so sind λ_a und λ_b bekannt. Die 3 Größen Λ, Z_a, Z_b sind durch (171) und (173) untereinander und mit λ_a, λ_b so verkettet, daß, wenn eine, etwa Λ gefunden ist, alle 3 gegeben sind. Die Intensität der Wellenbewegung, bestimmt durch C_a und S_b, muß beliebig bleiben, es kommt also nur auf die Bestimmung des Verhältnisses C_a/S_b an. So folgt denn im Ganzen, daß bei vorgegebener Periode

T' zwei Unbekannte, die Wellenlänge Λ und das Amplitudenverhältnis S_a/S_b der beiden Wellenbewegungen, bestimmt werden müssen. Eben dies wird ermöglicht durch die beiden Grenzbedingungen $\overline{\mathfrak{T}}_z^{(a)} = 0$, $\overline{\mathfrak{T}}_z^{(a)} = 0$. Verwendet man sie unter Benutzung der Formeln des § 11, so folgt:

$$(174)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\sin 2 i_a}{\sqrt{-1}}\dfrac{1}{\mathfrak{a}} S_a + \cos 2 i_b \dfrac{1}{\mathfrak{b}} S_b = 0, \\ \mathfrak{a} \cos 2 i_b S_a - \mathfrak{b} \dfrac{\sin 2 i_b}{\sqrt{-1}} S_b = 0, \end{cases}$$

oder

$$(175)\qquad \frac{S_a}{S_b} = \sqrt{-1}\,\frac{\cos 2 i_b}{\sin 2 i_a}\,\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{\sin 2 i_b}{\cos 2 i_b}\,\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}.$$

Dabei ist, wenn $\mathfrak{V}$ die Oberflächen-Geschwindigkeit bezeichnet:

$$(176)\qquad \sin i_a = \frac{\lambda_a}{\Lambda} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{V}}, \quad \sin i_b = \frac{\lambda_b}{\Lambda} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{V}}.$$

Die Formeln (170)—(176) enthalten eine Darstellung der „Rayleigh-Wellen".

Unter Rücksicht auf (176) ergiebt (175) erstens:

$$(177\text{a})\qquad \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2\right)^4 = \left(1 - \left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2\right),$$

oder bei Auflösung der Klammern:

$$(177\text{b})\qquad \left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^6 - 8\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^4 + 8\left(3 - 2\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\right)\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2 = 16\left(1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\right),$$

und zweitens

$$(178)\qquad \frac{S_a}{S_b} = -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\,\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2}}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2}.$$

(177) ist vom 3. Grad in $(\mathfrak{V}/\mathfrak{b})^2$, ergibt aber nur einen reellen Wert, der, da $\mathfrak{b}^2$ nahe $0{,}3\,\mathfrak{a}^2$ ist, in der Nähe von 1 liegt. Setzen wir nach (173):

$$(179)\qquad \left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{b}}\right)^2 = \left(\frac{\Lambda}{\lambda_b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\Lambda}{Z_b}\right)^2$$

so geht (177b) über in:

$$(180)\qquad \left(11 - 16\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\right)\left(\frac{\Lambda}{Z_b}\right)^2 + 5\left(\frac{\Lambda}{Z_b}\right)^4 + \left(\frac{\Lambda}{Z_b}\right)^6 = 1.$$

Für $(\mathcal{A}/Z_{\mathfrak{b}})^2$ ist hier die positive unter 1 liegende Wurzel gültig. Hiernach erkennt man leicht, daß das erste Glied rechts die größte, das zweite Glied eine erheblich geringere, das letzte Glied nur einen unbedeutenden Einfluß hat, und es ergibt sich durch eine sich anlehnende Reihenentwicklung:

$$(181) \qquad \left(\frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)^2 = \frac{1}{11 - 16\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}}\left(1 - \frac{5}{\left(11 - 16\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\right)^2} + \cdots\right).$$

Hiernach ist, da $\mathfrak{b}^2/\mathfrak{a}^2 = \text{ca. } 0{,}3$:

$$(182) \left(\frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)^2 = \text{ca. } \frac{1}{7}, \quad \left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2 = \text{ca. } \frac{6}{7}; \quad \frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{b}}} = \text{ca. } \frac{1}{2^1/_2}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} = \text{ca. } \frac{9}{10}.$$

Die Geschwindigkeit der Rayleighschen Oberflächenwellen ist also ein wenig kleiner als die Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$ der transversalen Wellen.

Zur Bestimmung von $Z_{\mathfrak{a}}$ ergeben (171) und (179):

$$(183) \qquad \left(\frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{a}}}\right)^2 = 1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2 = 1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)^2.$$

Es ist hiernach

$$(184) \qquad \left(\frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{a}}}\right)^2 = \text{ca. } \frac{3}{4}, \quad \frac{\mathcal{A}}{Z_{\mathfrak{a}}} = \text{ca. } \frac{5}{6}.$$

Vorhin fanden wir $\mathcal{A}/Z_{\mathfrak{b}} = \text{ca. } 1/2^1/_2$, es ist daher $Z_{\mathfrak{a}}$ kleiner als $Z_{\mathfrak{b}}$, von den beiden Anteilen der Rayleigh-Wellen vermindert sich also bei dem Hineingehen in das Innere der Erde der $\mathfrak{b}$-Anteil, das heißt der Anteil der Scheerungswellen, weniger schnell. Auch bei diesem Anteil sinkt die Amplitude für eine Tiefenvermehrung z um eine halbe Wellenlänge $\mathcal{A}$ schon auf

$$(185) \qquad \text{ca. } e^{-\frac{2\pi}{5}} = \text{ca. } \frac{1}{4}.$$

Die Formeln (177), (180), (178), (179), (183) enthalten die volle Lösung unseres Problemes, das heißt, sie geben bei gegebener Periode T oder gegebener Wellenlänge $\mathcal{A} = \mathfrak{B}T$ alle Einzelheiten der Bewegung bei den Rayleighschen Oberflächenwellen. Wir wollen bemerken, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ der Wellen nach (177) einzig und allein durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmt wird, also schon durch die elastischen Konstanten des Medium festgelegt wird. Die Formel

$$(186) \qquad \mathcal{A} = \mathfrak{B}T$$

verbindet also Wellenlänge und Periode bei den Rayleigh-Wellen

gerade so fest, wie die Formeln $\lambda_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}T$, $\lambda_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}T$ bei den ebenen Wellen gleichmäßiger Intensität.

Die genauen Berechnungen bei gegebenen Werten von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ wird man zweckmäßig an die Lösung von (180) durch Näherungsrechnung knüpfen. So erhält man zunächst $\Lambda/Z_{\mathfrak{b}}$; es folgt dann $\mathfrak{B}/\mathfrak{b}$ mittels der Formel (179) und $\Lambda/Z_{\mathfrak{a}}$ mittels der Formel (183). Ferner ergibt (178):

$$\frac{S_{\mathfrak{a}}}{S_{\mathfrak{b}}} = -2\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\frac{\Lambda}{Z_{\mathfrak{b}}}\frac{1}{1+\left(\frac{\Lambda}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)^2} \tag{187}$$

Von besonderem Interesse ist uns noch das Verhältnis der horizontalen und der vertikalen Verrückungen in der Oberfläche. Die Gesamtverrückungen sind gegeben durch die Summe der Einzelverrückungen:

$$u = u_{\mathfrak{a}} + u_{\mathfrak{b}}, \quad w = w_{\mathfrak{a}} + w_{\mathfrak{b}}. \tag{188}$$

Unsere Formeln ergeben für die Oberfläche ($z = 0$):

$$\begin{cases} \bar{u} = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2}}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2} S_{\mathfrak{b}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\Lambda}\right), \\ \bar{w} = \qquad +\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}} S_{\mathfrak{b}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\Lambda}\right). \end{cases} \tag{189}$$

Die Oberflächenteile beschreiben hiernach Ellipsen. Das Verhältnis der größten vertikalen Ausweichung $\bar{w}_m$ und der größten horizontalen Ausweichung $\bar{u}_m$ ist gegeben durch:

$$\begin{cases} \frac{\bar{w}_m}{\bar{u}_m} = \frac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2}}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}\right)^2} \\ \qquad = \frac{1}{2}\frac{1+\left(\frac{\Lambda}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)^2}{\frac{\Lambda}{Z_{\mathfrak{b}}}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{Z_{\mathfrak{b}}}{\Lambda}\right)+\left(\frac{\Lambda}{Z_{\mathfrak{b}}}\right)\right]. \end{cases} \tag{190}$$

Benutzen wir für $\Lambda/Z_{\mathfrak{b}}$ den vorhin angegebenen Näherungswert, so wird:

$$\frac{\bar{w}_m}{\bar{u}_m} = \text{ca. } \frac{10}{7}; \tag{191}$$

die Vertikalbewegungen sind also bei den Rayleigh-Wellen $1^1/_2$ mal größer als die Horizontalbewegungen zu erwarten.

§ 15. Bemerkungen über den Einfluß der Schichtung der Erdoberfläche.

Nach allen vorliegenden Beobachtungen ist die Herdtiefe stets nur sehr gering gegenüber den Dimensionen der ganzen Erde, denn die Hauptwirkungen eines Erdbebens an der Erdoberfläche sind stets nur auf ein engbegrenztes Gebiet beschränkt. Es kommen ja wohl Erdbeben vor, bei denen die Erschütterungen für den Menschen noch auf Flächen fühlbar sind, deren Randpunkte bis zu 1000 Kilometer und selbst darüber auseinander liegen, aber in solchen Fällen zeigt sich stets ein flecken- oder streifenförmiges epizentrales Gebiet von viel kleineren Dimensionen, in welchem die Wirkung zu sehr viel größerer Stärke hinaufgeht. So kann die Herdtiefe schwerlich jemals 100 Kilometer erreichen, vielmehr wird sie sicherlich in der Regel, vielleicht immer viel kleiner sein. Es liegt sogar die Vermutung nicht fern, daß der Herd stets, oder doch in den meisten Fällen durch einen Sprung in der Erdrinde gebildet wird, der sich bis zur Oberfläche erstreckt, oder ihr doch sehr nahe kommt. — Im Ganzen genommen darf behauptet werden, daß die Erregung der Erdbeben in den äußeren Schichten der Erdrinde stattfindet, — dort, wo die Umwandlungen vor sich gehen, von denen die Geologie uns mit so augenfälligen Erscheinungen berichtet.

Sowohl in den direkten Wirkungen in den epizentralen Gebieten als auch in den Aufzeichnungen der Seismographen in weiten Fernen beobachtet man des öfteren kräftig hervortretende stoßartige Bewegungen, die deutlich plötzlich eintretende Brüche am Herd anzeigen. Daneben treten aber sowohl in den epizentralen Gebieten als auch in der Ferne sehr stark und sogar meist überwiegend mehr oder weniger regelmäßige Schwingungen auf, die oft lange andauern. In der Regel gibt es mehrere verschiedenartige Wellenzüge mit verschiedenen Perioden, die einander teils ablösen, teils überlagern. In den Hauptwellen kann man oft Schwingungsreihen bemerken, die viele Hundert Einzelschwingungen umfassen. Aber auch die Vorläufer zeigen vielfach ebenfalls diese Erscheinung. Bei dem Indischen Erdbeben vom 4. April 1905, das weiter unten zur Konstruktion der Laufzeitkurven verwendet

werden wird, läßt das 17000 kg-Pendel der Göttinger Station im ersten Beginn der Vorläufer Schwingungen einer Periode von nahe $1^1/_2$ Sekunden erkennen, die man weit über eine Stunde lang verfolgen kann, indem sie selbst den Hauptwellen noch überlagert sind. —

Zur Erklärung der Schwingungen muß angenommen werden, daß die Schichten der Erdrinde zunächst am Herde, später wohl auch in größerer Ferne in Eigenschwingungen geraten. Besonders häufig werden Schwingungen entstehen, in welchen in den horizontal gelagerten Schichten die Teilchen horizontal hin- und hergehen. Das kann zum Beispiel in oberflächlichen weichen Schichten, Sandschichten etc. stattfinden, denn solche Schichten sind zuweilen ganz überraschend elastisch. Ich hatte gute Gelegenheit, dies zu beobachten, als ich Dank der Unterstützung durch die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften und dem Entgegenkommen der Firma Krupp im Anfang des Jahres 1906 auf dem Artillerie-Schießplatz bei Meppen einige Beobachtungen über die Bodenerschütterungen machen konnte, die durch das Geschützfeuer erregt werden. Mein Apparat (der etwa 50000 mal vergrößerte) wurde auf den Sandboden des Schießplatzes selbst gestellt. Da zeigte sich nun, daß der Schritt eines Menschen, noch in 100 Meter gut bemerkbar war! Eine Schafherde, ein Wagen konnten noch in 500 Meter gespürt werden, die Eisenbahnzüge waren noch in 10 und mehr Kilometer Abstand deutlich erkennbar. — Solche leicht bewegliche, elastische Schichten werden nun bei den Erdbeben in Schwingungen geraten, gerade so wie eine weiche Speise in einer Schüssel, die man anstößt. Und eben diese Schüttelbewegungen der äußersten Erdschichten sind für den Menschen erfahrungsgemäß besonders gefährlich: sie zerreißen den Boden, zerstören die Bauwerke. Von den Schwingungen ausgedehnter horizontaler weicher Schichten werden wir ein wenigstens angenähert richtiges Bild bekommen, wenn wir annehmen, daß die untere, auf festerem Grund aufruhende Grenzfläche einfach festgehalten wird. Dann stellt bei der „Grundschwingung" die Dicke der Schicht gerade $^1/_4$ Wellenlänge der $\mathfrak{b}$-Wellen (Scheerungswellen) dar. Alle Teilchen schwingen horizontal hin und her; der Ausschlag ist um so größer, je näher wir der Erdoberfläche kommen. Auf dem Schießplatz zu Meppen fand ich die Geschwindigkeit der Scheerungswellen zu $\mathfrak{b} = 240$ Meter/Sekunde. Nehmen wir diesen Wert auch für die Schicht an, die beim Indischen Beben die Periode T von $1^1/_2$ Sek. ergab, setzen wir ferner voraus, daß es sich hier um die „Grundschwingung" handelte, und nennen wir die Dicke der Schicht D, so wäre:

(192) $$D = \frac{T}{4}\mathfrak{b} = \frac{3}{8}\,240 = 90 \text{ Meter.}$$

Es ergibt sich also ein Wert für die Dicke der Schicht, der recht wohl der Wirklichkeit entsprechen könnte. —

Neben den kurzen Schwingungen der betrachteten Art giebt es auch Schwingungen mit erheblich höheren Perioden, zum Beispiel von 8 Sekunden bis hinauf zu etwa 20 Sekunden; besonders häufig scheint eine Periode von ca. 17 oder 18 Sekunden aufzutreten. In den Hauptwellen zeigen sich auch Perioden von weit über 20 Sekunden, doch haben diese einen anderen Charakter und sollen daher später gesondert betrachtet werden. — Bei den höheren Perioden bis zu etwa 20 Sekunden kann man zunächst an Vertikalschwingungen des Meeres denken, wobei die Kompressibilität des Wassers die Triebkraft abgäbe. Für die Grundschwingung würde dann die Wassertiefe $^1/_4$ Wellenlänge der Schallwellen darstellen, so daß

(193) $$T = \frac{4D}{\mathfrak{a}}$$

wäre, wenn T die Periode, D die Tiefe, $\mathfrak{a}$ die Schallgeschwindigkeit im Wasser bedeutet. Es ist $\mathfrak{a}$ = ca. 1400 Meter/Sekunde. Für 7000 Meter Wassertiefe ergäbe sich also eine Periode von 20 Sekunden und für 2800 Meter Tiefe eine solche von 8 Sekunden. Das sind Werte, die sich nicht übel der Erfahrung anschließen. Dennoch scheint mir die Erklärung der längeren Perioden durch Schwingungen des Meeres nicht genügend, denn man bemerkt die längeren Perioden in ganz gleicher Art auch bei Erdbeben, deren Herd im Innern der Kontinente liegt. Mag also auch das Meer unter Umständen mitwirken, das Wesentliche müssen wir doch in Schwingungen der festen Erdrinde suchen. Da stellt sich nun die Vermutung ein, daß es sich wohl oftmals um Eigenschwingungen der ganzen festen Erdrinde bis zu einer darunter liegenden sehr nachgiebigen Magmaschicht handele. In diesem Fall müßte die Grundschwingung für die Dicke der schwingenden Schicht eine halbe Wellenlänge der Scheerungswellen ($\mathfrak{b}$-Wellen) darstellen, denn die untere Grenzfläche wäre für die horizontale Bewegung als „frei“ zu betrachten. Die Teilchen würden horizontal hin- und hergehen, nur eine Ebene in der Mitte zwischen der unteren Grenze und der Erdoberfläche bliebe in Ruhe. Zu beiden Seiten dieser „Knotenfläche“ wäre die Bewegung entgegengesetzt und zwar um so größer, je größer der Abstand von der Knotenfläche wäre. Dabei würde gelten:

(194) $$D = \frac{T}{2}\mathfrak{b}.$$

$\mathfrak{b}$ wird nach der beobachteten Geschwindigkeit der Hauptwellen auf etwa $3^1/_2$ Kilometer/Sekunde zu schätzen sein. Es ergäbe sich also als Dicke der Erdrinde bis zur Magmaschicht für $T = 8$ und $T = 20$ Sekunden, 14, bezüglich 35 Kilometer. Das sind Werte, die recht wohl passen könnten; es erscheint auch durchaus möglich, daß die Dicke an verschiedenen Stellen verschieden ist. Da bei großen Weltbeben Perioden von 17 oder 18 Sekunden besonders häufig sind, müßte geschlossen werden, daß eine Dicke von ca. 30 Kilometer besonders häufig vorkommt. — Der ganzen Vorstellung scheint eine ernste Schwierigkeit insofern entgegenzustehen, als ja in den zweiten Vorläufern häufig, sogar in der Regel Scheerungswellen beobachtet werden, deren Schwingungen quer zur Richtung vom Herd stattfinden. Man wird nämlich den Einwand erheben, Schwingungen solcher Art könnten eine sehr nachgiebige Schicht unter der festen Oberfläche nicht passieren. Dagegen ist zu sagen, daß wir uns die Magmaschicht doch immerhin als mit Scheerungselastizität begabt vorstellen müssen; die Scheerungselastizität $\mathfrak{b}$ und demgemäß die Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$ der Scheerungswellen wird hier nicht geradezu $= 0$ sondern nur erheblich kleiner als in den darüber und darunter liegenden Erdschichten sein. — So stellt sich die Sachlage dar, wenn wir nur an die verhältnismäßig schnellen Aenderungen der Kräfte bei den Erdbebenwellen denken. Damit ist aber nach den Auseinandersetzungen in § 2 sehr wohl zu vereinigen, daß wir, um den Erscheinungen der Geologie und der Schwerkraftverteilung auf der Erdoberfläche gerecht zu werden, annehmen, die Magmaschicht sei gegenüber den langsamen Kraftänderungen bei den geologischen Massenumlagerungen so nachgiebig, daß die Erdrinde auf ihr wie auf einem flüssigen Untergrund zu schwimmen scheint.

Die mikroseismischen Störungen kurzer Periode werden nach der von mir schon oft vertretenen Hypothese durch die Brandung der Wellen, insbesondere der „Dünung" an den Küsten erregt. Da sie neben den horizontalen auch vertikale Bewegungen zeigen, scheinen die Rayleighwellen vorzuherrschen. Nach meinen Untersuchungen möchte ich aber auch auf das Vorhandensein von reinen Horizontalbewegungen schließen; so liegt es denn nahe, auch das Mitwirken von Eigenschwingungen der Erdrinde — Oberschwingungen den besprochenen Grundschwingung — zu vermuten. In der Tat ist das Hervortreten bestimmter Perioden in den mikroseismischen Störungen mehrfach behauptet worden.

§ 16. Hauptwellen.

Daß wirklich unter der festen Erdrinde eine sehr nachgiebige Magmaschicht vorhanden ist, dafür bieten die Hauptwellen einen sehr auffälligen anderen Beleg. Bei den Göttinger Registrierungen hat sich sehr oft einwandfrei gezeigt, daß in den Hauptwellen, die doch längs der Oberfläche laufen, nicht nur Schwingungen mit Bewegungen in der Fortschreitungsrichtung der Erdbenwellen, sondern auch Schwingungen mit Bewegung quer zur Fortschreitungsrichtung stattfinden. Diese Erscheinung ist so ausgesprochen, daß noch jeder der Herren, die längere Zeit in Göttingen die Erdbebenkurven bearbeiteten, sie von neuem selbständig gefunden hat. Oftmals konnte festgestellt werden, daß diese Querschwingungen etwas früher eintreffen wie die Schwingungen parallel der Fortschreitungsebene. Seit ferner ein Vertikalseismograph in Göttingen regelmäßig arbeitet, ließ sich feststellen, daß wohl die Schwingungen parallel der Fortschreitungsebene, nicht aber die Querschwingungen von Vertikalbewegungen begleitet sind. Wäre nun eine Magmaschicht nicht vorhanden, so könnten nach der Elastizitätstheorie an der Erdoberfläche nur die im vorigen Paragraphen besprochenen Rayleigh-Wellen selbständig auftreten, es dürften in den Hauptwellen also Querschwingungen nicht vorhanden sein. So erscheint mir denn zur Erklärung der Querschwingungen kein anderer Weg offen zu sein, als der, in ihnen Scheerungswellen (𝔟-Wellen) zu sehen, die sich in der bis zu einem gewissen Grade frei auf der Magmaschicht aufruhenden festen Erdrinde fortpflanzen. Die Geschwindigkeit solcher Wellen muß direkt durch 𝔟 angegeben werden, muß also in der Tat größer sein als die Geschwindigkeit der Wellen mit Schwingungsebenen parallel der Fortschreitungsrichtung und der Vertikalen.

Dabei ist nun noch eins zu bemerken. Giebt es wirklich eine einigermaßen nachgiebige Magmaschicht schon in ca. 30 Kilometer Tiefe, so können auch die Wellen mit Schwingungsebenen parallel der Fortschreitungsrichtung und der Vertikalen nicht reine Rayleigh-Wellen sein. Sie müssen vielmehr kompliziertere Kombinationen der Schichtwellen darstellen, von denen in § 10 ein kurzer Abriß gegeben wurde. Auf die Möglichkeiten, die sich uns bieten, jetzt schon einzugehen, scheint verfrüht, so lange wir nicht über ein besseres Beobachtungsmaterial verfügen. Man wird aber aus diesen Erwägungen schließen müssen, daß die vorhin aufgestellten Zahlen von etwa 14 bis 35 Kilometer für die Dicke der festen Erdrinde doch nur als erste Annäherungen gelten dürfen. — Ich möchte nicht verfehlen, hier noch ausdrücklich darauf hinzuweisen,

wie in der Entwirrung der angedeuteten schwierigen Fragen für die zukünftige Erdbebenforschung ein sehr weites, wichtiges und dankbares Feld geboten wird.

Es wurde vorhin erwähnt, daß in den Hauptwellen auch sehr viel größere Perioden als 20 Sekunden auftreten, daß die zugehörigen Schwingungen aber einen Charakter zeigen, der sie als etwas besonderes hervorhebt. Die Sache verhält sich so: die Hauptwellen tauchen stets ganz allmählig im Gewirre der Bewegungen der Vorläufer auf. Dabei ist die Periode anfänglich sehr groß, um zunächst schnell, dann langsamer abzunehmen, bis nach einiger Zeit, nach vielleicht 5 oder 10 Schwingungen, eine Aenderung der Periode nicht mehr deutlich erkannt werden kann. Das Maximum der Amplitude in den Hauptwellen liegt meist noch im Bereich der sinkenden Periode. Später wechselt die Amplitude vielfach, es folgen einander Wellenzüge auf Wellenzüge; oft hat man den Eindruck von gut ausgebildeten Interferenzen. Allmählig werden die Amplituden kleiner und kleiner, um schließlich, oft erst nach Stunden, unmerkbar zu werden. — In diesem allgemeinen Bilde erscheinen, wie man sieht, die ganz langen Perioden als die einleitende Phase. Wie sind sie zu erklären? Ich glaube, daß man bei folgenden Erwägungen nicht fehl gehen wird. — Im epizentralen Gebiet werden Oberflächenwellen erregt, die wir hier zur Vereinfachung der Darstellung als einfache Rayleigh-Wellen ansehen wollen. Sie sind aus Verdichtungswellen ($\mathfrak{a}$-Wellen) und aus Scheerungswellen ($\mathfrak{b}$-Wellen) in solcher Weise zusammengefügt, daß eine Verbindung nur durch die Oberfläche gegeben wird. Hier ergänzen die Wellenarten einander, um die elastischen Drucke auf der Oberfläche überall zum Verschwinden zu bringen, wie es die freie Beweglichkeit der Oberfläche verlangt. Wir fanden, daß die Geschwindigkeit, mit der die Rayleigh-Wellen über die Oberfläche laufen, etwas kleiner ist als $\mathfrak{b}$, also kleiner als die Geschwindigkeit der Scheerungswellen. Hierauf nun kommt es an. Wie wir wissen, erfolgen die elastischen Bewegungen ganz allgemein so, daß von jeder erregten Stelle 2 Wellenzüge, der eine mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$, der andere mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$, in die Ferne gehen. Diese Wellenbewegungen müssen also auch in den Rayleigh-Wellen die Grundlage der Erscheinung abgeben. Um den scheinbaren Widerspruch aufzulösen, der darin besteht, daß die Rayleigh'schen Wellenzüge langsamer als mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{a}$ und langsamer auch als mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$ laufen, muß man sich daran erinnern, daß die Rayleigh-Wellen nicht eine primäre, sondern eine Folgeerscheinung sind, bei der

sich die Wirkung aller jeweiligen Erregungen in allen folgenden Zeiten summiert. Es wird klar, daß die Rayleigh-Wellen in einem Medium, das unendlich ausgedehnt gedacht wird, strenge genommen nur bestehen können als ein stationärer Zustand, dessen Wurzeln die ganze Ausdehnung des Mediums, also auch unendlich weit zurückliegende Zeiten überspannen. Es wäre hiernach durchaus ein Irrtum, wenn man annehmen wollte, daß die am Erdbebenherd erregten Rayleigh-Wellen nun in einer Front mit der zum stationären Zustand gehörigen Geschwindigkeit vorwärts gingen. Vorwärts laufen müssen vielmehr Wellen mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und diese voraneilenden Wellen müssen dann allmählig einen Zustand herausbilden, der zwar nicht vollständig, aber doch in erheblicher Annäherung dem der stationären Rayleigh-Wellen entspricht. Genau gesagt „laufen" also nicht die Rayleigh-Wellen „vorwärts", „treffen" nicht diese „ein", sondern es werden in der Nähe der Erdoberfläche allmählig Schwingungen erregt, die mehr und mehr den Charakter der Rayleigh-Wellen annehmen.

Durch die Schwingungen am Herd werden die Schwingungen in der Ferne veranlaßt. Nehmen wir einmal an, daß die Schwingungen am Herd immer weiter andauern, so müssen die Pseudo-Rayleigh-Wellen in der Ferne schließlich deren Periode annehmen und zwar so, daß sie als direkte Fortsetzung erscheinen. Anfänglich aber gab es in der Ferne noch keine Schwingungen; die anregenden Wellen vom Herd eilten mit der $\mathfrak{a}$- und der $\mathfrak{b}$-Geschwindigkeit den Rayleigh-Wellenzügen voraus. Folglich müssen die Schwingungen im Entstehen den nachfolgenden ausgebildeten Schwingungen in der Phase voraus sein, oder anders ausgedrückt, es müssen vom Entstehen bis zum Mitschwingen in ausgebildeten Wellen weniger Schwingungen stattfinden, als dann in gleichen Zeiten in den ausgebildeten Schwingungen. Hieraus aber folgt nun, daß die Rayleigh-Wellen nicht als solche vorwärts gehen, sondern mit einer Vorphase sinkender Periode, und dies ist es eben, was auch die Beobachtungen aussagen. Wenn man gerade will, kann behauptet werden, der erste Anfang der Hauptwellen in einem Erdbeben rücke mit der $\mathfrak{a}$-Geschwindigkeit vorwärts. Da aber das Wesentliche bei den Rayleigh-Wellen das Zusammenwirken von $\mathfrak{a}$- und $\mathfrak{b}$-Wellen ist, wird man etwas besser tun, für das Vorrücken der Front die $\mathfrak{b}$-Geschwindigkeit anzunehmen. Das entspricht auch mehr den Registrierungen, denn man findet das erste deutliche Auftauchen hinter dem Einsetzen der zweiten Vorläufer, und diesem um so näher, je empfindlicher das Instrument für lange Wellen ist.

Alles hier Gesagte bezieht sich auf denjenigen Anteil der Hauptwellen, bei dem die Schwingungen in Ebenen parallel der Fortschreitungsrichtung und der Vertikalen erfolgen. Bei den Querschwingungen, die zu ihrer Fortleitung eine schwimmende feste Erdrinde verlangen, handelt es sich um einfache Scheerungswellen. Da ist die Oberflächen-Geschwindigkeit also direkt $\mathfrak{b}$ und darum eine Aenderung der Periode in einer einleitenden Phase nicht zu erwarten. In der Tat scheinen die Beobachtungen hiermit verträglich zu sein.

Sollten, wie im vorigen Paragraphen auseinander gesetzt, Eigenschwingungen in den Schichten der Erdrinde schon am Herd ausgelöst werden, so wird das gleiche auch durch die in die Ferne laufenden Wellen in anderen Teilen der Erde geschehen können. Danach werden manigfache Komplikationen der Fortbewegung der Erdbebenwellen zu erwarten sein. Es können in einzelnen Gebieten der Erdoberfläche die herankommenden Wellen durch Resonanz gewissermaßen aufgespeichert werden, sodaß hier neue, sekundäre Zentren für spätere allmählige Ausstrahlung von Schwingungen geschaffen werden; es können Phänomene eintreten, die an Interferenzen erinnern, etc. Der sehr verwickelte Charakter der Hauptwellen deutet in der Tat auf dergleichen Komplikationen hin, und es wird noch sehr vieler systematischer Beobachtung bedürfen, um hier die Vorbedingungen für eine erfolgreiche theoretische Verarbeitung zu schaffen.

§ 17. Ausbreitung der Erdbebenwellen in der Erde; Vorbemerkungen.

Das Problem der Ausbreitung der Erdbebenwellen im Innern der Erde ist schon oft behandelt worden, so von M. P. Rudzki[1]) und ganz neuerdings von H. Benndorf[2]). Ich werde mich daher kurz fassen können. Im Wesentlichen soll eine praktisch bequem durchführfahre Methode dargelegt werden, die es ermöglicht, aus den Beobachtungen der Laufzeiten an der Erdoberfläche den Weg der Erdbebenstrahlen im Innern der Erde zu konstruieren. In diesem Paragraphen wird zunächst ein kurzer Abriß der allgemeinen Gesetze über die Ausbreitung der Erdbebenwellen gegeben werden.

Wäre die Erde elastisch homogen, so würden sich in ihrem Innern unabhängig von einander Verdichtungs- und Scheerungs-

1) Gerland's Beiträge zur Geophysik, Bd. III—IV, 1898—1900.

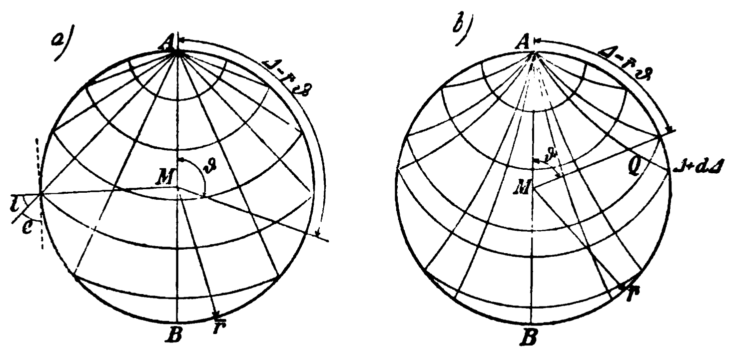
2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Mitteilungen der Erdbebenkommission, Heft XXIX, 1905 und Heft XXXI, 1906.

Wellen, jede mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortbewegen, und nur an der Erdoberfläche, wo die von innen hervordringenden Wellen reflektiert werden, würden jedesmal zugleich auch Wellen der anderen Art ausgelöst werden. Wie wir später erfahren werden, kann nun aber aus den Beobachtungen mit Sicherheit gefolgert werden, daß die Erde elastisch nicht homogen ist. Die Geschwindigkeit der sich ausbreitenden Wellen wird demgemäß in verschiedenen Teilen der Erde verschieden sein, und auch im Innern der Erde, überall wo die Elastizität variirt, werden die beiden Wellenarten mit einander verkettet sein. Wenn wir den letzteren Umstand durchweg berücksichtigen sollten, ständen wir von einem äußerst verwickelten Problem; glücklicher Weise aber liegt die Sache für uns einfacher. Der Erfolg lehrt nämlich, daß wenigstens im allgemeinen die Variationen der elastischen Eigenschaften von Ort zu Ort so allmählig erfolgen, daß es noch erlaubt ist, die beiden Wellenarten als unabhängig von einander anzusehen. Strenge genommen, wird ja freilich jede der Arten überall bei ihrem Lauf durch das inhomogene Medium die andere Art mit erregen; aber diese Beimengungen sind zu gering, als daß es nötig wäre sie zu beachten. Sie entsprechen gewissermaßen einer geringen Absorption der erregenden Wellen, und darin erschöpft sich ihre Bedeutung für unsere Ueberlegungen. Abgesehen von der so bewirkten Intensitätsverminderung können wir den Einfluß der Inhomogenität bei beiden Wellenarten einfach in einer mit dem Ort variablen Geschwindigkeit sehen. Dabei ist ein möglicher Fall allerdings besonders ins Auge zu fassen, der einträte, wenn es auch im Innern der Erde Flächen plötzlichen Sprunges der elastischen Eigenschaften geben sollte. An solchen fänden Brechungen und Reflexionen der Wellen statt, wobei jede der Wellenarten auch Wellen der andern Art erregen würde. Ich habe mit einer solchen Möglichkeit insbesondere für die Grenze zwischen dem erwarteten Metallkern und seinem Steinmantel gerechnet, habe aber erkennen müssen, daß bisher wenigstens in den Beobachtungen kein irgend deutlich erkennbares Anzeichen gefunden werden kann. Die Uebergänge mögen ja immerhin im Verhältnis zu den Dimensionen der ganzen Erde ziemlich schnell erfolgen; im Verhältnis zu den Wellenlängen der Erdbebenwellen sind die Schichten mit schnell wechselnder Beschaffenheit der Erdsubstanz aber doch offenbar dick genug, um deutliche Reflexionen oder Brechungen wenigstens bei dem jetzt vorliegenden Beobachtungsmaterial nicht hervortreten zu lassen. Wir werden unter solchen Umständen abwarten müssen, was die Zukunft lehren wird und

können und wollen uns vorläufig auf die Annahme beschränken, daß nirgends im ganzen Innern der Erde Brechungen oder Reflexionen der Erdbebenwellen eintreten, und daß es erlaubt ist, eine unabhängige Fortbewegung der beiden Wellenarten mit Geschwindigkeiten anzunehmen, die sich nirgends sprungförmig, sondern nur stetig von Ort zu Ort ändern.

Damit hier sogleich alle wesentlichen vereinfachenden Annahmen zusammen aufgeführt werden, mag noch bemerkt werden, daß ich für alle Rechnungen die Erde als Kugel ansehen werde, und daß allein eine Variation der elastischen Beschaffenheit mit dem Radius berücksichtigt werden wird. Wir werden also gesondert die Verdichtungs- und die Scheerungswellen betrachten und deren Geschwindigkeiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als stetige Funktionen des Radius r der Erdschichten auffassen.

Bei der so angenommenen Inhomogenität werden die vom Herd in die Ferne gehenden direkten Wellen nicht mehr in kugeligen sondern in komplizierter gestalteten Wellenflächen sich ausbreiten. Konstruiern wir in Gedanken überall die auf den Wellenflächen senkrecht stehenden Fortschreitungslinien, so werden diese nicht mehr geradlinig, sondern gekrümmt sein. Es ist sehr bequem und wird darum im Folgenden meist geschehen, die Untersuchung vor allem an diese „Fortschreitungslinien“ zu knüpfen. Die Geschwindigkeit auf ihnen ist überall $= \mathfrak{a}$ oder $= \mathfrak{b}$. Es scheint erlaubt, diese Linien einfach „Strahlen“ (Erdbebenstrahlen, Bebenstrahlen) zu nennen, wobei die Frage außer Acht bleiben kann, wie genau sie zugleich die Richtung der elastischen Verschiebungen, der Fortbewegung der Energie und der durch irgend ein Hemmnis etwa erregten Schattengrenze angeben. Da die Krümmungsradien der Fortschreitungslinien in den für uns in Betracht kommenden Fällen stets nach Tausenden von Kilometern rechnen, besteht kein Zweifel darüber, daß die Genauigkeit sehr groß ist. Es liegt aber für die Ziele, die im Folgenden leiten, kein Interesse vor, den Grad der Genauigkeit im einzelnen festzulegen. Wir dürfen, wenn wir uns nur der darin liegenden theoretischen Ungenauigkeit bewußt sind, ohne Sorge vor irgend merklichen praktischen Fehlern annehmen, daß bei den Verdichtungswellen die Schwingungen in der Fortschreitungsrichtung (Strahlrichtung) und bei den Scheerungswellen senkrecht dazu stattfinden, daß die Energie in beiden Wellenarten sich in der Fortschreitungsrichtung (Strahlrichtung) fortpflanzt, und daß ein Hemmnis Schatten längs dieser Richtung verursachen würde.



Figur 4.

Figur 4 stelle einen Durchschnitt der Erde dar, der den Erdbebenherd enthält. Diesen Herd setze ich dabei in der Erdoberfläche selbst voraus. 4a deutet den Fall der homogenen, 4b den Fall der inhomogenen Erde an. In beiden Fällen sind Durchschnitte von Wellenflächen und Fortschreitungslinien eingezeichnet. Die Fortschreitungslinien, welche von nun an der vorhin gemachten Festsetzung gemäß kurzweg Strahlen genannt werden sollen, gehen natürlich alle vom Herd aus; die Durchschnitte der Wellenflächen bilden mit ihnen ein orthogonales (d. h. einander senkrecht schneidendes) Paar von Kurvensystemen. Der geozentrische Abstand vom Herd möge mit ϑ bezeichnet werden, r sei der Abstand vom Erdmittelpunkt, $\bar{r}$ der spezielle Wert von r für die Erdoberfläche, sodaß also

(195) $$\bar{r} = 6370 \text{ Kilometer}$$

zu setzen ist. Der Abstand vom Herd längs der Erdoberfläche gemessen sei Δ. Es ist dann

(196) $$\Delta = \bar{r}\vartheta,$$

wenn ϑ in Bogenmaß gemessen wird. Dies wird in der Folge in der Regel geschehen; soll in besonderen Fällen ϑ nach Grad gemessen werden, so wird ϑ^0 geschrieben werden. Es ist also

(197) $$\begin{cases} \vartheta = \dfrac{\pi}{180}\vartheta^0, \\[2ex] \Delta = \dfrac{\pi}{180}\bar{r}\vartheta^0. \end{cases}$$

Die zum Gegenpunkt des Herdes gehörigen Werte sollen mit

einem Index G ausgezeichnet werden, in der Art: ϑ_G, ϑ^0_G, $\varDelta_G$. Es ist dann

(198) $\vartheta_G = \pi$, $\vartheta^0_G = 180^0$, $\varDelta_G = \bar{r}\pi = 20000$ Kilometer.

T sei die „Laufzeit", also die Zeit, in der die Wellen vom Herd zu irgend einem Punkt der Erdoberfläche gelangen. Wäre die Erde homogen, wie es für die Zeichnung der Figur 4a angenommen wurde, wäre also durchweg $\mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}$, die Wellenflächen kugelig, die Strahlen gradlinig, so hätten wir:

$$(199)\quad \begin{cases} \mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}, \\ T = \dfrac{2\bar{r}}{\bar{\mathfrak{v}}} \sin\dfrac{\vartheta}{2} = \dfrac{2\bar{r}}{\bar{\mathfrak{v}}} \sin\dfrac{\varDelta}{2\bar{r}}, \\ \sin i = \cos e = \dfrac{\bar{\mathfrak{v}}}{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{v}}\dfrac{dT}{d\varDelta} = \cos\dfrac{\vartheta}{2} = \cos\dfrac{\varDelta}{2\bar{r}}, \\ T_G = \dfrac{2\bar{r}}{\bar{\mathfrak{v}}}. \end{cases}$$

Im allgemeinen Fall, wenn $\mathfrak{v}$ mit der Tiefe variirt, werden T und $\varDelta$ durch entsprechend andere Gesetze miteinander verbunden sein.

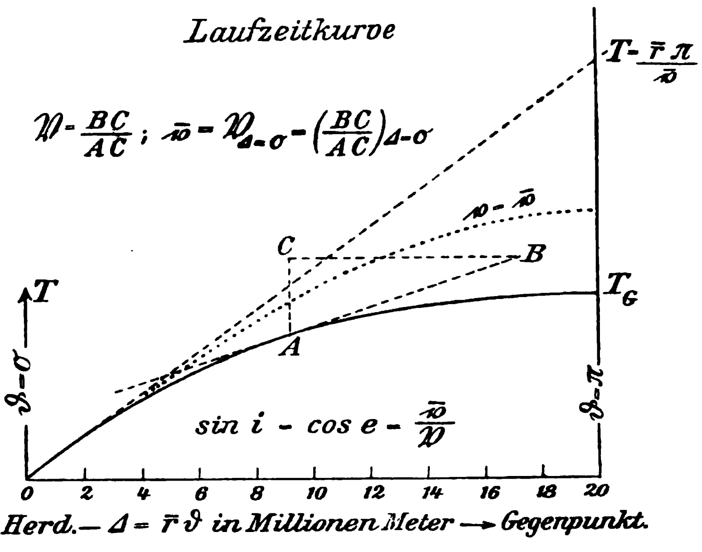
§ 18. Laufzeitkurve.

Wir wollen uns den Zusammenhang von T und $\varDelta$ graphisch durch eine „Laufzeitkurve" dargestellt denken. Figur 5 gibt eine Vorstellung davon. Als Abscisse ist $\varDelta$, als Ordinate T gewählt. Die punktierte Kurve stellt den Fall der homogenen Erde dar, entspricht also der Figur 4a und den Formeln (199), die ausgezogene Kurve bezieht sich wie Figur 4b auf einen allgemeineren Fall. — Ist dT die Zeit, um welche ein Punkt in der Entfernung $\varDelta + d\varDelta$ die Erdbebenwellen später erhält als ein Punkt in der Entfernung $\varDelta$, so ist

$$(200\,a)\qquad \mathfrak{B} = \frac{d\varDelta}{dT}$$

die Oberflächengeschwindigeit der Erdbebenwellen in der Entfernung $\varDelta$ vom Herd. Wird die ausgewählte Entfernung $\varDelta$ in der Laufzeitkurve (Figur 5) durch den Punkt A dargestellt, und konstruieren wir nun ein rechtwinkliges Dreieck ABC, bei dem AC der T-Axe, CB der $\varDelta$-Axe parallel ist und AB eine Tangente der Laufzeitkurve in A bedeutet, so ist $BC : AC = d\varDelta : dT$, und wir haben:

$$(200\,b)\qquad \mathfrak{B} = \frac{d\varDelta}{dT} = \frac{BC}{AC}.$$



Figur 5.

Setzen wir also die Seite AC speziell $= 1$, so gibt BC direkt $\mathfrak{B}$ an. —

Zum Gegenpunkt gelangen die Wellen gerade von unten her, hier muß also die Oberflächengeschwindigkeit unendlich groß werden:

$$\mathfrak{B}_a = \left(\frac{d\Delta}{dT}\right)_a = \infty. \tag{201}$$

Die Laufzeitkurve muss demgemäß in der Ordinatenlinie des Gegenpunktes, das heißt für $\Delta = \Delta_a = \bar{r}\pi$, parallel mit der Abszissenaxe werden (vgl. Figur 5).

$\mathfrak{v}$ sei wieder die **Raumgeschwindigkeit** der hier betrachteten Wellenart, sei also $= \mathfrak{a}$, oder $= \mathfrak{b}$. Dann ist nun $\mathfrak{v}$ als Funktion des Radius r anzusehen; der Oberflächenwert, das heißt der Wert für $\bar{r}$ sei wieder $\bar{\mathfrak{v}}$. — Unmittelbar beim Herd ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$, hier muß also auch die Oberflächengeschwindigkeit den Wert $\bar{\mathfrak{v}}$ haben. Bezeichnet man daher den Anfangswert der Oberflächengeschwindigkeit am Herd mit $\mathfrak{B}_0$, so wird

$$\mathfrak{B}_0 = \bar{\mathfrak{v}}. \tag{202}$$

Dieser Satz erlaubt uns für die Laufzeitkurve die Richtung anzugeben, unter der sie vom Anfangspunkt $\Delta = 0$, $T = 0$ ausgeht; es muß nämlich hier gelten:

$$(203) \qquad \left(\frac{d\varDelta}{dT}\right)_0 = \left(\frac{BC}{AC}\right)_0 = \mathfrak{V}_0 = \bar{\mathfrak{v}}.$$

Zieht man, wie in Figur 5 geschehen, die Anfangstangente bis zu der Ordinatenlinie, welche zum Gegenpunkt des Herdes gehört, also bis zur Linie $\varDelta_0 = \bar{r}\pi$, so wird hier eine Zeitordinate T abgeschnitten, deren Wert gegeben ist durch

$$(204) \qquad T = \frac{\bar{r}\pi}{\bar{v}},$$

es ist damit offenbar diejenige Zeit bestimmt, welche die Wellen vom Herd bis zum Gegenpunkt gebrauchen würden, wenn sie längs der Oberfläche mit der hier herrschenden Raumgeschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$ liefen. Die wirkliche Endordinate der Laufzeitkurve für den Gegenpunkt gibt die Zeit an, in welcher die Wellen einen Durchmesser der Erde durchlaufen, ist also gegeben durch:

$$(205) \qquad T_0 = 2\int_0^{\bar{r}} \frac{dr}{\mathfrak{v}}.$$

i sei der „Richtungswinkel“ des Strahles gemessen gegen die Richtung des Radius r, also gegen die Vertikale am betreffenden Ort (vgl. Figur 4), $e = 90^\circ - i$ der „Emersionswinkel“ im Sinne der Seismologen; die Oberflächenwerte sind dann mit $\bar{i}$ und $\bar{e}$ zu bezeichnen. Da wir $\mathfrak{v}$ nur als Funktion von r betrachten, muß jeder Strahl in seinem wieder zur Erdoberfläche aufsteigenden Teil symmetrisch gleich dem absteigenden Teil vom Herd bis zum tiefsten Punkt der Bahn sein. i ist also für jeden Strahl beim Wiederauftauchen in irgend einem Niveau r ebenso groß wie vorhin beim Untertauchen; insbesondere geht jeder Strahl unter derselben Neigung $\bar{i}$ am Herd in die Erde hinein, unter der er schließlich wieder zur Oberfläche zurückkehrt. — Wir suchen auf der Oberfläche in dem durch unsere Figur 4b dargestellten Querschnitt einen Punkt im Abstand $\varDelta$ vom Herd auf, konstruieren den zugehörigen Schnitt der Wellenfläche sowie den Strahl, und konstruieren beides auch für einen unendlich wenig ferneren Punkt $(\varDelta + d\varDelta)$; die zugehörigen Laufzeiten seien T und $T + dT$, sodaß also die Welle in dem Zeitintervall dT vom Punkt $\varDelta$ zum Punkt $\varDelta + d\varDelta$ vorrückt. Bedeutet $\mathfrak{V}$ wieder die Oberflächengeschwindigkeit, so ist $d\varDelta = \mathfrak{V}dT$. Der Strahl zum Punkt $(\varDelta + d\varDelta)$ und die Wellenfläche durch den Punkt $(\varDelta)$ schneiden sich in einem unter der Oberfläche liegenden Punkt, der mit Q bezeichnet werden mag. Da das Dreieck $(\varDelta)$, Q, $(\varDelta + d\varDelta)$ unendlich kleine Dimen-

sionen haben soll, kann es als gradlinig betrachtet werden. Es ist rechtwinklig bei Q. Von seinen Seiten hat die an der Erdoberfläche liegende Hypothenuse die Länge $d\varDelta = \mathfrak{V} dT$. Die Kathete, welche durch das über Q hinausliegende Strahlstückchen zwischen den beiden Wellenflächen $(\varDelta)$ und $(\varDelta + d\varDelta)$ gegeben wird, hat die Länge $\bar{\mathfrak{v}} dT$, denn die Wellenfläche rückt ja mit der Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$ vor und es handelt sich um das Zeitintervall dT. Es ist ferner leicht ersichtlich, daß der Dreieckswinkel beim Punkt $\varDelta$ den Wert $\bar{i}$ hat. So folgt sogleich:

$$\sin \bar{i} = \frac{\bar{\mathfrak{v}}}{\mathfrak{V}} \tag{206}$$

als ein Satz, der Neigung $\bar{i}$, Raumgeschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}$ an der Oberfläche und Oberflächengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ verbindet, und der uns schon in § 10 entgegengetreten ist. — Denken wir uns nacheinander für verschiedene Punkte der Laufzeitkurve die Dreiecke ABC gezeichnet und geben wir der Seite BC jedesmal die gleiche Länge, so ist AC proportional mit $1/\mathfrak{V}$, das heißt proportional mit $\sin i$. Am Herd selbst wird $i = 90^0$, $\sin i = 1$; dividieren wir also bei unseren Konstruktionen der Dreiecke ABC mit stets gleicher Länge der Seite BC die Länge der Seite AC jedesmal durch den Anfangswert auf der Laufzeitkurve, so erhalten wir jedesmal direkt $\sin i$ bezüglich $\cos e$. Hiermit ist eine einfache und bequeme Methode angezeigt, um aus der Laufzeitkurve für jede Entfernung vom Herd $\varDelta$ den Neigungswinkel i bezüglich den Emergenzwinkel e zu finden.

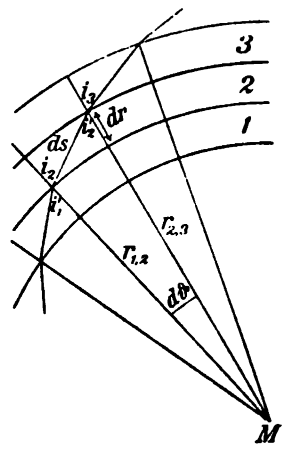
§ 19. Weg und Krümmung der Strahlen.

Im allgemeinen Fall, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit dem Radius variirt, bestehen über die Gestalt der Strahlen sehr einfache Gesetze, die auch für die Lichtstrahlen in der Atmosphäre gelten, wenn für diese eine regelmäßige Anordnung in horizontalen Schichten vorausgesetzt wird, und die der oft bearbeiteten Theorie der „atmosphärischen Refraktion“ entnommen werden können. Ich füge der Vollständigkeit wegen kurze elementare Beweise hinzu, die zwar theoretisch nicht sehr vollkommen sind, aber doch manchem Leser eine wünschenswerte klare Einsicht in die Bedeutung der Formeln geben werden.

Zunächst soll die sogenannte „Gleichung“ der Strahlen abgeleitet werden. Zu dem Zweck denken wir uns die angenommene stetige Änderung der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ersetzt durch eine

sprungförmige in sehr kleinen Stufen, also in sehr enge aufeinander folgenden Kugelflächen um den Erdmittelpunkt. Werden dann die Stufen nur klein genug, schließlich unendlich klein gewählt, so ergeben sich die gewünschten Gesetze für den Fall der stetigen Änderung der Geschwindigkeit ohne weiteres.

In Figur 6 seien die aufeinanderfolgenden Schichten (1), (2), (3) mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ dargestellt. Die Grenzradien seien $r_{1,2}$, $r_{2,3}$. Ein Strahl, der durch die Schichten, wie angedeutet, hindurchgeht, wird an den Grenzen gebrochen. Die Richtungswinkel gemessen gegen die Vertikalen — also gegen die Radien r — seien i_1', i_2 an der Grenze (1), (2) und i_2', i_3 an der Grenze (2), (3). Als Wirkung des Hindurchgehens durch die Schicht (2) ist dann offenbar die Umwandlung des Richtungswinkels i aus i_1' in i_2' oder aus i_2 in i_3 anzusehen. Beide Vorstellungen führen zum selben Endresultat; wir wollen uns hier an die Umwandlung von i aus i_2 in i_3 halten; dann ist nur die Brechung beim Übergang von (2) in (3) zu beachten. Das Brechungsgesetz (§ 10) ergibt:



Figur 6.

$$\text{(207)} \qquad \frac{\sin i_3}{\sin i_2'} = \frac{\mathfrak{v}_3}{\mathfrak{v}_2}.$$

Unsere Figur andererseits zeigt, daß nach dem Sinussatz

$$\text{(208)} \qquad \frac{\sin i_2'}{\sin i_2} = \frac{r_{1,2}}{r_{2,3}}$$

ist, also folgt:

$$\text{(209)} \qquad \frac{r_{2,3} \sin i_3}{\mathfrak{v}_3} = \frac{r_{1,2} \sin i_2}{\mathfrak{v}_2}.$$

Beachtet man nun, daß als Folge des Durchgangs durch die Schicht (2) gelten kann: die Umwandlung von r aus $r_{1,2}$ in $r_{2,3}$, die Umwandlung von i aus i_2 in i_3 und die Umwandlung von $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{v}_2$ in $\mathfrak{v}_3$, so erkennt man, daß (209) die Aussage enthält, der Ausdruck $(r/\mathfrak{v}) \sin i$ werde beim Durchgang durch die Schicht (2) nicht geändert. Was hier von (2) gefunden ist, muß für alle anderen Schichten auch gelten, da (2) ja nichts vor diesen voraus hat; so ergibt sich denn der folgende Satz:

Wird

$$\text{(210)} \qquad \frac{r \sin i}{\mathfrak{v}} = \frac{r \cos e}{\mathfrak{v}} = c$$

gesetzt, so hat c für alle Punkte des Strahles den gleichen Wert, bedeutet also eine dem Strahl eigentümliche Konstante. Man nennt nun (210) die Gleichung des Strahles. Ist insbesondere $\bar{i}$ der Austrittswinkel (oder Eintrittswinkel), $\bar{e}$ der Emergenzwinkel des Strahles an der Oberfläche, so gilt:

$$\text{(210a)} \qquad c = \frac{\bar{r} \sin \bar{i}}{\bar{\mathfrak{v}}} = \frac{\bar{r} \cos \bar{e}}{\bar{\mathfrak{v}}};$$

und bedeutet $[r/\mathfrak{v}]_m$ den Wert von $r/\mathfrak{v}$ für die tiefste Stelle, die der Strahl bei seinem Weg durch die Erde erreicht, wo also $i = 90^0$, $e = 0$ ist, so muß gelten:

$$\text{(210b)} \qquad \left[\frac{r}{\mathfrak{v}}\right]_m = c.$$

Ein zweiter Satz bezieht sich auf die Krümmung des Strahles. Ist ds ein unendlich kleines Stück des Strahles, $d\omega$ die auf diesem sich vollziehende Änderung der Richtung, ϱ der „Krümmungsradius", also $1/\varrho$ die „Krümmung", so ist

$$\text{(211)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \left|\frac{d\omega}{ds}\right|.$$

Durch die Einrahmung in Strichen $|\,|$ wird angedeutet, daß hier der positive Wert zu nehmen ist. Wir wenden diese Formel an auf das Stückchen des Strahles in der Schicht (2) der Figur 6. Als Änderung der Richtung können wir hier den Knick bei $r_{1,2}$ oder $r_{2,3}$ betrachten; wir wollen, $r_{2,3}$ wieder bevorzugend,

$$\text{(212)} \qquad d\omega = i_2 - i_2'$$

setzen, und verwenden (207) zur Bestimmung von $i_2 - i_2'$. Für die linke Seite von (207) darf gesetzt werden

$$\text{(213)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin i_2}{\sin i_2'} &= 1 + \frac{\sin i_2 - \sin i_2'}{\sin i_2'} = 1 + \frac{\sin(i_2' + (i_2 - i_2')) - \sin i_2'}{\sin i_2'} \\ &= 1 + (i_2 - i_2') \operatorname{ctg} i = 1 + d\omega \operatorname{ctg} i. \end{aligned} \right.$$

Als Faktor von $i_2 - i_2' = d\omega$ ergibt sich hier zunächst $\operatorname{ctg} i_2'$ anstelle von $\operatorname{ctg} i$, aber da der Strahl beim Durchgang durch die hier ausgezeichneten Schichten nur eine unendlich kleine Änderung seines Richtungswinkels erfährt, ist eine nähere Unterscheidung nicht erforderlich. Die rechte Seite von (207) liefert entsprechend

$$(214)\qquad \frac{\mathfrak{v}_3}{\mathfrak{v}_2} = 1 + \frac{\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_2}{\mathfrak{v}_2} = 1 + \frac{1}{\mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\, dr,$$

wenn mit dr die Dicke der Schicht (2) bezeichnet wird, sodaß $(\partial \mathfrak{v}/\partial r)\, dr$ den Zuwachs $\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_2$ der Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Schicht (2) angibt. (213) und (214) verwandeln (207) in

$$(215)\qquad d\omega \operatorname{ctg} i = \frac{1}{\mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\, dr.$$

Beachtet man nun noch, daß $dr = ds \cos i$ ist, so liefern (215) und (211) zusammen sogleich:

$$(216)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{v}}\left|\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\right| \sin i = \frac{1}{\mathfrak{v}}\left|\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\right| \cos e.$$

Dieser wichtige Satz verbindet die Krümmung $1/\varrho$, bezüglich den Krümmungsradius ϱ der Strahlen mit ihrem Richtungswinkel i, bezüglich ihrem Emergenzwinkel $e = 90^0 - i$. Unter der Voraussetzung, daß für i und e stets die Winkel unter 90^0 gewählt werden, konnte in (216) die Einklammerung mit den Strichen $||$, welche den positiven Wert kennzeichnen, auf $\partial \mathfrak{v}/\partial r$ beschränkt werden. Bei allgemeinerer Verfügung über i und e müßten $\sin i$ und $\cos e$ in die Umklammerung einbegriffen werden. Wir erkennen, daß an jeder Stelle in der Erde von allen hindurchgehenden Strahlen derjenige am stärksten gekrümmt ist, für den $i = 90^0$, $e = 0$ ist, der also rechtwinklig zum Radius r verläuft. Mit abnehmender Neigung i gegen den Radius, also mit wachsender Emergenz, nimmt die Krümmung ab, der Krümmungsradius zu, bis schließlich in der Richtung des Radius r selbst die Krümmung 0, der Krümmungsradius ∞ wird. Die Intensität der Krümmung an den verschiedenen Stellen im Erdinnern ist bei gleichen Richtungswinkeln der Strahlen proportional mit

$$\frac{1}{\mathfrak{v}}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} = \frac{\partial \lg \mathfrak{v}}{\partial r}.$$

Besonders beachten wollen wir noch, was durch die nähere Betrachtung der Figur 6 leicht erhellt, daß die Strahlen ihre konkave oder ihre konvexe Seite dem Erdmittelpunkt zuwenden, jenachdem die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bei wachsendem Abstand r vom Erdmittelpunkt zunimmt oder abnimmt (jenachdem nämlich $\partial \mathfrak{v}/\partial r$ positiv wie in der Figur 6 angenommen, oder negativ ist).

Das wesentliche Resultat der Untersuchungen dieses Paragraphen besteht in den beiden Sätzen (210) und (216), von denen

(210) $$\frac{r \sin i}{\mathfrak{v}} = \frac{r \cos e}{\mathfrak{v}} = c$$

sich jedesmal auf die ganze Ausdehnung eines bestimmt herausgegriffenen Strahles bezieht, für den dann c eine Konstante bedeutet, während

(216) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{v}} \left| \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} \right| \sin i = \frac{1}{\mathfrak{v}} \left| \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} \right| \cos e$$

sich auf einen bestimmten Punkt in der Erde bezieht und lehrt, wie der Krümmungsradius ϱ bei den hindurchgehenden Strahlen von ihrem Richtungswinkel i bezüglich dem Emergenzwinkel $e = 90^0 - i$ bestimmt wird.

Diese Sätze ziehen sehr bemerkenswerte Folgerungen nach sich, wenn wir irgend zwei Niveauflächen in der Erde — entsprechend etwa den Radien r und r', gegeben also in den Kugelflächen mit den Radien r und r' um den Erdmittelpunkt — herausgreifen und nun diejenigen Strahlen miteinander vergleichen, die beide Niveauflächen durchsetzen oder wenigstens erreichen. Es seien (1), (2), (3)... irgend welche solche Strahlen, $i_1, i_2, i_3 \ldots$; $i_1', i_2', i_3' \ldots$ seien ihre Richtungswinkel in den Niveauflächen (r) und (r'), $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ und $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3' \ldots$ ihre Krümmungsradien bei ihrem Schnitt oder bei ihrer Berührung der Niveauflächen. Jedem der Strahlen wird ein gewisser Wert der Konstanten c zugehören, dieser sei c_1, bezüglich $c_2, c_3, \ldots$ Dann ist nach (210) in dem Niveau (r):

(217a) $$\sin i_1 : \sin i_2 : \sin i_3 : \ldots = c_1 : c_2 : c_3 : \ldots$$

und in dem Niveau (r'):

(217b) $$\sin i_1' : \sin i_2' : \sin i_3' : \ldots = c_1 : c_2 : c \ : \ldots$$

(217a) und (217b) vereinigt ergeben also den Satz:

(218) $$\sin i_1 : \sin i_2 : \sin i_3 : \ldots = \sin i_1' : \sin i_2' : \sin i_3' : \ldots;$$

in Worten heißt dies: Vergleicht man die Neigungen, mit denen vorgegebene Strahlen irgend welche Niveauflächen (r) in der Erde erreichen, so findet man, daß die Sinus der Neigungswinkel i auf allen Niveauflächen in dem gleichen Größenverhältnis zu einander stehen.

er Satz (216) erlaubt sogleich neben (218) auch zu setzen:

(219) $$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 : \ldots = \varrho_1' : \varrho_2' : \varrho_3' : \ldots;$$

das heißt: Auch die Krümmungsradien ϱ eines belie-

bigen Systemes von Strahlen zeigen auf allen Niveauflächen (r), welche erreicht werden, die gleichen Größenverhältnisse.

Für jede einzelne Niveaufläche ist dabei nach (216) natürlich

$$\frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} : \frac{1}{\varrho_3} : \ldots = \sin i_1 : \sin i_2 : \sin i_3 : \ldots \tag{220}$$

§ 20. Zeichnerische Konstruktion von Strahlen mittels der Laufzeitkurve.

Die Sätze des vorigen Paragraphen erlauben es, praktisch gut brauchbare Konstruktionen des Weges der Erdbebenstrahlen durch das Erdinnere aufzufinden, wenn die Laufzeitkurve vorliegt. Man erhält dabei zugleich eine Bestimmung der Geschwindigkeiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der elastischen Wellen in den verschiedenen Tiefen.

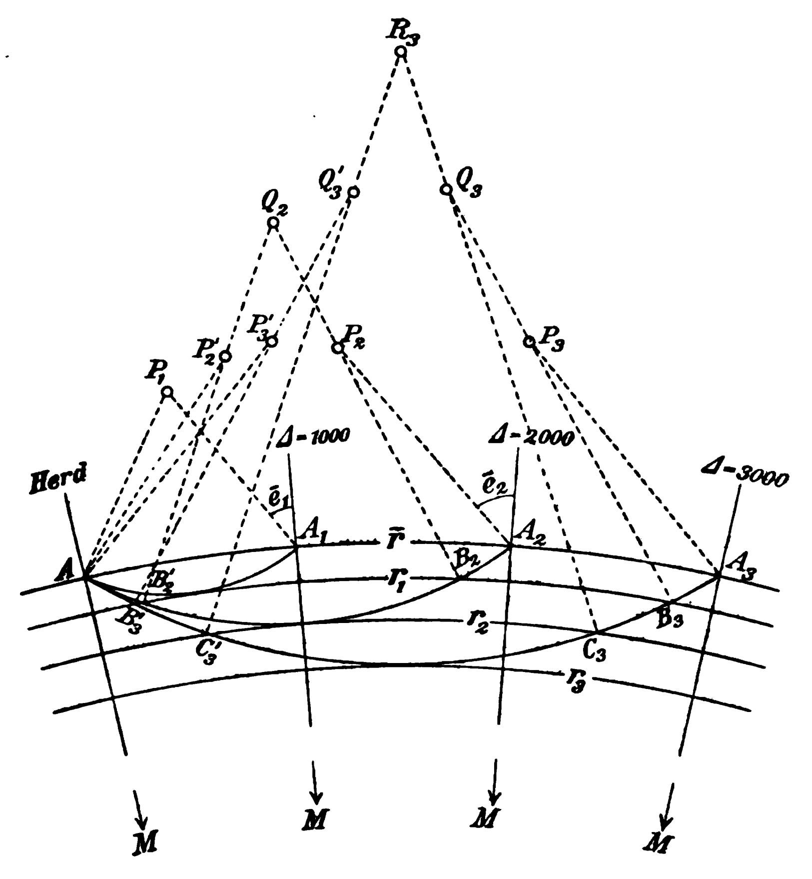
Ich beschreibe im Folgenden eine Methode, die sich ergibt, wenn die stetige Variation der Krümmungsradien auf den Strahlen durch eine Variation in Stufen ersetzt wird und zwar durch eine solche, die einer Zerteilung der Erde in konzentrische Schichten entspricht. Die Methode wird also der Wahrheit um so näher kommen, je dünner die Erdschichten gewählt werden; andererseits wird man um so leichtere Arbeit haben, je weniger Schichten man wählt. Schon hier mag erwähnt werden, daß ich mit der Annahme verhältnismäßig vieler Schichten begann (von je 100 — 200 km Dicke), daß sich dann aber das überraschende Resultat ergab, daß den vorliegenden Beobachtungen schon durch die Annahme ganz weniger Schichten genügt werden kann. Offenbar ist die Erde so gebaut, daß der Krümmungsradius auf den Strahlen nur wenig variirt. Dieser Umstand gibt umgekehrt wieder der zu entwickelnden Methode eine unerwartet hohe praktische Bedeutung.

Ich denke mir für das Folgende, die Laufzeitkurve (vergl. Figur 5, Seite 478, § 18) sei aus den Beobachtungen abgeleitet, liege also gegeben vor. Dabei soll von den Unregelmäßigkeiten, welche in den äußersten Oberflächenschichten der Erde sicher zu erwarten sind, abgesehen werden. Das heißt, wir wollen uns die Strahlen überall glatt bis zur Oberfläche fortgesetzt denken und wollen den Herd stets als einen bestimmten Punkt in der Oberfläche selber betrachten. Die „glatte Fortsetzung" der Strahlen wird sich bei der Konstruktion der Laufzeitkurve ganz von selbst ergeben, wenn man Beobachtungen benutzt, welche Punkte in ihrer ganzen

Ausdehnung liefern, ohne daß in der Nähe des Herdpunktes eine besondere Häufung stattfindet, und wenn man dann als Laufzeitkurve eine vom Anfangspunkt $\varDelta = 0$, $T = 0$ ausgehende „glatte" Kurve zieht. In Bezug auf den etwaigen Einfluß der Herdtiefe und dessen Beseitigung bei der Konstruktion der Kurve ist § 28 im zweiten, von Dr. Zoeppritz verfaßten, Teil dieser Arbeit zu beachten.

Ich beginne mit der Darlegung der Methode unter Anwendung der Zeichnung, sowie ich sie zuerst, und schon für die Vorlage am 8. Dezember 1906 anwandte, und verweise dabei auch auf die Figuren 4 und 5, Seite 476 und 478.

Jeder Entfernung vom Herd, jedem Punkt der Laufzeitkurve entspricht ein gewisser Strahl durch das Erdinnere. Wir haben erkannt (§ 18), daß aus der Laufzeitkurve die Austrittswinkel i für alle diese Strahlen bestimmt werden können. Je größer die erreichte Entfernung $\varDelta$ ist, um so tiefer werden die Strahlen in die Erde eindringen, um so stärker werden daher auf den Strahlen auch die Variationen des Richtungswinkels i und des Krümmungsradius ϱ ausfallen. Umgekehrt haben wir für sehr kleine Entfernungen vom Herd auch nur sehr kleine Variationen zu erwarten — wenn von den Störungen in der Erdrinde abgesehen wird. Diese Störungen aber fallen bei der hier angenommenen und soeben näher dargelegten Konstruktion der Laufzeitkurve für uns weg. Insbesondere wird also der Krümmungsradius ϱ auf den Strahlen, die nur geringe Entfernungen $\varDelta$ vom Herd erreichen, nur sehr wenig variiren, sodaß die Strahlen hier sehr nahe einfache Kreise darstellen. Für unsere Methode ist nun wesentlich, daß wir sie bis zu einer gewissen kleinen Entfernung, zum Beispiel $\varDelta = 1000$ Kilometer, wirklich als Kreise betrachten. Dann können wir sie sofort auch wirklich konstruieren. Es handele sich zum Beispiel um den Strahl, der zu $\varDelta = 1000$ Kilometer gehört. $\bar{i}_1$ sei der aus der Laufzeitkurve abgeleitete Wert des Neigungswinkels für $\varDelta = 1000$; der zugehörige Strahl wird dann einfach durch einen solchen Kreis gegeben, der die Erdoberfläche in zwei um 1000 Kilometer entfernten Punkten unter den Neigungswinkeln $\bar{i}_1$ durchschneidet. Wird also in Figur 7 ein Erdquerschnitt dargestellt, ist M der Mittelpunkt, bedeuten A und A_1 zwei Punkte im Abstand $\varDelta = 1000$ Kilometer auf dem begrenzenden Kreis mit dem Radius $\bar{r}$, wobei A den Herd kennzeichnen soll, zieht man die Radien MA, MA_1 und gegen diese um den Emergenzwinkel $\bar{e}_1 = 90° - \bar{i}_1$ geneigte Linien AP_1, A_1P_1 die sich in P_1 schneiden, so ist in P_1 der Mittelpunkt des Kreises gewonnen



Figur 7.

welcher den zu AA_1 gehörigen Strahl darstellt. Indem man dann um P_1 einen Kreis mit dem Radius $AP_1 = A_1P_1$ schlägt, erhält man ein Abbild des Strahles. — Der erste gezeichnete Strahl wird eine gewisse Tiefe unter der Erdoberfläche erreichen, r_1 sei der zugehörige Radius. Wir wollen nun die Schicht zwischen $\bar{r}$ und r_1 als unsere erste annehmen, in der wir von einer Variation des Krümmungsradius bei allen Strahlen absehen. Dann können alle von der Oberfläche ausgehenden Strahlen bis zur Grenze r_1 sofort gezeichnet werden. Nehmen wir zum Beispiel den Strahl, der zu $\Delta = 2000$ Kilometer gehört. Sein Anfang in unserer Figur 7 liegt in A, sein Ende sei A_2, sodaß also AA_2 auf der Oberfläche die Länge 2000 Kilometer darstellt. Die Neigungen $\bar{e}_2 = 90^\circ - \bar{i}_2$ des Strahles an der Oberfläche sind uns durch die Laufzeitkurve bekannt. Werden

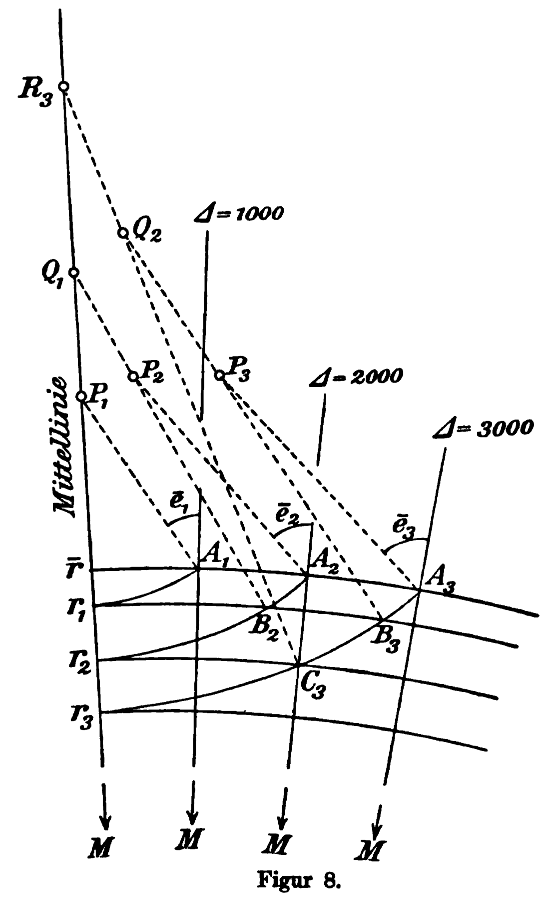
also von A und A_2 aus Linien gezeichnet, die unter den Winkeln $\bar{e}_2$ gegen die Radien geneigt sind, so müssen auf diesen die Krümmungsmittelpunkte für die in der Schicht $\bar{r}$, r_1 liegenden Stücke der Strahlen liegen. Wir kennen aber auch die Krümmungsradien ϱ_2 selbst. Denn nach (220) ist

$$\frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} = \sin \bar{i}_1 : \sin \bar{i}_2 \tag{221}$$

und ϱ_1 wurde soeben in $AP_1 = A_1P_1$ gefunden. Berechnet man also mittels (221) ϱ_2, trägt die entsprechende Strecke von A und A_2 aus ab, so erhält man in P_2' und P_2 die Krümmungsmittelpunkte für die Stücke des Strahles (2) von $\bar{r}$ bis r_1 und kann die Abbilder dieser Stücke mittels des Zirkels sogleich zeichnen. B_2' und B_2 seien die beiden im Niveau r_1 erreichten Punkte. — In ähnlicher Weise wird man nun auch den Verlauf aller übrigen gewünschten Strahlen, etwa für $\Delta = 3000$ Kilometer, 4000 Kilometer u. s. w. bis zur Tiefe von r_1 zeichnen können. — Ist dies geschehen, so geht man in entsprechender Weise einen nächsten Schritt in die Erde hinein. Das noch fehlende Stück eines Strahles, auf dem die Lücke nicht mehr groß ist, betrachtet man dabei wieder als Kreis. Wir wollen zum Beispiel den Strahl für $\Delta = 2000$ Kilometer auswählen. Dann haben wir nur den Schnittpunkt der beiden Linien $B_2'P_2'$ und B_2P_2 — er sei Q_2 — aufzusuchen, um in Q_2 den Krümmungsmittelpunkt und in $Q_2B_2' = Q_2B_2$ den Krümmungsradius $\varrho_{2,2}$ für das fehlende Stück des Strahles zu finden, das sich ja ohne Knicke an die schon bekannten Stücke anschließen muß. Schlägt man nun um Q_2 einen Kreis, der B_2' mit B_2 verbindet, so ist das Abbild des Strahles für $\Delta = 2000$ Kilometer vervollständigt. — Die größte Tiefe, welche sich für diesen Strahl so ergibt, gehöre zum Radius r_2. Dann ist $(r_1 r_2)$ als zweite Schicht konstanter Krümmung für alle Strahlen anzusehen. Die zugehörigen Krümmungsradien $\varrho_{2,3}$, $\varrho_{2,4}$, $\varrho_{2,5} \ldots$ finden wir leicht aus $\varrho_{2,2}$ mittels (220) und (218), und es können dann alle Strahlen bis zur Tiefe r_2 gezeichnet werden.

In der gleichen Weise geht man nun weiter: Der Strahl (3) wird durch einen Kreisbogen geschlossen, man gelangt so zu einem Radius r_3 hinab, nimmt die Schicht $(r_2 r_3)$ hinzu, verlängert alle Strahlen durch sie hindurch, schließt Strahl (4) durch einen Kreisbogen, und so fort. — Jeder neu hinzugenommene Punkt der Laufzeitkurve führt bei dieser Art vorzugehen einen Schritt tiefer in die Erde hinein. —

Die in Figur 7 benutzte Anordnung der Zeichnung wird bei wirklicher Ausführung unnötig unübersichtlich, weil unnötig viel Linien gezeichnet werden. Man wird nämlich berücksichtigen können, daß jeder der Strahlen aus zwei symmetrisch gleichen Hälften, vom Herd hinab bis zum tiefsten Punkt und dann wieder herauf besteht, daß es also genügt, nur eine der Hälften zu konstruieren. So empfiehlt sich denn mehr, anstelle der Anordnung der Figur 7 diejenige der Figur 8 zu benutzen. Bei Figur 8



Figur 8.

ist jeder der Strahlen um den Erdmittelpunkt gedreht und zwar so, daß alle tiefsten Punkte auf einem und demselben Radius zu liegen kommen. Der Drehungswinkel ist also in jedem Fall $\vartheta/2 = \Delta/2\bar{r}$, wobei $\vartheta = \Delta/\bar{r}$ wieder wie früher (Figur 4) den ganzen Winkelweg der Strahlen vom Herd bis zur Oberfläche bedeutet. Wie die Konstruktion sich ändert wird durch Figur 8 so deutlich gemacht, daß es nicht nötig ist näher darauf einzugehen.

Sehr wichtig ist es, zu bemerken, daß unsere Zeichnung es uns ermöglicht, für alle erreichten Tiefen sogleich auch die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zu bestimmen. Für den n-ten der gezeichneten Strahlen, der an der Oberfläche den Richtungswinkel $\bar{i}_n$ hat und in der Tiefe r_n umkehrt — sodaß hier $i_n = 90^\circ$, $e_n = 0$ ist — ergiebt nämlich (210):

$$\frac{\bar{r} \sin \bar{i}_n}{\bar{\mathfrak{v}}} = \frac{r_n}{\mathfrak{v}_n}, \tag{222}$$

wenn $\mathfrak{v}_n$ die Geschwindigkeit in der Tiefe r_n bedeutet. So folgt denn:

$$\mathfrak{v}_n = \bar{\mathfrak{v}} \frac{r_n}{\bar{r} \sin \bar{i}_n}. \tag{223}$$

§ 21. Gebiete konstanter Krümmung der Strahlen.

Konstruktionen mittels der Rechnung haben vor solchen mittels der Zeichnung voraus, daß sie eine bessere Kontrolle und eine größere Schärfe ermöglichen. So habe ich denn nach den ersten Erfolgen der Methode die Zeichnung durch die Rechnung ersetzt. Dabei übernimmt die Rechnung einfach die Arbeit des Lineales und des Zirkels.

Die Hauptsache ist also wieder, daß die Erde in Schichten zerteilt wird, in denen der Krümmungsradius der Strahlen als konstant betrachtet wird. Es ergiebt sich dabei das sehr bemerkenswerte Gesetz, daß, wenn in einer Schicht der Erde die Variation der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ so erfolgt, daß ein bestimmter, beliebig herausgegriffener Strahl konstante Krümmung erhält, dann auch alle andern Strahlen in der Schicht konstante Krümmung erhalten. Diesem Umstand entsprechend, sollen im vorliegenden § zunächst die allgemeinen Gesetze aufgesucht werden, welche in Gebieten konstanter Krümmung der Strahlen die geometrischen Verhältnisse der Strahlen beherrschen.

Für jeden Strahl gilt nach § 19 folgendes Gesetz: wenn

$$\frac{r \sin i}{\mathfrak{v}} = \frac{r \cos e}{\mathfrak{v}} = c \tag{224}$$

gesetzt wird, ist c längs der ganzen Strahlen konstant; andererseits wird der Krümmungsradius ϱ nach (216) durch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{v}} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} \sin i \tag{225}$$

bestimmt. Eliminiert man aus beiden Gleichungen $\sin i$, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\right| c. \tag{226}$$

Da c längs jeden Strahl unverändert bleibt, so sieht man, daß der Krümmungsradius dann konstant ist, wenn

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} \tag{227}$$

konstant ist. Diese Bedingung enthält nichts, was sich auf einen bestimmten Strahl bezieht. Es besteht also folgender, vorhin schon angekündigter Satz, der für uns weiterhin fundamental sein wird: Wenn zwischen 2 Niveauflächen in der Erde der Ausdruck (227) konstant ist, so verlaufen alle Strahlen in diesem Gebiet mit konstanter Krümmung. Da alle Strahlen ebene Figuren sind und in Ebenen verlaufen, die durch den Mittelpunkt der Erde gehen, so beschreiben die Strahlen in Gebieten konstanten Wertes des Ausdrucks (227) Kreise in solchen Ebenen.

Wir wollen zunächst zwei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit wachsender Entfernung r vom Erdmittelpunkt ab- oder zunimmt.

a) $\mathfrak{v}$ nimmt ab, wenn r wächst: $\partial \mathfrak{v}/\partial r$ negativ. Der Ausdruck (227) ist dann negativ. Wir setzen:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} = -f, \tag{228}$$

wobei f positiv ist und in dem betrachteten Gebiet unserer Annahme gemäß als konstant sein muß. Aus (228) folgt als Integralgesetz für die Variation von $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(R^2 - r^2). \tag{229}$$

R^2 ist die Integrationskonstante, die einen positiven Wert haben muß, also das Quadrat einer reellen Größe R darstellt, weil ja $\mathfrak{v}$ positiv sein muß. R kann als Radius einer gewissen Kugel angesehen werden, und zwar giebt R denjenigen Abstand vom Erdmittelpunkt an, in welchem $\mathfrak{v}$ nach (229) gleich 0 wird. Die Kugelfläche (R) begrenzt also nach außen hin das Gebiet, in welchem höchstens das Gesetz (229) als gültig angesehen werden darf. Nach innen hin ist eine Grenze nicht vorgeschrieben; für den Erdmittelpunkt würde (229) ergeben:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 = \frac{f}{2}R^2. \tag{229 a}$$

Fragen wir also unabhängig von der Anwendung auf die wirkliche Erde nach dem ganzen Bereich der Anwendbarkeit von (229), so ergiebt sich das Innere der Kugelfläche (R). (228) und (229) kombiniert liefern:

$$\frac{1}{\mathfrak{v}}\left|\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\right| = \frac{2r}{R^2 - r^2}, \tag{230}$$

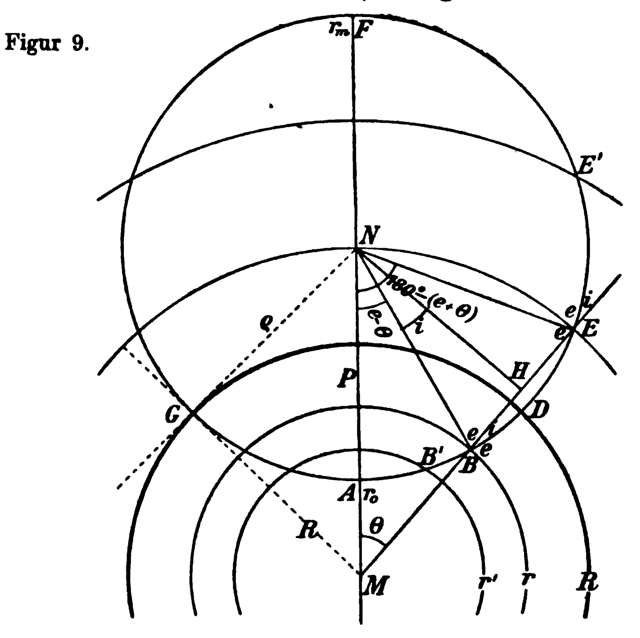
daher ist wegen (216):

$$\sin i = \cos e = \frac{R^2 - r^2}{2r\varrho}. \tag{231}$$

Für jeden Strahl in unserem Gebiet ist der Krümmungsradius ϱ konstant; die Formel (231) zeigt also, wie auf einem solchen Strahl der Neigungswinkel i, bezüglich der Emergenzwinkel e mit dem Abstand r vom Erdmittelpunkt variiert. Für $r = R$ wird $i = 0$. Die Strahlen treffen also die Kugelfläche (R) senkrecht. Die Bahnebene eines jeden Strahles geht durch den Erdmittelpunkt. In einer jeden Bahnebene muß hiernach der Kreis (R) den Bahnkreis des Strahles senkrecht schneiden. Es kann dieses so zu einem Satz formuliert werden: In jeder Ebene durch den Erdmittelpunkt bildet der Kreis (R) den gemeinsamen Orthogonalkreis für die Bahnkurven aller Strahlen.

In Figur 9 sei einer der Strahlkreise dargestellt. Für uns kommt dabei nur das innerhalb (R) liegende Stück GAD in Be-

Figur 9.



tracht. Bei unseren Anwendungen müssen mir die geometrischen Ausmessungen des Strahlkreises feststellen, wenn für irgend einen Punkt des Strahles der Abstand r vom Erdmittelpunkt und der Richtungswinkel i gegeben sind. Wir wenden uns dieser Aufgabe zu, indem wir den Punkt B in der Figur 9 herausgreifen, also $MB = r$ setzen. Nach der Figur ist:

$$(232)\quad \begin{cases} MA \times MF = MB \times ME = R^2; \\ MH = \dfrac{ME+MB}{2} = \dfrac{\frac{R^2}{r}+r}{2} = \dfrac{R^2+r^2}{2r}; \\ BH = \dfrac{ME-MB}{2} = \dfrac{\frac{R^2}{r}-r}{2} = \dfrac{R^2-r^2}{2r}; \\ \operatorname{ctg} i = \dfrac{NH}{BH}; \quad \operatorname{ctg}\theta = \dfrac{MH}{NH}; \end{cases}$$

also:

$$(233)\qquad \operatorname{ctg} i \operatorname{ctg}\theta = \operatorname{tg} e \operatorname{ctg}\theta = C,$$

wenn

$$(234)\qquad C = \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}.$$

$e = 90^\circ - i$ bedeutet hier wieder den „Emergenzwinkel". C wird weiterhin die „Kontangentenkonstante" für das Niveau (r) genannt werden. Wir sehen, daß sie hier einen positiven Wert größer als 1 hat. — (233) ergiebt den Zusammenhang zwischen i und θ. Zur Berechnung des Abstandes P des Krümmungsmittelpunktes des Strahles, seines Krümmungsradius ϱ und seines klein- und größten Abstandes r_0 und r_m vom Erdmittelpunkt, sowie R^2 ergeben die Dreiecke MBN MGN die Formeln:

$$(235)\quad \begin{cases} P:\varrho:r = \sin e : \sin\theta : \sin(e-\theta) \\ P = \dfrac{r\sin e}{\sin(e-\theta)}, \quad \varrho = \dfrac{r \sin\theta}{\sin(e-\theta)}; \end{cases}$$

$$(236)\qquad r_0 = P-\varrho, \quad r_m = P+\varrho, \quad P^2-\varrho^2 = R^2.$$

Die Kotangentenkonstante C (234) variiert mit dem Niveau (r), sie variiert also auch auf jedem Strahl. Es ist für uns wichtig zu beachten, in welcher Weise dieses geschieht. Es ist nach (234)

$$(237)\qquad C-1 = \frac{2r^2}{R^2-r^2};$$

verbindet man hiermit (231), so folgt auch

$$C - 1 = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{r}{\sin i}. \tag{238}$$

Sind also zu zwei Punkten eines und desselben Strahles, r, i, C, r', i', C' die zugehörigen Werte, so ist:

$$C - 1 : C' - 1 = \frac{r}{\sin i} : \frac{r'}{\sin i'}. \tag{239}$$

Bezieht sich $C' = C_0$ speziell auf das Niveau des tiefsten Punktes des Strahles, ist also $r' = r_0$, so ist $i' = 90^\circ$, $\sin i' = 1$, und wir erhalten:

$$C_0 - 1 = (C - 1)\left(\frac{r_0}{r} \sin i\right). \tag{240}$$

Wegen der Gleichung des Strahles:

$$\frac{r \sin i}{\mathfrak{v}} = c \tag{241}$$

ist auch nach (238) auf einem jeden Strahl:

$$\frac{1}{C - 1} = \varrho c \cdot \frac{\mathfrak{v}}{r^2}, \tag{242}$$

wobei ϱc eine zum Strahl gehörige Konstante bedeutet. Es ist also auch:

$$C' - 1 : C - 1 = \frac{r'^2}{\mathfrak{v}'} : \frac{r^2}{\mathfrak{v}}. \tag{243}$$

b) $\mathfrak{v}$ **nimmt zu, wenn** r **wächst:** $\partial \mathfrak{v}/\partial r$ **positiv.** Hier ist nach unserer Annahme für das betrachtete Gebiet

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} = +f, \tag{244}$$

wobei f wiederum konstant und positiv ist. Als Integralgesetz folgt aus (244):

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(r^2 - R^2), \tag{245 a}$$

oder

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(r^2 + R^2), \tag{245 b}$$

je nachdem die zu r^2 tretende Integrationskonstante sich negativ oder positiv ergiebt. R soll dabei wieder als reelle positive Größe

betrachtet werden. Es sind demgemäß 2 verschiedene Fälle zu unterscheiden, charakterisiert durch die Geltung von (245 a) oder von (245 b).

Fall b). Wenn das Gesetz (245 a) gilt, werden wir wieder zu der Geometrie und den Formeln des Falles a) zurückgeführt. Hier ist aber nun das Aeußere der Kugel (R) gültig, und zwar kann sich der Geltungsbereich, wenn wir an die spezielle Anwendung auf irdische Verhältnisse nicht denken, auf den ganzen Raum außerhalb der Kugel (R) erstrecken bis ins Unendliche hinein. Die Strahlgeschwindigkeit beginnt mit dem Wort 0 auf der Kugel R und wächst mit r ins Unendliche. — Auch unsere Figur 9, Seite 78 wird wieder gültig, jedoch jetzt im Gebiet außerhalb des Kreises (R); es kommen also nur die Strahlstücke außerhalb (R) in Betracht, zum Beispiel das Stück $DEFG$. Da sich nun alles völlig analog gestaltet, genügt hier eine einfache Zusammenstellung der für die Anwendung wichtigen Formeln.

Es gilt für einen Strahl mit dem Krümmungsradius ϱ statt (231)

$$\sin i = \cos e = \frac{r^2 - R^2}{2r\varrho}. \tag{246}$$

Für θ und i folgt wiederum die Kotangentenformel

$$\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} \theta = C, \tag{247}$$

wobei

$$C = \frac{r^2 + R^2}{r^2 - R^2} \tag{248}$$

wiederum größer als 1 ist. Es hat übrigens die Kotangentenkonstante C jetzt für ein Niveau r denselben Wert wie im Falle a) für das Niveau R^2/r. —

Anstelle von (235), (236) liefern hier die Dreiecke MEN, MGN folgende Formeln:

$$\begin{cases} P : \varrho : r = \sin e : \sin\theta : \sin(e+\theta) \\ P = \dfrac{r \sin e}{\sin(e+\theta)}, \qquad \varrho = \dfrac{r \sin\theta}{\sin(e+\theta)} \end{cases} \tag{249}$$

$$r_e = P - \varrho, \quad r_m = P + \varrho, \quad P^2 - \varrho^2 = R^2. \tag{250}$$

Aus (248) folgt:

$$C + 1 = \frac{2r^2}{r^2 - R^2}, \tag{251}$$

und wir erhalten nun unter Rücksicht auf (246):

(252) $$C+1 = \frac{1}{\varrho}\frac{r}{\sin i},$$

daher für 2 Niveauflächen (r), (r'):

(253) $$C+1 : C'+1 = \frac{r}{\sin i} : \frac{r'}{\sin i'} = \frac{r^2}{\mathfrak{v}} : \frac{r'^2}{\mathfrak{v}'}.$$

Fall c). Wesentlich neue Verhältnisse bieten sich uns, wenn im betrachteten Gebiet das Gesetz (245 b):

(254) $$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(r^2 + R^2)$$

herrscht. Auf ihn bezieht sich Figur 10. Zunächst bemerken wir, daß theoretisch — wenn keine Rücksicht auf die irdischen Verhältnisse genommen wird — das Gebiet den ganzen Raum erfüllen kann, vom Mittelpunkt M bis in alle Fernen. Die Strahlkreise bekommen so in ihrer ganzen Ausdehnung eine physikalische Bedeutung: die elastischen Erregungen würden ohne Aufhören in diesen Kreisen vorwärtseilen, wenn nicht die außer Acht ge-

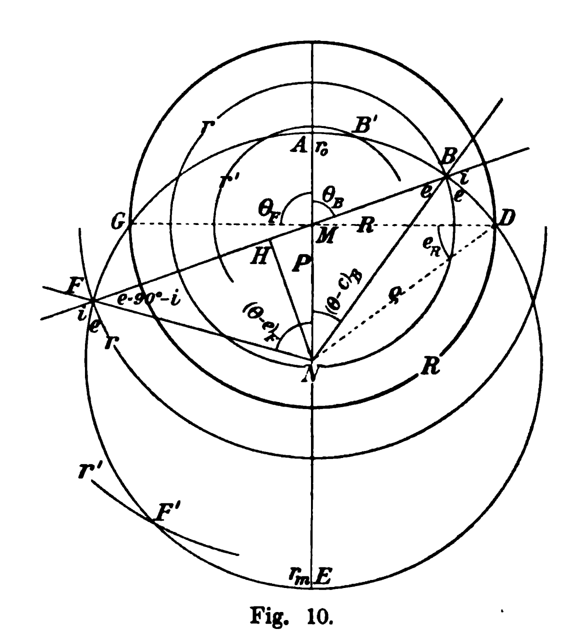


Fig. 10.

lassenen Störungen: Absorption, Erregung der zweiten Wellenart etc. eine Umwandlung, bezüglich eine Zerstörung bewirken würden.

Wenn (254) gilt, ist

$$(255)\qquad \frac{1}{\mathfrak{v}}\left|\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r}\right| = \frac{2r}{r^2+R^2};$$

also folgt für die Strahlen nach (216):

$$(256)\qquad \sin i = \cos e = \frac{r^2+R^2}{2r\varrho}.$$

Speziell für $r = R$ gilt

$$(257)\qquad \sin i_s = \cos e_s = \frac{R}{\varrho}.$$

Wie der Anblick der Figur 10 lehrt, folgt hieraus, daß der Krümmungsmittelpunkt N der Strahlkreise stets so liegt, daß NMD ein rechter Winkel wird, wenn D einen Schnittpunkt des Strahlkreises und des Kreises (R) bedeutet. Im Falle c) bilden also die Strahlen Kreise, welche den Umfang des Kreises (R) in zwei gleiche Hälften zerschneiden. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte ergiebt hiernach für (R) stets einen Durchmesser. — Während in den Fällen a) und b) der Erdmittelpunkt stets außerhalb der Strahlkreise lag, finden wir, daß er im Falle c) vom Strahlkreis umschlossen wird.

Den Winkel des Radiusvektor r gegen den Radiusvektor vom Erdmittelpunkt zum Strahlpunkt mit kleinstem Abstand vom Erdmittelpunkt wollen wir wieder mit θ bezeichnen. Es wird dann θ für Strahlpunkte innerhalb der Kugel (R) unterhalb 90^0 und für Strahlpunkte außerhalb der Kugel (R) oberhalb 90^0 liegen.

Nach unserer Figur 10 ist:

$$(258)\qquad \left\{\begin{aligned} &MA \times ME = MB \times MF = R^2,\\ &MH = \frac{MF-MB}{2} = \left|\frac{\frac{R^2}{r}-r}{2}\right| = \left|\frac{R^2-r^2}{2r}\right|,\\ &BH = FH = \frac{MF+MB}{2} = \frac{\frac{R^2}{r}+r}{2} = \frac{R^2+r^2}{2r},\\ &\operatorname{ctg} i = \frac{NH}{FH}, \quad \operatorname{ctg}\theta = \pm\frac{MH}{NH}, \end{aligned}\right.$$

wobei für B das obere, für F das untere Zeichen gilt. Allgemein, für jeden Punkt der Strahlkreise ist:

$$(259)\qquad \operatorname{ctg} i \operatorname{ctg}\theta = \operatorname{tg} e \operatorname{ctg}\theta = C,$$

(260) $$C = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}.$$

Die Kotangentenkonstante C ist hiernach für das Gebiet innerhalb der Kugel (R), das heißt für $r < R$, positiv und für das Gebiet außerhalb der Kugel (R), das heißt für $r > R$ negativ. Immer ist C ein echter Bruch, auf der Kugel (R) selbst wird $C = 0$.

Zur Bestimmung der Größe und der Lage des Strahlkreises gegenüber dem Erdmittelpunkt liefern die Dreiecke BMN und FMN die Formeln:

(261) $$\begin{cases} P : \varrho : r = \sin e : \sin\theta : \sin(\theta - e) \\ P = \dfrac{r \sin e}{\sin(\theta - e)}, \quad \varrho = \dfrac{r \sin\theta}{\sin(\theta - e)} \end{cases}$$

(262) $$r_0 = \varrho - P, \quad r_m = \varrho + P.$$

Das Dreieck MND ergiebt hierzu:

(263) $$R^2 = \varrho^2 - P^2.$$

Ueber die Variation der Kontangentenkonstante C erfahren wir durch Verbindung von (260) mit (256) für den Strahl:

(264) $$1 - C = \frac{2r^2}{R^2 + r^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{r}{\sin i}.$$

Es ist für 2 Punkte desselben Strahles:

(265 a) $$1 - C : 1 - C' = \frac{r}{\sin i} : \frac{r'}{\sin i'};$$

und für 2 Niveauflächen r wird r':

(265 b) $$1 - C : 1 - C' = \frac{r^2}{\mathfrak{v}} : \frac{r'^2}{\mathfrak{v}'}.$$

Noch wollen wir bemerken, daß die Kontangentenkonstante C ihr Vorzeichen wechselt, wenn θ nicht gegen den Radiusvektor nach dem nächsten sondern gegen den Radiusvektor nach dem fernsten Punkt des Strahlkreises gemessen wird, denn dann tritt $180 - \theta$ anstelle von θ. In den Fällen a) und b) findet etwas ähnliches nicht statt, da hier der Radiusvektor nach dem nächsten Strahlpunkt auch zugleich nach dem fernsten führt.

§ 22. Uebersicht der Systeme mit konstanter Krümmung der Strahlen.

Ehe wir nun daran gehen, die im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate anzuwenden auf die Konstruktion von Strahlen

bei vorliegender Laufzeitkurve mittels der Rechnung, wird es gut sein, zunächst zu versuchen, eine Uebersicht der möglichen Fälle und ihrer gegenseitigen Beziehungen zu gewinnen.

Bei unserer Bezeichnungsweise heißt der Winkel zwischen den Verbindungslinien des Erdmittelpunktes mit einem Strahlpunkt und mit dem nächst oder fernst gelegenen Punkt des Strahlkreises θ. Die zu einem Strahlpunkt gehörigen Werte des Abstandes vom Erdmittelpunkte, des Richtungswinkels und des Emergenzwinkels nennen wir r, i, e.

Zwischen θ und i, bezüglich e besteht die Beziehung:

$$\text{(266)} \qquad \operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg} e \operatorname{ctg} \theta = C,$$

wobei C eine Konstante bedeutet, die „K o n t a n g e n t e n k o n s t a n t e“, die durch r bestimmt ist.

Den Fall der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, also der g e r a d l i n i e n S t r a h l e n können wir als ein spezielles unter den „Systemen konstanter Krümmung“ auffassen. Es ist hier die Krümmung 0 der Krümmungsradius unendlich groß. Die Verbindungslinie des Erdmittelpunktes mit dem nächsten Punkt des Strahles steht auf diesem senkrecht; in dem rechtwinkligen Dreieck: Erdmittelpunkt, Strahlpunkt (r, i, e) und nächster Punkt finden wir am Erdmittelpunkt θ, am Strahlpunkt i (vergl. Figur 11, Seite 87), also folgt:

$$\text{(267)} \qquad C = 1.$$

B e i g e r a d l i n i e n V e r l a u f d e r S t r a h l e n h a t d i e K o n t a n g e n t e n k o n s t a n t e C a u f a l l e n N i v e a u f l ä c h e n (r) d e n W e r t 1.

Indem wir nun übergehen zu den Fällen variabler Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, also gekrümmter Strahlen, soll mit der Annahme begonnen werden, daß die Variation der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nur gering ist, und demgemäß die Strahlen nur leicht gekrümmt sind. C wird dann nur wenig von 1 verschieden sein, und es werden die Strahlmittelpunkte vom Erdmittelpunkt weit ab liegen. Offenbar kann die Biegung der Strahlen in zwei verschiedenen Arten stattfinden: die Strahlen können gegen den Erdmittelpunkt hin konvex oder konkav werden. Bei k o n v e x e n S t r a h l e n liegt der Fall a) vor (Figur 9, Seite 78). Nach (229) gilt dann:

$$\text{(268)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{f}{2}(R^2 - r^2),$$

$\mathfrak{v}$ nimmt ab, wenn r wächst; es ist

$$C > 1;$$

Bei konkaven Strahlen liegt der Fall c) vor (Figur 10, Seite 82). Nach (254) gilt dann:

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(R^2 + r^2), \tag{269}$$

$\mathfrak{v}$ nimmt zu, wenn r wächst; es ist $C < 1$. R giebt im Fall (268) eine Kugel um den Erdmittelpunkt an, die von allen Strahlen senkrecht getroffen wird, im Fall (269) eine Kugel, die von jedem Strahl in zwei Punkten geschnitten wird, deren Verbindungslinie durch den Erdmittelpunkt geht. Da wir nur leichte Krümmung der Strahlen annehmen, müssen die Kugeln (R) in beiden Fällen in weiter Ferne liegen.

Nun möge die Variation der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ stärker werden; dann entfernen sich die Kontangentenkonstanten C von 1, R wird kleiner, die Krümmung der Strahlen wächst. Im Fall der gegen den Erdmittelpunkt konvexen Strahlen, wo die Strahlen die Kugel (R) senkrecht treffen, ist R zugleich die äußere Begrenzung des Strahlgebietes überhaupt, da hier die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zur unteren Grenze 0 herabgeht. Wir sehen also, wie das Strahlgebiet immer enger wird, und erkennen so, daß hier der stärker werdenden Krümmung der Strahlen ein Ziel gesteckt ist. Dieses wird erreicht, wenn die Grenze (R) herabsinkt bis zu dem äußersten Niveau (r), das dem Strahlgebiet noch angehören soll. Genauer gesprochen wird hiermit schon ein Grenzfall bezeichnet, der keine praktische Bedeutung mehr hat, denn für $r = R$ wird ja $\mathfrak{v}$ schon $= 0$. C, hier nach (234) bestimmt durch:

$$C = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}, \tag{270}$$

wird in der Grenze $+\infty$.

Im Fall der gegen den Erdmittelpunkt konkaven Strahlen, wo die Strahlen die Kugel (R) in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten schneiden, bildet (R) keine schon in den Gesetzen liegende Begrenzung des Strahlgebietes nach außen hin. In der Kugelfläche R liegen selbst Strahlkreise und zwar diejenigen mit der stärksten überhaupt möglichen Krümmung (Krümmungsradius $= R$), und zugleich diejenigen, die ihren Mittelpunkt im Erdmittelpunkt finden. Wächst die Variation von $\mathfrak{v}$, so rückt die Kugel (R) aus den weiten Fernen, wo wir sie anfänglich annahmen, heran, um schließlich in das Gebiet einzutreten, auf das sich unsere Aufmerksamkeit richtet. Dann haben wir für die Kontangentenkonstante, die hier durch

$$C = \pm\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2} \tag{271}$$

bestimmt wird, unterhalb und oberhalb von R verschiedene Vorzeichen. Das obere Vorzeichen in (271) gilt, wenn θ von dem Radiusvektor nach dem nächsten Punkt des Strahlkreises aus gemessen wird. Es ist dann C positiv für $r < R$ und negativ für $r > R$, Das untere Zeichen gilt und also die umgekehrte Verteilung der Vorzeichen von C, wenn statt des nächsten der fernste Punkt des Strahlkreises gewählt wird. In jedem Fall findet auf (R) selbst der Uebergang statt, und zwar gehört zum Niveau (R) der Wert $C = 0$. Stets liegt C zwischen -1 und $+1$.

Wächst die Variation von $\mathfrak{v}$ noch weiter, so rückt R an den Erdmittelpunkt heran und wir sehen hier wieder einen Grenzfall vor uns: er tritt ein, wenn $R = 0$ wird. Dann ergiebt (269)

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2} r^2. \tag{272}$$

Alle Strahlkreise gehen jetzt durch den Erdmittelpunkt (Figur 11).

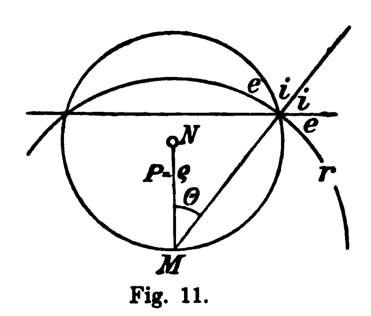


Fig. 11.

Messen wir θ gegen den Radiusvektor vom Erdmittelpunkt nach dem fernsten Punkt des Strahlkreises, so wird $e = 90^0 - i = \theta$, und also für alle Niveauflächen

$$C = 1, \tag{273}$$

wir haben hiernach hier wieder dieselben Werte der Kotangentenkonstante wie bei geradlinigen Strahlen. Die Strahlrichtung bildet aber nun gegenüber dem Radiusvektor vom Erdmittelpunkt das Spiegelbild der Richtung, welche im Falle der geradlinien Bahnen eintreten würde (Figur 11).

Die Grenze des Gültigkeitsbereiches des Gesetzes (269), also des im vorigen Paragraphen c) genannten Falles ist nunmehr erreicht. Aber zu einer Grenze für die Krümmung der Strahlen, wie wir sie vorhin fanden, als wir eine wachsende Krümmung nach außen annahmen, sind wir doch noch nicht gekommen. Denn nun, wo in (269) R^2 gleich Null geworden ist, kann man weitergehend R^2 negativ werden lassen. Dann tritt anstelle von (269):

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(r^2 - R^2), \tag{274}$$

es hebt also der Fall b) des vorigen Paragraphens an. Ein Gebiet (R) in der Umgebung des Mittelpunktes wird den Strahlen unzugänglich, an der abgrenzenden Kugelfläche (R) treffen sie

senkrecht auf und enden hier, wo ihre Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = 0$ wird. Die Kontangentenkonstante C erhält den Wert:

$$C = \frac{r^2 + R^2}{r^2 - R^2}, \tag{275}$$

sie wird größer als 1 und wächst bis $+\infty$, wenn die Grenze (R) und die betrachtete Niveaufläche (r) aneinander heranrücken. Dies giebt uns dann eine wirkliche, die definitive Grenze für die wachsende Krümmung der Strahlen.

Zurückblickend erkennen wir, daß die Fälle des vorigen Paragraphen sich so anordnen:

Größtmögliche Krümmung der Strahlen nach außen, $\mathfrak{v}$ wächst mit r, Strahlgebiet hat außen eine natürliche Grenze, Erdmittelpunkt liegt außerhalb der Strahlkreise, Fall a), $C > 1$, Figur 9.

Strahlen geradlinig, Strahlgebiet unbegrenzt, $\mathfrak{v}$ konstant, $C = 1$.

Strahlen nach innen gekrümmt, $\mathfrak{v}$ wächst, wenn r abnimmt, Strahlgebiet unbegrenzt, Strahlen umschließen den Erdmittelpunkt, Fall c), Figur 10. $-1 < C < +1$. Der Wert $C = 0$ zeigt sich auf einem Niveau (R), in dem die Strahlen Kreise um den Erdmittelpunkt als Zentrum beschreiben; je nach der Auffassung des Winkels θ erhält C einen positiven oder negativen Wert.

Größtmögliche Krümmung der Strahlen nach innen, $\mathfrak{v}$ wächst, wenn r abnimmt, Strahlgebiet hat innen eine natürliche Grenze, Erdmittelpunkt liegt außerhalb der Strahlkreise, Fall b), Figur 9, $C > 1$.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß es zu jedem Wert von C, der von Null verschieden ist, 2 verschiedene Fälle giebt, einen mit $R > r$ und einen mit $r < R$. Solange C dem absoluten Wert nach unterhalb 1 liegt, gehören beide Fälle der Klasse c), (Figur 10) an. Für $C = 1$ ist der eine Fall der der geradlinien Strahlen, der andere Fall wird durch (272) dargestellt und bildet die Grenze zwischen c) und b). Für $C > 1$ gehört der eine Fall zu b) und der andere zu a), wobei beide der Figur 9 zugehören.

§ 23. Konstruktion von Strahlen mittels der Rechnung.

Nach diesen Vorbereitungen und unter Hinweis auf die in § 20 dargelegte Methode der Konstruktion von Strahlen mittels der Zeichnung ist es nun sehr leicht, darzulegen, wie die Konstruktion der Strahlen sich gestalten wird, wenn man Zirkel und Linial durch die Rechnung ersetzt.

Wir denken uns die Erde in kugelförmige Schichten zerteilt, innerhalb derer wir die Krümmung der Strahlen als konstant betrachten. Je enger die Schichten gewählt werden, um so genauer wird sich die Konstruktion der Wirklichkeit anschließen. In jeder der Schichten wird eine der im § 21 a), b), c) genannten Fälle gelten. Alle Fälle können auftreten, in Schichten sehr starker Aenderung der elastischen Eigenschaften der Erde auch die ganz extremen. In der Tat schien es mir anfänglich, daß nach Besonderheiten der Laufzeitkurve für Entfernungen $\varDelta$ in der Nachbarschaft von 6000 Kilometer im Bereich des Uebergangs vom Metallkern zum Steinmantel äußerst starke Krümmungen anzunehmen seien. Aber die Genauigkeit der Beobachtungen ist nicht groß genug, um dies sicher zu stellen. Man ist gezwungen, in der Laufzeitkurve Beobachtungen über größere Strecken auszugleichen, und dies hat zur Folge, daß auch die etwa vorhandenen stärkeren Krümmungen der Strahlen im Innern der Erde ausgeglichen werden. Es zeigte sich in den Rechnungen, die ich mit Dr. Zoeppritz gemeinsam ausführte, und deren Resultate weiter unten mitgeteilt werden, daß es zur Darstellung der bisherigen Beobachtungen schon genügt, die Erde in zwei Kugelschalen und einen Kern zu zerteilen. Dies ist natürlich ein großer Vorteil für den Rechner, der sehr einfache Verhältnisse vorfindet; es steht aber nichts im Wege, die Rechnung nach der hier zu entwickelnden Methode auch unter der Annahme sehr viel verwickelterer Verhältnisse durchzuführen.

Die Konstruktion durch die Rechnung schließt sich genau an die Konstruktion durch die Zeichnung an, welche in § 17 auseinander gesetzt wurde; die Strahlen werden von der Oberfläche aus durch eine Schicht nach der anderen in die Tiefe verfolgt. Wir können uns daher wieder auf die Figuren 7 und 8, Seite 73 u. 75 beziehen, wollen aber 8 bevorzugen. Wir denken uns also alle Strahlen so gedreht, daß die Stelle, wo sie quer zum Erdradius verlaufen (wo $i = 90^0$, $e = 0$ ist), auf einem bestimmten Radius der Erde zu liegen kommt. Dieser nur in der Rechnung ausgezeichnete Radius soll „Anfangsradius" heißen. In der Figur 12 auf der nächsten Seite, die für das Folgende maßgebend ist, wird er durch MA vorgestellt. Der Winkel, den der Radiusvektor vom Erdmittelpunkt nach irgend einem Punkt eines Strahles mit dem Anfangsradius bildet, wird ω genannt werden. $\bar{\omega}$ ist dann der Wert von ω für ein an der Erdoberfläche liegendes Ende eines Strahles;

$2\bar{\omega}$ stellt den ganzen Winkelbereich dar, den der Strahl vom Herabgehen ins Erdinnere bis zum Wiederauftauchen beschreibt,

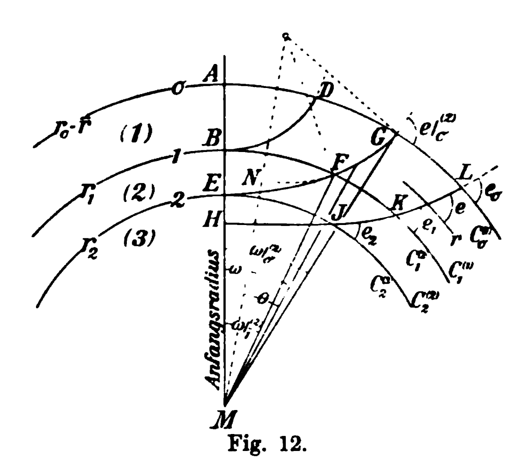


Fig. 12.

ist also in den praktischen Anwendungen der Winkelabstand der Beobachtungsstation vom Herd, der in den Figuren 4 und 5 Seite 62 und 64 sich als $\bar{\vartheta}$ darstellte:

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\vartheta}}{2} = \frac{\varDelta}{2\bar{r}}; \tag{276}$$

werden die Winkel nach Grad, die Entfernungen nach Kilometer gemessen, so ist:

$$\bar{\omega}^0 = \frac{\bar{\vartheta}^0}{2} = \frac{\varDelta}{20000} 180^0. \tag{277}$$

θ wird wie bisher benutzt werden, um für einen einzelnen Strahlkreis den Winkel zwischen dem Radiusvektor vom Erdmittelpunkt nach dem ins Auge gefaßten Strahlpunkt und dem Radiusvektor nach dem nächsten oder fernsten fernsten Punkt des Strahlkreises zu kennzeichnen. Als „Strahlkreis" ist hier jedesmal der Vollkreis anzusehen, den man durch Vervollständigung eines einzelnen der kreisbogenförmigen Stücke eines Strahles enthält. Der „Strahlkreis" wird also jedesmal nur zu einem kleinen Stück als wirkliche Bahn des Strahles angesehen werden.

Die Schichten sollen von außen nach innen der Reihe nach mit (1), (2), (3), ..., die Grenzflächen mit 0, 1, 2, 3, ..., die zugehörigen Radien mit r_0, r_1, r_2, r_3, ... bezeichnet werden. 0 bezieht sich auf die Erdoberfläche selbst, es ist also $r_0 = \bar{r}$.

Ein Strahl, welcher wie der bei D endende ganz in der Schicht (1) verläuft, bildet einen einheitlichen Kreisbogen. Die tiefste Stelle B liegt auf MA selbst; er ist also hier durchweg $\theta = \omega$. Ein Strahl, welcher, wie der bei G endende, in die zweite Schicht eindringt, diese aber unten nicht überschreitet, besteht in seiner rechts von MA liegenden Hälfte — die wir allein beachten — aus 2 Kreisbogen EF und FG. Nur für EF ist jetzt $\theta = \omega$. Für FG wird der vom Erdmittelpunkt nächste Punkt N des Strahlkreises nicht mehr auf MA liegen; so ist denn für dieses Stück θ nicht mehr von MA, sondern von MN ab zu rechnen, und es wird θ hier kleiner als ω. Die Strahlhälfte $HJKL$ besteht aus drei Kreisbogen HJ, JK, KL, und nur für HJ wird $\theta = \omega$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun an die Strahlberechnungen gehen. Es soll dabei die Rechnung zunächst für die Schicht (1) durchgeführt werden. Ihre äußere Grenzfläche ist die Erdoberfläche selbst. Hier ist die Laufzeitkurve als ein Resultat der Beobachtungen gegeben, und aus ihr entnehmen wir, wie in § 18 dargelegt, zu jeder vorgegebenen Entfernunr Δ, bezüglich $\omega_0 = \bar{\omega} = \vartheta/2$ den Richtungswinkel $i_0 = \bar{i}$ des Strahles an der Oberfläche.

Bestimmung der Kotangentenkonstanten für die beiden Grenzen der ersten Schicht; Bestimmung der unteren Grenze r_1 dieser Schicht. Für eine Reihe von Entfernungen ω_0 wird das Produkt

$$\operatorname{ctg} i_0 \operatorname{ctg} \omega_0$$

gebildet; wäre die Erde so gebaut, daß die Strahlen im ganzen Innern einheitliche Kreise darstellen, so müßte das Kotangentenprodukt sich für alle Entfernungen gleich groß ergeben. Die Erfahrung lehrt, daß dies nicht zutrifft; das Produkt nimmt vielmehr mit wachsender Entfernung Δ ab. Es zeigt sich aber, daß die Variation noch in Entfernungen von 3000—4000 Kilometer entsprechend $\bar{\omega}$ von 15°—20° nicht deutlich hervortritt. So wählen wir denn den Verhältnissen angemessen — es wird das sogleich noch näher zu besprechen sein — eine Entfernung aus, bis zu der das Kotangentenprodukt für die Rechnung als genau konstant angesehen wird, $\omega_0^{(1)}$ sei diese Entfernung, $C_0^{(1)}$ der konstante Wert der Kotangentenprodukte. Dann ist auch festgestellt, daß bis zu $\omega|_0^{(1)}$ alle Strahlen als einheitliche Kreisbogen angesehen werden sollen. Der letzte dieser Strahlen endet in $\omega|_0^{(1)}$ selbst, er bestimmt folglich mit seiner tiefsten auf MA gelegenen Stelle B gerade die Grenze der ersten Schicht. — Der obere Index in $C_0^{(1)}$

und $\omega|_0^{(1)}$ deutet auf die Zugehörigkeit zur ersten Schicht, der untere auf die Grenzfläche 0 hin; der vertikale Strich | neben ω erinnert daran, daß es sich um einen Grenzstrahl handelt.

Die Erfahrung lehrt, daß $C_0^{(1)} > 1$; da überdies die Wellen an der Oberfläche vom Herd in die Ferne und nicht umgekehrt laufen, folgt, daß Fall a) vorliegt, wie das in der Figur 12 angedeutet ist. $i|_0^{(1)}$, $e|_0^{(1)} = 90^0 - i|_0^{(1)}$ seien die Werte des Richtungswinkels i und des Emergenzwinkels e an der Erdoberfläche (r_0) für den ersten zu $\omega|_0^{(1)}$ gehörigen Grenzstrahl. Dann ergeben uns (235), (236) die Formeln

$$(278)\quad \begin{cases} P|^{(1)} = \dfrac{r_0 \sin e|_0^{(1)}}{\sin(e|_0^{(1)} - \omega|_0^{(1)})}, \quad \varrho|^{(1)} = \dfrac{r_0 \sin \omega|_0^{(1)}}{\sin(e|_0^{(1)} - \omega|_0^{(1)})}; \\ r_1 = P|^{(1)} - \varrho|^{(1)} \end{cases}$$

zur Berechnung des Abstandes $MB = r_1$, also der unteren Grenze der Schicht (1). Ferner erlaubt (240) mittels

$$(279)\quad C_1^{(1)} - 1 = (C_0^{(1)} - 1)\frac{r_1}{r_0}\sin i|_0^{(1)}$$

auch die Bestimmung der Kotangentenkonstante $C_1^{(1)}$, die für das untere Grenzniveau r_1 der ersten Schicht gilt. Gleich hier mag noch besonders hervorgehoben werden, daß $C_1^{(1)}$ nicht etwa auch die Kotangentenkonstante für das Niveau (r_1) bedeutet, sofern es obere Grenze der Schicht (2) ist, denn in der Grenze r_1 ist ja für die hier zusammenstoßenden Strahlenstücke nur i bezüglich e gemeinsam, während θ verschiedene Werte haben wird.

Berechnung des Schnittes der Strahlen in der unteren Grenze der ersten Schicht. Betrachten wir irgend einen Strahl, der durch die Schicht (1) hindurchgeht. An der oberen Grenze der Schicht, also an der Erdoberfläche, mögen die Werte ω_0, i_0, $\theta_0^{(1)}$ gelten, an der unteren Grenze — also für $r = r_1$ — die Werte ω_1, i_1, $\theta_1^{(1)}$. Die Winkel ω_0 und ω_1 werden gegen MA gemessen, die Winkel $\theta_0^{(1)}$ und $\theta_1^{(1)}$ gegen den Radiusvektor nach dem nächsten Punkt des Strahlkreises von dem unser Strahlenstück einen Teil bildet. ω_0 und $\theta_0^{(1)}$, ω_1 und $\theta_1^{(1)}$ sind also verschieden, es ist aber doch

$$(280)\quad \omega_0 - \omega_1 = \theta_0^{(1)} - \theta_1^{(1)}.$$

Diese Formel werden wir benutzen um ω_1 und damit den Schnittpunkt des Strahles auf den Grenzkreis r_1 festzulegen. Nach (218) gilt:

$$(281)\quad \sin i_1 = \sin i_0 \cdot \frac{1}{\sin i|_0^{(1)}},$$

wobei $i|_0^{(1)}$ wie vorhin den Richtungswinkel des Grenzstrahles an der Erdoberfläche bezeichnet, der in (r_1) seine größte Tiefe erreicht, für den also hier $\sin i|_1^{(1)} = 1$ ist. $\theta_0^{(1)}$ und $\theta_1^{(1)}$ ergeben sich nun mittels

$$(282) \qquad \operatorname{ctg} i_0 \operatorname{ctg} \theta_0^{(1)} = C_0^{(1)}, \quad \operatorname{ctg} i_1 \operatorname{ctg} \theta_1^{(1)} = C_1^{(1)};$$

und (280) bestimmt dann ω_1.

Uebergang zu größerer Tiefe. Als Enderfolg dieser Rechnung finden wir für einen einzelnen Strahl, von dem an der Erdoberfläche die Werte ω_0, i_0 von ω und i bekannt waren, die Werte ω_1, i_1 von ω und i auf der Fläche r_1. Nun wird die Sachlage die sein, daß von vorn herein als Grundlage für die Rechnung für ein ganzes System von Entfernungen auf der Erdoberfläche, etwa für $\Delta = 1000$, $= 2000$, $= 3000$, und so weiter, Kilometer, die Werte von i bestimmt worden sind. So wird denn auch die hier für einen Strahl skizzirte Rechnung sogleich in systematischer Weise für alle diejenigen zu den ausgewählten Entfernungen Δ gehörigen Strahlen durchgeführt werden, die jenseits des ersten Grenzstrahles $\omega_0^{(1)}$ liegen, und darum die Schicht (1) durchdringen. Die Gesammtrechnung liefert für die Grenzfläche (1) ein System von Werten i_1, $e_1 = 90° - i_1$, ω_1 als zugehörig zu durchlaufenden Strahlen. Für die Fläche (1) sind so die gleichen grundlegenden Daten geschaffen worden, wie sie vorhin die an die Erdoberfläche (0) sich anknüpfende Rechnung ermöglichten. Man wird also nun in gleicher Weise weiter in die Tiefe gehen können: dazu wird man die Produkte $\operatorname{ctg} i_1 \operatorname{ctg} \omega_1$ bilden, und einen Grenzwert $\omega|_1^{(2)}$ für ω rechnen, bis zu dem von der Variation für die Rechnung abgesehen und ein konstanter Wert $C_1^{(2)}$ angenommen wird; der in $\omega|_1^{(2)}$ mit $i|_1^{(2)}$, $e|_1^{(2)}$ einsetzende zweite Grenzstrahl liefert mittels der Formeln

$$(283) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P|^{(2)} = \dfrac{r_1 \sin e|_1^{(2)}}{\sin(e|_1^{(2)} - \omega|_1^{(2)})}, \quad \varrho|^{(2)} = \dfrac{r_1 \sin \omega|_1^{(2)}}{\sin(e|_1^{(2)} - \omega|_1^{(2)})}, \\ \qquad\qquad r_2 = P|^{(2)} - \varrho|^{(2)} \end{array} \right.$$

in seinen tiefsten Punkt die Grenze (r_2) für die zweite Schicht. Mittels

$$(284) \qquad C_2^{(2)} - 1 = (C_1^{(2)} - 1) \cdot \frac{r_2}{r_1} \sin i|_1^{(2)}$$

kann der Wert der Kontangentenkonstante $C_2^{(2)}$ auch in der unteren Grenze der zweiten Schicht berechnet werden. Für die durch die Grenzfläche (1) jenseits $\omega|_1^{(2)}$ hindurchgehenden Strahlen, welche

die zweite Schicht durchdringen, sind mittels

$$\text{(285)} \qquad \sin i_2 = \sin i_1 \frac{1}{\sin i|_1^{(2)}} = \sin i_0 \frac{1}{\sin i|_0^{(2)}},$$

$$\text{(286)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg} i_1 \operatorname{ctg} \theta_1^{(2)} = C_1^{(2)}, \quad \operatorname{ctg} i_2 \operatorname{ctg} \theta_2^{(2)} = C_2^{(2)}, \\ \qquad \omega_1 - \omega_2 = \theta_1^{(2)} - \theta_2^{(2)}, \end{array} \right.$$

die Abstände ω_2 der Schnittpunkte und die Richtungswinkel i_2 auf der Grenzfläche (2) zu berechnen. i_0 und $i|_0^{(2)}$ sind hier die Werte von i für den gerade betrachteten Strahl und für den zweiten Grenzstrahl in der Erdoberfläche (0) selbst.

So ist das Niveau r_2 erreicht worden. Man wird neue Schichten hinzunehmend tiefer und tiefer gehen, bis eine Variation der Kotangentenkonstante nicht mehr bemerkt werden kann, und es daher genügt, für das weitere Innere der Erde die Annahme zu machen, alle Strahlen seien hier im ganzen Verlauf einheitlich geradlinig oder kreisförmig.

Für die Rechnungen, die Herr Dr. Zoeppritz und ich durchführten, und deren Resultate weiterhin mitgeteilt werden, hat sich gezeigt, daß den bisher vorliegenden Beobachtungen schon durch die Annahme zweier Schichten und eines Kernes mit geradlinigen Strahlen genügt werden kann [1]).

§ 24. Einzelheiten der Rechnung.

Einige für die Ausführung der Rechnung wichtige Bemerkungen sind hier noch anzuschließen.

Auswahl der Kotangentenkonstanten. Wir sahen, daß der Rechnung nicht direkt die Beobachtungen über Laufzeiten, sondern die durch Differentiation aus der Laufzeitkurve gewonnenen Werte der Richtungswinkel i, bezüglich der Energenzwinkel $e = 90^\circ - i$ zugrunde gelegt werden. Nun tut man den Beobachtungen durch abteilungsweises Konstantsetzen der Kotangentenkonstanten einen Zwang an, man verändert also die zunächst an-

---

1) Anmerkung bei der Drucklegung. Dies ist jetzt, ein halb Jahr nach der Vorlage der Arbeit zu modifizieren. Durch Kombination von Beobachtungen der geophysikalischen Station auf Samoa über einige starke Erdbeben in Nachbargebieten mit europäischen Registrierungen, ist es nämlich möglich geworden, mit Sicherheit Erdbebenstrahlen noch in die Tiefe von etwa 3000 Kilometer Abstand vom Erdmittelpunkt zu verfolgen. Dabei zeigte sich, daß in dem Kern die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nicht konstant gesetzt werden darf, sondern daß sie nach innen zu abnimmt, sodaß hier Fall c) oder b) vorliegt. Darüber habe ich der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften am 20. Juli d. J. eine Vorlage gemacht, deren Veröffentlichung demnächst bevorsteht.

genommenen Laufzeiten. Es ist unter diesen Umständen sehr wichtig, bei der Wahl der Kotangentenkonstanten und der Grenzen für die Abteilungen den Zwang möglichst klein zu machen. Dabei kann das Folgende als Richtschnur dienen, zu dessen Illustrierung ich auf Tafel III am Ende der Arbeit hinweise. Auf der linken Seite der Tafel III ist in einem rechtwinkligen System von Koordinaten als Abscisse der Abstand vom Herd

$$\Delta = \bar{r}\vartheta = 2\bar{r}\omega \tag{287}$$

und als Ordinate

$$\sin i = \frac{\bar{\mathfrak{v}}}{\mathfrak{V}} \tag{288}$$

eingetragen. $\bar{\mathfrak{v}}$ bedeutet wieder die Raumgeschwindigkeit der Wellen in der Nähe der Erdoberfläche, $\mathfrak{V}$ die Geschwindigkeit, mit der die Wellen sich vom Herd über die Oberfläche der Erde ausbreiten. Es gelten dann die Beziehungen:

$$d\Delta = \mathfrak{V}\,dT, \quad dT = \frac{1}{\mathfrak{V}}\,d\Delta, \tag{289}$$

wenn T die Laufzeit vom Herd bis zur Entfernung Δ bezeichnet, und es folgt:

$$T = \frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}}\int_0^\Delta \frac{\bar{\mathfrak{v}}}{\mathfrak{V}}\,d\Delta = \frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}}\int_0^\Delta \sin i\,d\Delta. \tag{290}$$

In unserer graphischen Darstellung auf Tafel III ist hiernach die von den Abscissenaxe und der Kurve abgegrenzte Fläche zwischen der Anfangsordinate und der zur Entfernung Δ gehörigen Ordinate proportional mit der Laufzeit T. Wenn man also die Kurve deformiert, um innerhalb eines gewissen Gebietes, wie unsere Methode verlangt, ein konstantes Kotangentenprodukt herzustellen, so muß man, um nicht die Laufzeiten für größere Entfernungen zu verändern, die Deformation so vornehmen, daß die Gesammtfläche für das Gebiet erhalten bleibt.

Für die Grenzfläche (1), wo die Kotangentenkonstante $C_1^{(2)}$ für das Niveau (1) der Schicht (2) festzustellen ist, könnte man ganz ähnlich vorgehen, indem man die ω_1 und $\sin i_1$ in einer Kurve darstellt. Es ist aber bequemer bei der Oberfläche der Erde zu bleiben, also unmittelbar die frühere Figur zu benutzen. Um zu erkennen, wie das möglich ist, wollen wir uns des Verlaufes der Konstruktion erinnern. Für eine Reihe von Stellen ω_0 an der Oberfläche wurden der Laufzeitkurve die Werte i_0 entnommen. Die Rechnung ergab dann die Werte ω_1 i_1 auf der Fläche (1) für

die zugehörigen Strahlen. Man bildete die Produkte ctg i_1 ctg ω und wählte einen Wert $C_1^{(2)}$ aus, der dann bis zu einer gewissen Entfernung $\omega_1^{(2)}$ gelten sollte. Aber wenn nun der Wert $C_1^{(2)}$ angenommen ist, können die Wertpaare i_1, ω_1, wie sie aus den Beobachtungen berechnet wurden, nicht mehr als im Strahlsystem genau zusammenhörig angesehen werden, denn sie werden ja der Annahme über $C_1^{(2)}$ nicht genau entsprechen. Soll die Zugehörigkeit zum System hergestellt werden, so sind Korrekturen nötig. Man könnte daran denken ω_1 festzuhalten und i_1 zu korrigieren, was zu einer Korrektur auch von i_0 führen würde· Aber dieses Vorgehen würde unnötige Rechenarbeit verursachen. Vielmehr empfiehlt es sich i_1 festzuhalten und ω_1; also Δ, so zu korrigieren, daß der vorgeschriebene Wert für $C_1^{(2)}$ erreicht wird. Die Korrektur von ω_1 nämlich überträgt sich wie leicht ersichtlich ganz direkt in gleicher Größe auf ω_0 an der Erdoberfläche, während i_0 unberüht bleibt, denn eine Aenderung von ω_1 heißt ja nur eine Drehung des Strahlstückes in des Schicht (1) um den Erdmittelpunkt. So erhält man also in der sin i-Kurve für die Oberfläche die neuen Kurvenpunkte, indem man die früheren, direkt der Laufzeitkurve entnommenen Punkte parallel der Abscissenaxe auf der Winkelteilung um den Betrag der Korrektur von w_1 verschiebt. Diese neuen Punkte, durch welche die sin i-Kurve der Rechnung scharf hindurch gehen soll, müssen nun die Gesamtfläche zwischen den Abscissenwerten $w_0^{(1)}$ und $w_0^{(2)}$ der Grenzstrahlen des Gebietes (2) unverändert lassen: das ist die Bedingung, welche man bei der Wahl der Kotangenten-Konstante und ihrem Gültigkeitsbereich zu erfüllen hat. —

Für die weiteren etwa angenommenen Grenzflächen (3), (4) . . gestaltet sich alles ganz analog. —

Korrekturen der sin i-Kurven und der Laufzeitkurven.

Wenn die gesamte Strahlberechnung durchgeführt ist, so sind die Werte der Grenzradien r_1, r_2 . . und der Kotangentenkonstanten bestimmt. Es ist dann aber auch ein ganzes System von Strahlen in seinem Verlauf durch die Erde, wie er den angenommenen Werten der r_1, r_2, . . und der Kotangentenkonstanten entspricht, berechnet worden. Die Strahlen dieses Systemes sind den Wertepaaren sin i, Δ zugeordnet, die man der Rechnung zugrunde legte. Sie gehören in aller Strenge zu den direkt gegebenen Werten von sin i und den korrigierten Entfernungen Δ. Es ist also nicht etwa nötig nach Bestimmung der r_1, r_2 . . und der Kotangenten-

konstanten nun nochmals Rechnungen über den damit festgelegten Verlauf der Strahlen anzustellen; schon die von der Methode vorgeschriebenen Rechnungen ergeben den Verlauf eines ganzen Systemes von Strahlen, wie er den Rechnungsdaten entspricht.

Während man die korrigierte $\sin i, \varDelta$ Kurve ohne weiteres bei der vollen Durchführung der Rechnungen erhält, muß man zur Gewinnung der korrigierten Laufzeitkurve, das heißt, der Kurve, wie sie den schließlichen Annahmen über die $r_1, r_2, \ldots$ und den Kotangentenkonstanten entspricht, noch eine weitere Rechnung aufwenden. Und zwar ist eine mechanische Quadratur nötig, die sich unter Verwertung der Formel (290) an die $\sin i$-Kurve anschließt.

Ist die Quadratur durchgeführt, und zeichnet man die damit gewonnene Laufzeitkurve in das System $\varDelta$, T der Beobachtungen ein, so könnte es sich zeigen, daß durch Summation von kleinen Fehlern bei der Wahl der $r_1, r_2 \ldots$ und der Kotangentenkonstanten doch eine vom Anfangspunkt $\varDelta = 0$, $T = 0$ sich allmählich vergrößernde systematische Abweichung der bezeichneten Kurve veranlaßt wird. Diese Abweichung wird man dann durch eine geringe Veränderung des Wertes $\bar{\mathfrak{v}}$ beseitigen, wobei nach (290) alle Werte von T mit einem korrigierenden Faktor multipliziert werden.

Ist auch $\bar{\mathfrak{v}}$ festgelegt, so wird der Rechner daran gehen, die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in ihrer Abhängigkeit vom Radius r darzustellen. Hierzu kann zunächst das System der berechneten Strahlen unter Verwertung der „Strahlgleichung" herangezogen werden. Ist für irgend einen Strahl r der Abstand des tiefsten Punktes — wo $\sin i$ den Wert 1 hat — vom Erdmittelpunkt, $\mathfrak{v}$ der im Niveau (r) herrschende Wert der Strahlgeschwindigkeit, bezeichnet $\bar{i}$ den Richtungswinkel des Strahles an der Erdoberfläche, zu der $\bar{r}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gehören, und ist $\mathfrak{V}$ die an der Austrittsstelle herrschende Oberflächengeschwindigkeit der Wellen, so ist nach der „Strahlgleichung":

$$\mathfrak{v} = \frac{r}{\bar{r}} \frac{1}{\sin \bar{i}} \bar{\mathfrak{v}} = \frac{r}{\bar{r}} \mathfrak{V}. \tag{291}$$

Mittels dieser Formel kann $\mathfrak{v}$ in allen den von den einzelnen Strahlen erreichten Tiefen festgestellt werden.

Man kann auch die allgemeinen Formeln des § 21 benutzen. Für eine Schicht, welche dem Fall a) angehört, ist dann zum Beispiel zu setzen:

$$\mathfrak{v} = \frac{f}{2}(R^2 - r^2). \tag{292}$$

R ergibt sich entweder mittels einer der für die Schicht bekannten Kotangentenkonstanten, — denn es ist,

$$(203) \qquad c = \frac{R^2 + [illegible]}{R^2 - r^2}, \qquad R^2 = r^2 \frac{[illegible]}{[illegible]}, —$$

oder aus den Daten über die Gestalt eines Grenzstrahles, — denn es ist nach [illegible]

$$(204) \qquad R^2 = P^2 - \varrho^2.$$

f endlich wird durch den bekannten Wert von v an der oberen Grenze der Schicht bestimmt. Grenzt die Schicht an die Erdoberfläche, so ist hier $v = v_0$; handelt es sich um eine tiefere Schicht, so wäre der Wert an der oberen Grenze durch die vorhergehenden Rechnungen für die höheren Schichten, oder durch Anwendung von (201) zu gewinnen. Bei Schichten, in welchen andere Gesetze für die Variation von v angenommen werden, sind die entsprechend anders gestalteten Formeln des § 21 heranzuziehen.

Ueber die physikalische Verwertung der Rechnungsresultate wird es nach Mitteilung der tatsächlichen Zahlwerte zu sprechen sein. So werde ich darauf erst am Schluß dieser Abhandlung in Teil IV eingehen können.

§ 25. Mögliche Besonderheiten der Strahlen und der Laufzeitkurve.

Wenn die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in der Erde nach dem Erdmittelpunkt ohne jähen Wechsel in stetiger Aenderung zunehmen sollte, so würden alle Strahlen, wie in Figur 4b angenommen, ohne schroffe Aenderungen der Richtung gegen den Erdmittelpunkt konvex gekrümmt sein. Die Laufzeitkurve würde, wie in Figur 5 angenommen, einen stetigen Verlauf mit langsam wechselnder Krümmung vom Herdpunkt bis zur Ordinate des Gegenpunktes zeigen. — Vielleicht ist es in Wirklichkeit so — aber es könnte auch anders sein. Es könnte Schichten geben, wo die Geschwindigkeit der Wellen sich sehr schnell ändert, vielleicht sogar Flächen, an denen die Geschwindigkeit Sprünge zeigt. In den Schichten schneller Aenderung würden die Strahlen sich stark krümmen und so ihre Richtung schnell ändern, an den Sprungflächen müßten scharfe Knicke auftreten. Es wäre auch möglich, daß die Geschwindigkeit nach innen zu nicht überall zunimmt, sondern in mehr oder weniger ausgedehnten Regionen auch wieder abnimmt. Dann würden die Strahlen auch Teile zeigen, in denen sie gegen den Erdmittelpunkt hin konkav sind. In meiner ersten

Vorlage der Arbeit (S. XII. 07) habe ich sogar auf Grund der zeichnerischen Verwertung der Laufzeitkurve die Vermutung ausgesprochen, daß es beim Uebergang vom Steinmantel zum Metallkern eine Schicht mit schnell nach innen zu abnehmender Geschwindigkeit gäbe, auf die dann wieder ein Kern mit zunehmender Geschwindigkeit folgen sollte. Die spätere schärfere rechnerische Verwertung der Beobachtungen zeigte dann freilich, daß irgend eine bestimmte Behauptung in dieser Richtung heute noch nicht ausgesprochen werden kann, und daß der Fall der stetigen Zunahme der Geschwindigkeit vielleicht, ja wahrscheinlich zutrifft [1].

Wie dem nun auch sein mag, bei der Unsicherheit, in der wir uns des mangelhaften Beobachtungsmaterials wegen sehen, müssen wir vorläufig noch mit vielerlei Möglichkeiten rechnen. Um eine Anschauung von dem zu geben, was etwa erwartet werden kann, wird es genügen, einige Hauptfälle zu besprechen.

Besonders nahe liegt es, zu vermuten, beim Uebergang vom Steinmantel zum Metallkern, oder sonst an einer Trennungsschicht verschiedenen Materials in der Erde finde eine jähe Veränderung der Geschwindigkeit der Strahlen statt. Figur 13 zeigt den Fall

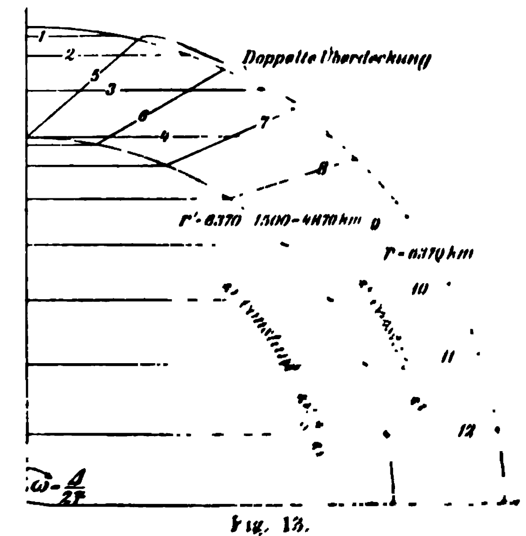


Fig. 13.

einer plötzlichen Zunahme der Geschwindigkeit nach innen zu, Figur 14 den Fall einer plötzlichen Abnahme. Der Einfachheit wegen wurde dabei angenommen, die Geschwindigkeit sei außerhalb der Unstetigkeitsfläche überhaupt konstant. Die Strahlen sind in derselben Art angeordnet wie in der Figur 8 S. 75, das

[1] Anmerkung bei der [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] zu vergleichen.

heißt, sie sind nur zur Hälfte dargestellt und so gedreht, daß ihre tiefsten Stellen auf einem und demselben Erdradius zu liegen

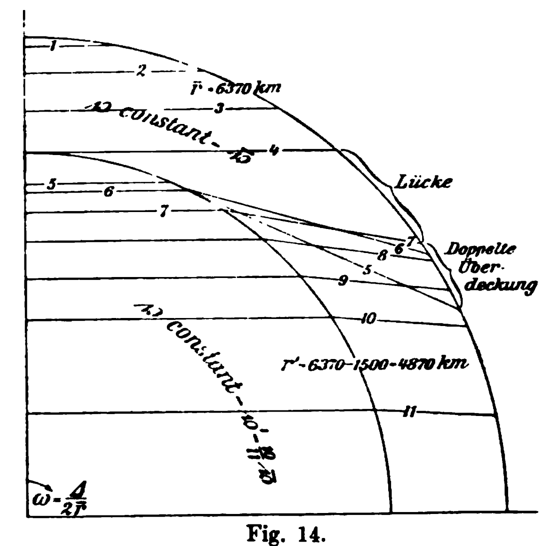


Fig. 14.

kommen. In Figur 15 sind die zugehörigen Laufzeitkurven dargestellt. Man sieht, wie bei einer plötzlichen Zunahme der Ge-

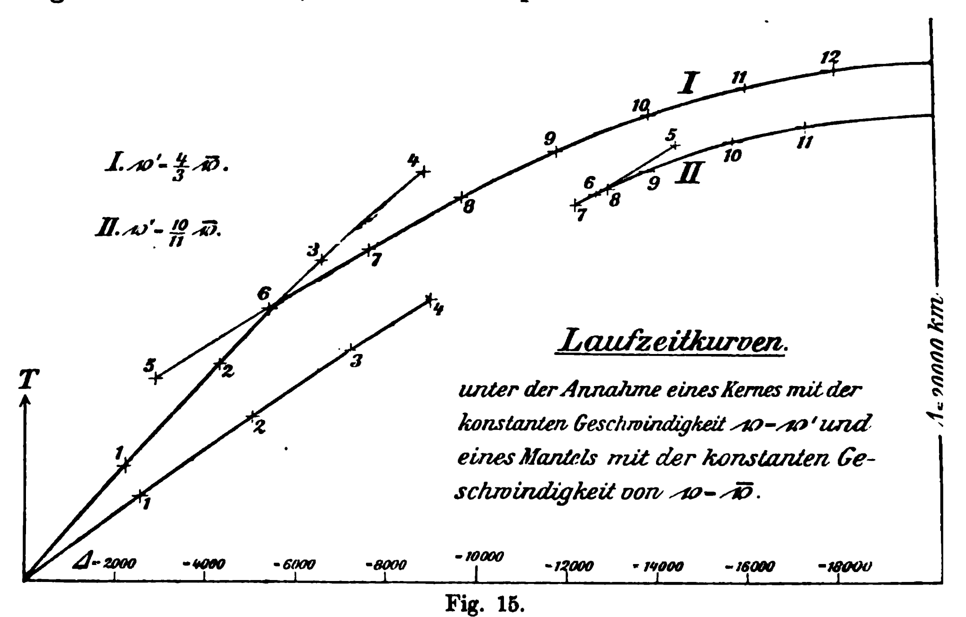


Fig. 15.

schwindigkeit nach innen zu (Figur 13, Kurve I in Figur 15) gewisse Teile der Erdoberfläche auf zwei verschiedenen Wegen von den Strahlen erreicht werden, sodaß in der Laufzeitkurve sich teilweise zwei Eintrittszeiten zeigen (von Punkt 5 bis Punkt 4 in

der Kurve I, Figur 15). Bei einer plötzlichen Abnahme der Geschwindigkeit andererseits ergibt sich für die Erdoberfläche eine Lücke, die überhaupt nicht von Strahlen erreicht wird. Der Kern wirft hier „Schatten“ (Punkt 4 bis Punkt 7 in Kurve II, Figur 15), daneben gibt es Stellen der Erdoberfläche, die auf zwei verschiedenen Wegen Wellen erhalten. — Sollte der Uebergang von einer Geschwindigkeit zur andern nicht plötzlich, sondern stetig, wenn auch ziemlich heftig, in einer Uebergangsschicht stattfinden, so würde im Falle der Zunahme der Geschwindigkeit nach innen zu, der in Figur 13 dargestellt ist, der Uebergang von dem Strahl 4 zum Strahl 5 nicht plötzlich, sondern allmählich erfolgen, in der Kurve I Figur 15 würden demgemäß Punkt 4 und 5 durch eine Kurve verbunden sein. Wir hätten dann für das singuläre Gebiet auf der Erdoberfläche nicht nur zwei, sondern sogar drei verschiedene nacheinander eintreffende Wellen. Im Falle der Abnahme der Geschwindigkeit nach innen zu hätten wir entsprechende Uebergänge: der Schatten würde mehr oder weniger aufgehellt werden, und daneben gäbe es Stellen der Erdoberfläche, die auf drei verschiedenen Wegen Strahlen erhielten. — Ist die etwa vorhandene Geschwindigkeitsveränderung nur klein und findet sie überdies nicht plötzlich, sondern in einer Uebergangsschicht statt, so wird es sehr schwierig werden, sie in den Beobachtungen zu entdecken, solange diese so unvollkommen bleiben wie bisher. Man muß dann offenbar nicht nur den ersten Einsatz einer Welle beachten, sondern zusehen, ob noch weitere folgen, man muß ferner festzustellen suchen, ob etwa Knicke in der Laufzeitkurve vorhanden sind, wie Kurve I in Figur 15 sie erkennen läßt, oder Lücken, bezüglich Partien mit geringer Intensität, wie in Kurve II.

Sollte im tiefen Innern der Erde — etwa durch Beimischung weniger rieger Metalle zum Eisen — die Geschwindigkeit stark abnehmen, oder sollte hier gar, wie Oldam in seiner auf Seite 3 zitierten neueren Arbeit annimmt, ein Kern mit geringerer Geschwindigkeit der Erdbebenwellen vorhanden sein, so würde der Durchmesser Herd—Gegenpunkt von den Strahlen überschritten werden können. — Es müßten dann in sehr bedeutsamer Weise auch Extremverstärkungen der Erdbebenwellen im Gegenpunkt zustande kommen. Um dies hervortreten zu lassen, will ich eine zwar sehr erhebliche, aber nicht plötzliche sondern allmählige Abnahme der Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in größeren Tiefen der Erde nach innen zu voraussetzen. In einem Erdquerschnitt wird sich dann der Verlauf der Erdbebenstrahlen etwa so darstellen, wie in Figur 16 schematisch angedeutet ist.

Es wurde bei dem Entwurf der Figur berücksichtigt, daß die Strahlen in den der Erdoberfläche benachbarten Teilen, wenn man von den Unregelmäßigkeiten in der Erdrinde selbst absieht, nach

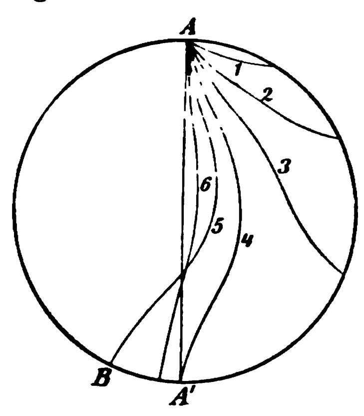


Fig. 16.

den vorliegenden Beobachtungen jedenfalls konvex gegen den Erdmittelpunkt gekrümmt sind. Eine Reihe von Strahlen ist ausgezeichnet und so nummeriert worden, daß die höhere Zahl stets einen steileren Ausgang vom Herd aus bedeutet. — Beginnen wir der Nummerierung folgend mit flach verlaufenden Strahlen, um zu immer steilerem Einfall fortzuschreiten, so finden wir zunächst Strahlen (1,2), die im ganzen Verlauf gegen den Mittelpunkt hin konvex gekrümmt sind; dann nehmen die tieferen Partien entgegengesetzte Krümmung an, und es rückt demgemäß der Endpunkt nun schneller vom Herd fort. Schließlich findet sich ein Strahl (4), der, obgleich er vom Herd aus geneigt in die Tiefe geht, doch im Gegenpunkt endet. Dann kommen Strahlen, die über den Gegenpunkt hinübergehen, einer (5) erreicht (in B) den größten Abstand; es nähert sich der Endpunkt nun wieder dem Gegenpunkt, und er rückt bei vertikalem Eintritt des Strahles in die Erde schließlich in diesen hinein. Das alles entspricht dem in Figur 14 dargestellten Fall, mit dem Unterschied nur, daß jetzt eine allmählige statt der plötzlichen Abnahme der Geschwindigkeit und eine tiefere Lage des Uebergangsgebietes angenommen wurde. Worauf ich nun hinweisen möchte, ist, daß wir in dem herausgegriffenen Erdquerschnitt einen geneigt ausgehenden Strahl fanden, der im Gegenpunkt endet. Ebenso wie dieser Strahl nämlich müssen sich alle anderen vom Herd ausgehenden Strahlen verhalten, welche aus ihm durch Drehung der Figur um den Durchmesser Herd— Gegenpunkt hervorgehen. Es vereinigt sich so im Gegenpunkt ein ganzes Strahlenbündel und diese Vereinigung muß eine Ex-

tremverstärkung der Wellen im Gegenpunkt zur Folge haben. — Daß wir eine allmählige, nicht eine sprungförmige Abnahme nach innen zu annahmen, ist hier ohne Bedeutung, vorausgesetzt nur, daß die Abnahme genügend stark ist. Die Oldam'sche Annahme eines Kernes kleiner Geschwindigkeit im tiefen Erdinnern gehört also auch hierher. Eine besondere unter den möglichen Verteilungen der Wellengeschwindigkeiten in der Erde würde bewirken, daß der Grenzpunkt B nicht über den Gegenpunkt hinaus, sondern nur in diesen hineinrückt. Dann hätten wir im Gegenpunkt einen wirklichen Brennpunkt der Strahlen im Sinne der Optik. Es ist aber hervorzuheben, daß auch schon in dem Falle der Figur 16 der Gegenpunkt durch die Vereinigung der Strahlenbündel den Charakter eines Brennpunktes erhält. — Durch Reflexion der Strahlen an der Erdoberfläche würde dann ein zweiter solcher wirklicher oder Pseudo-Brennpunkt im Herdpunkt, ein dritter wieder im Gegenpunkt, und so fort, entstehen. – Auf diese Dinge wird im nächsten Paragraphen noch einmal zurückzukommen sein.

Sollten im Innern der Erde mehrere Unstetigkeitsflächen für die Geschwindigkeit der Wellen vorkommen oder in mehreren Schichtenfolgen starke Aenderungen der Geschwindigkeit stattfinden, so werden sich im Strahlengang und in der Laufzeitkurve Singularitäten der behandelten Art häufen; ich möchte nach den bisher vorliegenden Erfahrungen die Wahrscheinlichkeit eines solchen Falles nicht als groß bezeichnen, da es mir nicht gelungen ist, irgend ein Anzeichen dafür zu finden, daß überhaupt auch nur eine einzige Singularität vorkommt. Aber freilich muß bei dem sehr wenig befriedigenden Beobachtungsmaterial eine bestimmte Behauptung heute noch durchaus vermieden werden.

§ 26. Reflexion der Wellen an der Erdoberfläche.

Nach den zuerst ankommenden Erdbebenwellen, welche den direkten Weg vom Herd zur Beobachtungsstation gegangen sind, treffen Wellen ein, die unterwegs schon einmal oder mehrfach zur Oberfläche heraufkamen und — von ihr zurückgeworfen – wieder in die Tiefe gingen. Oftmals treten die reflektierten Wellen sogar stärker hervor als die direkten. Ein Beispiel dafür wird geboten durch das Diagramm, welches auf Tafel III abgebildet ist. Verwechselungen mannigfacher Art sind daraus entstanden: die erste Reflexion der ersten Vorläufer wurde für den ersten Einsatz des Bebens oder der zweiten Vorläufer gehalten etc. Mehr als einmal

hat gerade die Komplikation infolge der Reflexionen irregeführt, wenn man versuchte eine Laufzeitkurve zu konstruieren.

Es muß überraschen, daß die Reflexionen bisher von den Seismologen nicht erkannt worden sind. Da ist zunächst zu bemerken, daß in der Tat in der Literatur vielfach Andeutungen über die Möglichkeit der Reflexion an der Erdoberfläche gefunden werden können[1]; öfters hat man versucht, durch Heranziehen der Reflexion die verschiedenen Phasen zu erklären. Besonders klar hat E. Riecke in seinem Lehrbuch der Physik schon in der 2. Auflage 1902, dann erneut in der 3. Auflage 1905 die Verhältnisse diskutiert. Er faßt sowohl den Fall der Reflexion an der Erdoberfläche als auch — im Anschluß an meine Hypothese des Metallkerns im Erdinnern — den Fall der Reflexion und Brechung an Unstetigkeitsflächen im Innern der Erde ins Auge. Bei diesem Artikel, der meinen eigenen Gedankengängen entsprach, habe ich seinerzeit mit geholfen Korrektur zu lesen. Aber obwohl so die theoretische Erkenntnis schon lange gegeben war, hat die tatsächliche Feststellung doch auf sich warten lassen. Die Erdbebendiagramme sind eben sehr kompliziert, und es gibt viele Möglichkeiten, die Unregelmäßigkeiten in ihnen zu erklären. Die Sicherheit, daß die Reflexionen an der Erdoberfläche bei dem Ablauf der Erdbebenstörungen fern vom Herd eine bedeutsame Rolle spielen, ergab sich mir erst im Herbst 1906 als die reife Frucht der

1) Anmerkung bei der Drucklegung: In einer Arbeit in der physikalischen Zeitschrift, 1907, 2. Heft, 15. Januar, Seite 51, die am 25. November 1906 eingeliefert worden ist, mir aber erst durch das gedruckte Heft der Zeitschrift nach der zweiten Vorlage der vorliegenden Abhandlung bekannt wurde, beschäftigt sich Arthur Schuster mit der Reflexion der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche. Er weist darauf hin, wie infolge der Reflexion die Bewegung der Teilchen an der Erdoberfläche nicht direkt die Richtung der heraufkommenden Wellen angiebt. Damit ist ein großer Fortschritt gegen frühere Auffassungen gekennzeichnet. Im übrigen beschränkt sich A. Schuster auf Andeutungen über Einzelheiten des Problemes, und es liegt das Wiederauftauchen der reflektierten Wellen in größeren Fernen außerhalb des Bereiches seiner Auseinandersetzungen. — Bemerken möchte ich zu dieser Arbeit noch, daß das Auftreten der Oberflächenwellen bei der Reflexion zuerst von Fr. Neumann 1837 für die Optik — die ja für Neumann Elastizitätstheorie war — dargelegt worden ist. Es scheint mir darum nicht erlaubt, bei der Reflexion von „Rayleigh"-Wellen zu sprechen; diese Bezeichnung muß meiner Meinung nach auf die in § 14 beschriebenen zusammengesetzten Wellen beschränkt bleiben. — Ferner ist bei den Ausführungen von A. Schuster zu beachten, daß die Oberflächenwellen nur bei der Reflexion der transversalen Wellen mit Schwingungen parallel der Reflexionsebene auftreten, und auch dann nur, wenn der Winkel der „Totalreflexion" überschritten wird.

seismologischen Arbeiten des geophysikalischen Institutes. Es waren die Seismogramme von Upsala (Dr. Åkerblom) und Göttingen, dann die von Essen (Oberlehrer Abt) und Göttingen verglichen wurden. Ein Vertikalseismometer ermöglichte, den Anteil der horizontalen und der vertikalen Komponente gegen einander abzuwägen. Dr. Zoeppritz, die zweiten Vorläufer untersuchend, fand, daß hier ein weiterer Einsatz noch zu dem bekannten in größeren Entfernungen fast regelmäßig hinzukommt, dessen Lage durch die Entfernung der Station vom Herd bestimmt ist. — Es erschien die auf Seite 3 zitierte Arbeit von Oldam, in der für große Entfernungen eine Unregelmäßigkeit in der Laufzeitkurve vermutet wird, und in der daran die Folgerung geknüpft wird, daß im tiefsten Innern der Erde ein Kern mit verhältnismäßig kleiner Geschwindigkeit der Erdbebenwellen vorhanden sei. Dr. Zoeppritz schloß sogleich, der von ihm gefundene weitere Einsatz in den zweiten Vorläufern sei wohl von Oldam mit dem ersten verwechselt worden. Inzwischen hatte ich die in den vorhergehenden Paragraphen beschriebene Methode ausgearbeitet, den Weg der Erdbebenstrahlen in der Erde aus den Beobachtungen über die Laufzeiten zu bestimmen, und suchte — um die Anwendung der Methode zu ermöglichen —, ein tunlichst sicheres Urteil über die Laufzeitkurve zu gewinnen. — Da war es denn nach alledem leicht, die Reflexionen in dem Gewirre der Erdbebenwellen aufzufinden, zu identifizieren. Ich veröffentlichte meine Bemerkung zunächst in der ersten Vorlage dieser Arbeit vor der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (8. Dezember 1906), dann durch die Göttinger wöchentlichen Erdbebenberichte am Ende des Dezembers 1906. — Der von Dr. Zoeppritz gefundene weitere Einsatz in den zweiten Vorläufern erwies sich als die erste Reflexion der zweiten Vorläufer.

Meine Bemühungen, auch Anzeichen für Reflexionen — oder Brechungen — an tiefer gelegenen Unstetigkeitsschichten in der Erde aufzufinden — insbesondere an der Grenze zwischen Steinmantel und Metallkern — sind bisher, wie schon erwähnt, vergeblich geblieben. Ich muß mich auch der Ansicht von Dr. Zoeppritz anschließen, daß den Oldam'schen Folgerungen nicht beigepflichtet werden kann; hier liegt wohl einer der Fälle vor, wo die Reflexionen bei der Feststellung der Laufzeitkurven für die direkten Wellen sich als störend erwiesen haben [1]).

Dem heutigen Stand der Erfahrung entsprechend wird in

1) Anmerkung bei der Drucklegung: Dabei ist indessen meine neuere Vorlage an die Gesellschaft der Wissenschaften zu vergleichen (vom 20. Juli 1907).

diesem Paragraphen nur von den Reflexionen an der Erdoberfläche selbst die Rede sein.

Ich fasse die Fortschreitungsrichtungen der Wellen ins Auge, also die rechtwinkligen Trajektorien der Wellenflächen, die nach der in § 17 festgesetzten Bezeichnungsweise „Strahlen" zu nennen sind.

Ein vom Herd A (Figur 17) ausgehender Strahl ABC, der

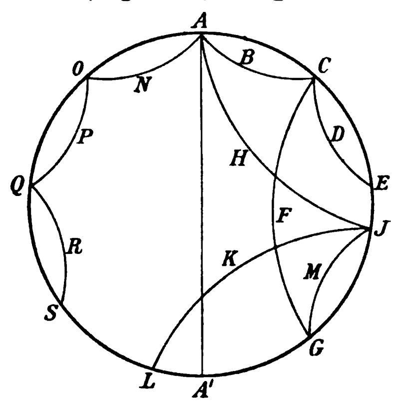


Fig. 17.

bei C wieder an die Oberfläche der Erde tritt, wird hier reflektiert. Wir haben durch das Studium der Reflexionsgesetze in den §§ 12, 13 erfahren, daß dabei neben Wellen der gleichen Art im allgemeinen auch solche der anderen Art ausgelöst werden. Ein Strahl longitudinaler Wellen wird fortgesetzt durch einen solchen CDE, der unter dem gleichen Winkel wieder in die Tiefe geht, also auch in gleicher Entfernung wieder auftaucht und durch einen Strahl transversaler Wellen CFG, der steiler hinab geht, und so in weit größerer Entfernung wieder heraufkommt. Ein Strahl transversaler Wellen mit Schwingungen parallel der Erdoberfläche, also quer zur Reflexionsebene wird nur als ein gleichartiger Strahl unter gleichem Winkel zurückgeworfen; ABC würde also nur in CDE fortgesetzt werden. Am kompliziertesten werden die Verhältnisse bei einem Strahl transversaler Wellen mit Schwingungen parallel der vertikalen Ebene, in welcher der Strahl zur Erdoberfläche heraufkommt. Bei flachem Einfall, wie im Fall ABC, wenn der Emergenzwinkel (e) unter dem Grenzwert der Totalreflexion ($\cos e = b/a$) liegt, ist uns nicht einmal bekannt, ob stets eine gleichartige Welle CDE unter gleichem Winkel zurückgeworfen wird. Vermutlich allerdings ist es so, und jedenfalls trifft es zu für sehr lange anhaltende Wellen mit Sinusschwingungen. Eine reflektierte longitudinale Welle ähnlicher Art wie die einfallende

transversale tritt dabei sicher nicht auf. Im allgemeinen gehen longitudinale Wellen viel komplizierterer Art nach allen Richtungen in die Ferne; in dem Falle lange anhaltender Wellen mit Sinusschwingungen ordnen sie sich zu „Oberflächenwellen“ ähnlicher Art, wie sie bei der Totalreflexion des Lichtes auftreten; wir finden dann „Totalreflexion“, indem die ganze Energie der einfachen Wellen von den reflektierten transversalen Wellen mitgenommen wird. Bei steilem Einfall, wie im Falle *AHJ*, wenn der Emergenzwinkel (e) über dem Grenzwert der „Totalreflexion“ liegt, giebt es wieder einfache und völlig übersehbare Verhältnisse: es werden eine transversale Welle *JKL* unter gleichem Winkel und eine longitudinale *JMG* unter einem flacheren Winkel reflektiert. Einer transversalen Welle mit der fortsetzenden longitudinalen Welle ordnet sich dabei mit genau entsprechenden geometrischen Verhältnissen ein Strahlenpaar zu, bei dem ein Strahl longitudinaler Wellen den Anfang und ein Strahl transversaler Wellen die Fortsetzung bildet. In der Figur 17 zeigen *ABCFG* und *AHJMG* zwei solche zusammengehörige Strahlenpaare. —

Eine Welle, die auf ihrem Weg einmal oder zweimal oder mehrfach reflektiert wurde, ohne ihre Art zu wechseln, beschreibt einen oder zwei oder mehrere gleiche Bogen in der Erde wie etwa *ANOPQRS* und durchläuft jeden in der gleichen Zeit. So wird denn die Laufzeit einer solchen aus n gleichen Bögen bestehenden Welle über die Strecke Δ genau n mal so groß sein, als die Laufzeit einer direkten Welle über die Strecke Δ/n. Dieser Umstand giebt die Möglichkeit, aus der Laufzeitkurve der direkten Wellen sogleich diejenigen für die reflektierten, aber dabei nicht umgewandelten Wellen abzuleiten, wie es in der Zeichnung auf Tafel I und in den zugehörigen Zahlentabellen geschehen ist. — Um ein Urteil über die Oberflächengeschwindigkeit der reflektierten Wellen zu gewinnen, wollen wir zunächst einmal den Fall einer einzigen Reflexion untersuchen. Der Strahl besteht dann aus 2 gleichen Bögen. Wir betrachten ihn unter Hinweis auf Figur 18 für 2 unendlich nahe auf einander folgende Zeitmomente der vorrückenden Welle. Der Endpunkt ist dann doppelt so weit vorgerückt (von C_1 zu C_2) wie der zugehörige Reflexionspunkt (von B_1 zu B_2). Dem Vorrücken des Endpunktes entspricht aber auch eine doppelte Größe des Zeitintervalles. Endpunkt und Reflexionspunkt rücken also gleichschnell vor. Aehnliches gilt offenbar auch bei mehrfachen Reflexionen. (Die Strecke $D_2 D_1$ ist bei dreifacher Zeitdifferenz auch dreimal so groß wie die Strecke $B_2 B_1$.) Es

besteht hiernach der folgende Satz: Die Oberflächengeschwindigkeit einer Welle, die nach beliebig vielen Reflexionen wieder zur Oberfläche kommt, ist dann gerade ebenso groß, wie beim ersten Auftauchen. — Da

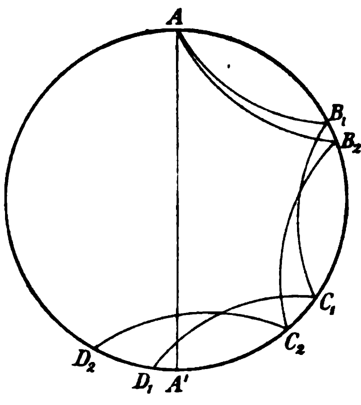


Fig. 18.

die Geschwindigkeit der direkten Wellen um so kleiner ist, je näher wir dem Herd kommen, so folgt hieraus auch, daß die Geschwindigkeit der unterwegs reflektierten Wellen kleiner ist, als die Geschwindigkeit der zum gleichen Punkt der Erdoberfläche gelangenden direkten Wellen.

Die Laufzeit der „Wechselwellen"[1]), das heißt der Wellen, die auf ihrem Weg (z. B. *ABCFG* in Figur 17 S. 520) bei der Reflexion ihre Art ändern, läßt sich ebenfalls, wenn auch nicht so einfach ableiten, wenn die Laufzeitkurven für beide Arten von Wellen vorliegen. Hier muß man die einzelnen Teile der Strahlen (z. B. *ABC* und *CFG*) zunächst richtig zusammensetzen. Dazu ist unter Benutzung der Entwicklungen von § 18 dafür zu sorgen, daß an der Knickstelle (*B*) Einfallswinkel und Reflexionswinkel dem Reflexionsgesetz:

$$\sin i_{\mathfrak{a}} : \sin i_{\mathfrak{b}} = \cos e_{\mathfrak{a}} : \cos e_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

genügen. —

Indem wir zur Abschätzung der Bedeutung der reflektierten Wellen gegenüber den direkten übergehen, wollen wir zunächst daran denken, daß die Erdbebenwellen vom Herd aus körperlich nach allen Richtungen fortgehen, daß dabei aber je nach der Art der Vorgänge am Herd die eine Richtung vor der anderen ausgezeichnet sein wird. Selbst wenn also das Erdinnere durchweg homogen wäre und gar keine Absorption stattfände, dürfte man

1) Der Ausdruck rührt von Dr. Geiger her.

doch nicht annehmen, daß die Erschütterungen an der Erdoberfläche nur einfach von dem Abstand des Beobachtungsortes vom Herd abhängen, dürfte man sie also nicht der Energie nach umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung und der Amplitude nach umgekehrt proportional mit der Entfernung annehmen. Es könnte zum Beispiel am Herd für die longitudinalen Wellen in vertikaler Richtung keine merkliche oder auch eine besonders starke Erschütterung stattfinden, dann würde in den weiter entfernten Gegenden der Erde die parallel gerichtete Bewegung im Verhältnis schwächer oder aber stärker auftreten, als in näher gelegenen Teilen der Erdoberfläche. Ebenso können auch die verschiedenen Vertikalschnitte durch den Herd sich weitgehend unterscheiden. Ueber diese schon durch die Vorgänge am Herd bewirkten Ungleichheiten — über die wir leider noch gar keine Erfahrungen besitzen — müssen sich dann die Ungleichheiten lagern, welche durch die ungleichartige Beschaffenheit der Erdrinde, durch die Ablenkung der Strahlen im Innern der Erde, durch die Absorption etc. bewirkt werden. Beschränkt man sich auf die Betrachtung einer bestimmten Komponente der Erdbodenbewegung an der Beobachtungsstation, zum Beispiel der vertikalen, oder der Ost-West-, oder der Nord-Süd-Komponente, so kommt durch die geometrische Lage der Station gegenüber dem Herd ein neues Element hinein, welches Ungleichheiten verursacht. Bei longitudinalen Wellen wird zum Beispiel die horizontale Komponente aus diesem Grund mit wachsender Entfernung vom Herd immer stärker zurückgedrängt.

Nach diesen Ueberlegungen ist klar, daß die Intensitätsverteilung der Erderschütterungen auf der Erdoberfläche schon für die direkten Wellen ein sehr kompliziertes Bild bietet, und zwar ein Bild, welches nicht einheitlich festliegt, sondern je nach den Vorgängen am Herd und der Lage des Herdes auf der Erde von Fall zu Fall in weiten Grenzen variieren kann. — Bei den reflektierten Wellen treten noch neuartige Ursachen für Intensitätsveränderungen hinzu. Zunächst wird es auf die Beschaffenheit der Erdrinde an der Reflexionsstelle ankommen. Bei regelmäßiger Lagerung wird auch eine regelmäßige Reflexion, bei unregelmäßiger Lagerung aber eine diffuse Reflexion und so eine Intensitätsschwächung oder selbst eine volle Zerstörung der von uns im allgemeinen als Fortsetzung der einfallenden Wellen angesehenen reflektierten Wellen zustande kommen. Ist die Erdrinde an der Reflexionsstelle stark geneigt oder eigenartig gekrümmt, so kann die reflektierte Welle Ablenkungen, Zerstreuungen oder Verdich-

tungen erfahren. So sind denn bei den nach einer oder gar nach mehrfachen Reflexionen heraufkommenden Wellen sehr große Unregelmäßigkeiten zu erwarten; es scheint auch möglich, daß schon an Stationen, die nahe beieinander liegen, weitgehende Verschiedenheiten beobachtet werden könnten, denn sie erhalten ja die Wellen von verschiedenen Stellen der Erdoberfläche reflektiert, und wechselt erfahrungsgemäß die Beschaffenheit der Erdoberfläche in manchen Gegenden sehr schnell mit dem Ort. — Diesen Anschauungen werden wir wenigstens vorläufig Raum geben müssen, ehe die Beobachtungen ihr entscheidendes Wort gesprochen haben; wenn allerdings die Reflexionen in dem Hauptteil nicht in der äußeren Erdoberfläche. sondern an tieferen Schichten (Magmaschicht) stattfinden sollten, so wäre immerhin auch denkbar, daß eine viel größere Regelmäßigkeit tatsächlich besteht, als man zunächst geneigt ist anzunehmen.

Zu sehr bemerkenswerten Folgerungen führt die geometrische Ausbreitung der reflektierten Wellen. In Figur 19 bezeichne A wieder den Herd, A' sei der Gegenpunkt. ABC, AFG mögen Strahlen von direkten Wellen bedeuten, die bei C und G auftauchen. Wegen der körperlichen Ausstrahlung der Wellen vom Herd sind dann C, E, G, J nur als willkürlich herausgegriffene Punkte von ganzen Strahlenringen um den zum Herd zugehörigen Durchmesser $A\ A'$ aufzufassen. Nun hat der Ring (E) einen größeren Umfang als der Ring (C), der Ring (J) aber einen kleineren als der Ring (G). Abgesehen von allen übrigen Ursachen der Intensitäts-Veränderung sehen wir hier also eine geometrische Ursache infolge der Art der Ausbreitung hinzutreten: Sie wird für den Uebergang vom Ring (C) zum Ring (E) eine Intensitätsverminderung, beim Uebergang vom Ring (G) zum Ring (J) aber eine Intensitätsvermehrung bedeuten. Besonders die Möglichkeit einer Intensitätsvermehrung ist beachtenswert: Wir dürfen schließen, daß die von neuem heraufkommenden Wellen unter Umständen sogar stärker sein können, als diejenigen Wellen, als deren reflektierte Fortsetzung sie in die Tiefe hinabgingen.

Fragen wir uns nach diesen Vorbereitungen, wie die vom Herd ausgehenden direkten und unterwegs reflektierten Wellen sich für eine bestimmte Beobachtungsstation in dem Gesamtbild der durch das Erdbeben erregten Bewegungen zusammenordnen werden. In der Figur 19 stelle A den Herd, S die Station dar. Wir fassen eine bestimmte Wellenart (longitudinale oder transversale Wellen) ins Auge. Von den zugehörigen Strahlen sind einige schematisch eingezeichnet: AS, ANS, $AKLS$, $AMNOS$, APS; von den Wechsel-

wellen sehen wir hier ab. Wir erkennen, daß die direkten Strahlen unter einem steileren Winkel in die Tiefe gehen und wieder an die Oberfläche kommen, als die auf der gleichen Seite der Erde

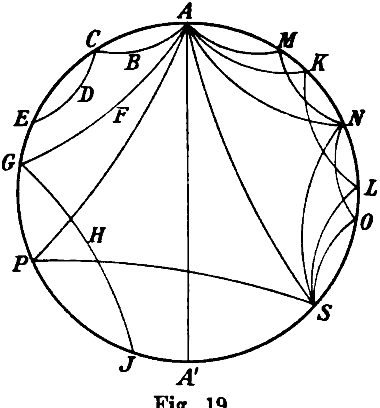


Fig. 19.

einmal reflektierten; diese stehen ebenso den zweimal reflektierten Wellen gegenüber, und so fort. Wir sehen ferner, daß die direkten Wellen tiefer in die Erde eindringen, als die auf der gleichen Seite der Erde einmal reflektierten, diese wieder tiefer als die zweimal reflektierten, und so fort. Die auf der Gegenseite der Erde reflektierten Wellen (wie *APS*) komplizieren die Verhältnisse noch mehr. In allen Fällen sind nicht nur die Neigungen der verschiedenen Strahlen an der Erdoberfläche, sondern auch ihre Wege im Innern der Erde ganz verschieden. Hieraus folgt nun zunächst, daß alle die vorhin besprochenen verschiedenen Umstände, welche die Intensität der Strahlen beeinflussen, zur Geltung kommen und zwar in einer solchen Weise, daß sich auch schon eine verschiedenartige Beeinflussung der vom Herd ausgehenden ersten Bogen der verschiedenen Strahlen ergiebt. Ueberdies ist aber auch zu bedenken, daß nach den Ergebnissen der §§ 12, 13 die verschiedene Neigung der verschiedenen Strahlen noch in einer besonderen und zwar recht komplizierten Weise zur Geltung kommt, indem von ihr einmal abhängt, wie groß sich die Bewegungen an der Erdoberfläche, die wir beobachten, im Verhältnis zu den Bewegungen in den Erdbebenstrahlen in der Erde ergeben, und zweitens auch abhängt, welch ein Bruchteil der heraufkommenden Wellen reflektiert wird. — Im ganzen erkennen wir, daß für das relative Stärkeverhältnis, in welchem in einem Erdbeben die direkten und die verschiedenen reflektierten Wellen auftreten, eine große Zahl von verwickelten Umständen maßgebend sind, von denen ein Teil auch zu Gunsten der Reflexionen spricht. So wird es denn ver-

ständlich, daß die Erfahrung sehr große Variationen bei den verschiedenen Erdbeben erkennen läßt, und daß in vielen Fällen das Maximum der Intensität nicht in den direkten Wellen, sondern in der ersten Reflexion oder gar erst in der zweiten gefunden wird. Bei sehr großen Entfernungen treten wenigstens in den Registrierungen der Horizontalkomponenten die direkten Wellen so sehr zurück, daß sie oft überhaupt nicht mehr erkennbar sind.

Die Vergrößerung der Intensität bei den reflektierten Wellen durch Zusammenziehen der Wellenringe kann theoretisch im Gegenpunkt und im Herdpunkt selbst bis zu einer Höhe wie in Brennpunkten gehen. Die erste dieser Extremverstärkungen im Gegenpunkt geschieht durch Wellen, die im Aequatorring des Durchmessers Herd—Gegenpunkt reflektiert werden, welche also längs der Erdoberfläche gemessen zweimal den Weg $\Delta = 10000$ Kilometer zurückgelegt haben. Wenn man in Figur 19 die Station S in den Gegenpunkt A' hineinrücken läßt, erhält man in ANS und APS sinnbildliche Darstellungen der Strahlengänge.

Die erste Extremverstärkung im Herdpunkt selbst wird durch Wellen veranlaßt, die zweimal nach Durchlaufen von je $^1/_3$ des Erdumfanges ($\Delta = 13333$ km) reflektiert wurden. Zur Illustration denke man sich in Figur 19 P und S so verschoben, daß APS ein gleichseitiges Dreieck wird, dann giebt das Strahlendreieck in $APSA$ oder $ASPA$ den Strahlengang an.

Zu diesen Extremverstärkungen, die ganz sicher zu erwarten sind, könnten nach den Ueberlegungen des vorherigen Paragraphen auch noch solche kommen, die ihre Ursache in einer Vereinigung von direkt vom Herd kommenden Strahlen im Gegenpunkt finden. Wie wir sahen, wird dies dann eintreten, wenn die Geschwindigkeit der Wellen im tiefen Erdinnern stark heruntersinken sollte. Dabei würde sich zunächst eine Extremverstärkung im Gegenpunkt ergeben, dann — infolge der Reflexion der Wellen im Gegenpunkt — eine zweite im Herd, dann eine dritte im Gegenpunkt, und so fort.

Man wird sich die Sache nun aber nicht so vorzustellen haben, daß der Extremverstärkungen wegen nun gewissermaßen neue Herde entständen. Erstens nämlich findet schon wegen der Elliptizität der Erde weder im Ort noch in der Zeit eine strenge Vereinigung statt; zweitens werden alle Unregelmäßigkeiten an der Erdoberfläche, welche die Reflexion stören, die Vereinigung noch unschärfer machen; drittens endlich — und damit kommen wir wohl zur Hauptsache — dringen die sich vereinigenden Wellen

nur aus bestimmten Richtungen heran, werden also auch wieder nur nach bestimmten Richtungen hin ausgestrahlt. Von den neu erregten Herdflächen — wenn man diesen Ausdruck für den Augenblick gestatten will — gehen also nicht wie von dem ursprünglichen Herd nach allen Richtungen Erdbebenwellen aus, sondern nur nach bestimmten, und die so ausgestrahlten Wellen tauchen demgemäß erst in sehr weiten Entfernungen wieder auf. — Es werden aus diesen Gründen die Extremverstärkungen wohl praktisch keine Rolle spielen, obwohl es scheint, daß sie im Gebiete des Gegenpunktes und des Herdpunktes sich werden auffinden lassen [1]).

Es sei mir hier eine Schlußbemerkung gestattet, die über den Rahmen des vorliegenden Paragraphen hinausgeht, eine Bemerkung, die ich schon bei früheren Gelegenheiten öfters gemacht habe, die mir aber immer neuer Wiederholung wohl wert scheint.

Ganz wie es den Ueberlegungen der beiden letzten Paragraphen entspricht, findet man bei dem Studium der Erdbebendiagramme von Fall zu Fall sehr weitgehende Verschiedenheiten. Um so auffallender tritt nun demgegenüber hervor, daß sich öfters Erdbebendiagramme in allen Einzelheiten wiederholen, manchmal so treu, daß man Kopien vor sich zu haben glaubt. Hier folgten offenbar am gleichen Ort gleichartige Beben auf einander. Wollte man die Meinung hegen, daß die Besonderheiten der Beben durch eine Reihe von verschiedenen aufeinanderfolgenden Stößen verursacht werden, so wäre es so gut wie unverständlich, wie die Uebereinstimmung der Beben bis in die feinen Einzelheiten, bis in die

1) Anmerkung bei der Drucklegung. (September 1907.) Inzwischen ist von E. Oddone als monographische Abhandlung des Zentralbureaus der internationalen Assoziation in Straßburg eine Arbeit veröffentlicht worden, in der der Nachweis versucht wird, daß dem Hauptbeben des Oefteren Nachstöße folgen, die durch die im Gegenpunkt reflektierten Wellen ausgelöst werden. Als Zeit der Rückkehr wird 34 Minuten angegeben. Das Beobachtungsmaterial scheint mir noch nicht sicher genug, um mit voller Zuversicht die Behauptung daran zu knüpfen, daß auffällig oft gerade 34 Minuten nach dem Hauptstoß ein zweiter folge. Sollte sich dieses jedoch bestätigen, was von äußerster Bedeutung wäre, und bliebe allein die Möglichkeit an die auslösende Wirkung von Extremveränderungen zu denken, so müßte festgestellt werden, um welche der verschiedenen möglichen Arten der Extremverstärkungen es sich handelt. E. Oddone nimmt an, daß die Wellen geradeswegs zum Gegenpunkt gehen und wieder zurückkehren. Ließe sich dies wirklich erweisen, so müßte gefolgert werden, daß im tiefen Erdinnern die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen wieder stark herabsinkt und zwar gerade in einem solchen Betrage, daß im Gegenpunkt ein Brennpunkt entsteht.

Folge und die Formen der Wellen gehen kann. So möchte ich denn meinen, es sei uns hier ein Fingerzeig gegeben, auch bei kompliziert scheinenden Erdbeben auf eine große Einfachheit der erregenden Ursache zu schließen. Es mag sich etwa um die Bildung einer Spalte in der Erdrinde in einer gewissen Richtung handeln. Die Komplikationen in dem Ablauf der Erdbebenwellen sind dann erst als Folgeerscheinungen anzusehen, in denen sich einmal das Zusammenwirken der Eigenschwingungen der Erdschichten zeigt und dann die Besonderheiten der Fortpflanzung der Wellen durch das Erdinnere und der Reflexion an der Erdoberfläche — vielleicht auch an tiefer gelegenen Unstetigkeitsflächen. Die öfters sich zeigende Uebereinstimmung der Erdbebendiagramme führt demgemäß zu der Ansicht, daß die Einzelheiten nicht etwa etwas Nebensächliches sind, in dem der Zufall ein für unsere Forschung wenig bedeutsames Wirrnis anrichtet, sondern daß eben an ihr Studium in weitem Maße der Fortschritt unserer Erkenntnis über den Bau der Erdrinde und der Erde in ihren Tiefen gebunden ist.

Die Hoffnung, es werde uns einst gelingen, volles Licht in die Auffassung der scheinbaren Unregelmäßigkeiten bei den Erdbebenwellen zu bringen, wird in sehr erfreulicher Weise gesteigert durch die Klarlegung des Anteiles der Reflexionen an der Erdoberfläche. Aber damit ist nicht mehr als ein weiterer kleiner Schritt getan. Alle die im Vorstehenden nur streifend berührten Fragen nach der Aufdeckung der Art der Spaltung der Erdrinde am Herd durch das Studium der Diagramme, nach dem Einfluß der etwa vorhandenen Magmaschicht auf die Ausbildung der Eigenschwingungen der Erdrinde und auf die Fortpflanzung der Erdbebenwellen, nach der Beschaffenheit der Uebergangsschicht zwischen Steinmantel und Metallkern, nach dem Bau des Steinmantels und des Metallkerns in feineren Einzelheiten harren noch der Bearbeitung. Ich möchte die Zuversicht aussprechen, daß hier gerade die große Häufung gut ausgestatteter und gut geleiteter Stationen in Europa sich von entscheidender Bedeutung erweisen wird. Aber dazu ist zweierlei nötig: Erstens dürfte man sich nicht nur darauf beschränken, einige Zahlenangaben über die Haupteinsätze zu veröffentlichen, sondern es müßte Gelegenheit geboten werden, die Einzelheiten der Seismogramme zu vergleichen, wie es nur durch graphische Darstellungen des Verlaufes der Erderschütterung möglich ist. Zweitens müßte dem europäischen Netz von Stationen, die lesbare Diagramme liefern, auch

ein solches außereuropäisches Netz an die Seite gestellt werden, damit wenigstens in den großen Zügen die Verfolgung der Erdbebenwellen über die ganze Erde möglich gemacht wird. Wir müssen und, ich meine auch, wir dürfen hoffen, daß die Seismologie in nicht ferner Zeit ein solches die Erde umspannendes Netz ihr eigen nennen wird; denn diese Forderung wird von allen ihren Arbeiten gestellt. Selbst die einfache Frage nach der Bestimmung der Laufzeiten, die doch grundlegend in jeder Hinsicht ist, könnte erst durch ein solches Netz über den jetzigen Zustand hinausgeführt werden, welcher der Seismologie zwar alle Ehre macht, wenn man ihr jugendliches Alter bedenkt, der aber ihrem kraftvollen Streben durchaus nicht mehr entspricht.

II. Laufzeitkurven.

Von K. Zoeppritz.

§ 27. Vorbemerkungen über die Konstruktion von Laufzeitkurven.

Zu wiederholten Malen sind im letzten Jahrzehnt sogenannte Laufzeitkurven für Erdbebenwellen aufgestellt worden. Mit der fortschreitenden Verfeinerung der Erdbebenbeobachtungen wird es natürlich möglich, die Genauigkeit zu vergrößern. Geht man bei diesem Bestreben aber darauf aus, etwa die Sekunde festzulegen, so begegnet man gewissen Schwierigkeiten, die es nützlich erscheinen lassen, einmal etwas ausführlicher die Grundsätze zu diskutieren, die bei der Aufstellung solcher Kurven maßgebend sein können. Daß eine Genauigkeit auf etwa eine Sekunde erforderlich ist, um eine exakte Kenntnis der Geschwindigkeit der elastischen Wellen in verschiedenen Tiefen der Erde zu erlangen, wird die Rechnung weiter unten dartun.

Um zunächst längst Bekanntes kurz zu wiederholen, so denke ich mir ein Erdbeben, das in Hinsicht der Laufzeitkurve möglichst einfache Verhältnisse darbietet: ein einziger, heftiger, unvermittelter Stoß finde statt, dessen fühlbare Wirkung sich auf ein ganz enges Gebiet beschränkt. Der Mittelpunkt dieses, kreisförmig angenommenen, Gebietes werde als Epizentralpunkt bezeichnet. Der Zeitpunkt des ersten Beginns der Bodenbewegung sei im Epizentralpunkt selbst auf die Sekunde genau registriert. Weiter denke ich mir eine Anzahl von Erdbebenstationen, die auf ein und

demselben größten Kreis durch den Epizentralpunkt liegen mögen. Die bekannten Welleneinsätze (erste und zweite Vorläufer etc.) mögen sich in den Diagrammen aller Stationen so scharf abheben, daß ihr Beginn überall unschwer auf die Sekunde genau abgelesen werden kann. Wir wissen heute, daß die Auslösungsstellen aller Erdbeben in der Erdoberfläche selbst oder wenigstens in sehr geringer Tiefe unter ihr liegen. Wir dürfen deshalb auch noch die Annahme hinzufügen, Auslösungsstelle und Epizentralpunkt fallen zusammen, der im Epizentralpunkt registrierte Beginn sei also der Beginn der Erdbewegung überhaupt. Greifen wir dann eine bestimmte Wellenart, etwa die sogenannten ersten Vorläufer heraus, so haben wir als Laufzeiten einfach jedesmal die Differenz: Beginn der Registrierung auf der Erdbebenstation — Beginn der Registrierung im Epizentralpunkt anzusetzen. Tragen wir die so erhaltenen Laufzeiten als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinaten-System ein, so muß noch entschieden werden, was wir als zugehörige Abszissen nehmen wollen. Wäre die Erde eine in elastischer Hinsicht homogene Kugel, so nähme man natürlich vorteilhaft für solche Wellenarten, die sich räumlich durchs Erdinnere hindurch fortpflanzen, als Abszissen die Sehnen durch den Erdkörper. Es müßten nämlich dann alle dem Welleneinsatz auf den verschiedenen Stationen entsprechenden Beobachtungspunkte, wie ja ohne weiteres klar, auf einer Geraden liegen. Der Erfolg hat aber bei diesem Verfahren schon frühzeitig gezeigt, daß die Punkte durchaus nicht auf einer geraden Linie liegen, und man konnte daraus mit Sicherheit schließen, daß die Erde elastisch nicht homogen ist. Unter solchen Umständen, da wir den wahren Weg der Erdbebenstrahlen vorläufig nicht kennen, scheint es zweckmäßig, die Entfernungen, also unsre Abszissen, einfach längs des verbindenden größten Kreises auf der Erdoberfläche zu messen.

Bisher hatten wir die Erdbebenstationen alle auf dem selben größten Kreis vorausgesetzt. Die Erfahrung lehrt nun aber, daß an Stationen, die in den verschiedensten Richtungen aber in gleicher Entfernung vom Epizentralpunkt liegen, die selben Welleneinsätze auch gleichzeitig eintreffen. Daraus ist ohne weiteres zu schließen, daß die Erde, wenn auch nicht im Ganzen, so doch wenigstens in konzentrischen Schichten homogen ist. Wenn eben gesagt wurde, die Wellen träfen gleichzeitig ein, so ist das etwa so zu verstehen, daß es vorläufig den Anschein hat, als seien die zeitlichen Unterschiede der Welleneinsätze zwischen Stationen in verschiedener Richtung und gleicher Entfernung nicht größer als zwischen Sta-

tionen in gleicher Richtung und gleicher Entfernung [1]). Wie weit das Gesetz der homogenen Schichten wirklich erfüllt ist, wird noch im Lauf der Jahre zu prüfen sein, vorläufig kommt es unsern Problemen außerordentlich zu statten, daß das Gesetz offenbar in sehr hohem Grad erfüllt ist. Wir werden also im Folgenden von der Richtung völlig absehen, nur von der Entfernung allein noch reden und diese längs der Erdoberfläche messen.

Laufzeit und Entfernung sind beides „Strecken", die je durch ihre beiden Endpunkte charakterisiert sind. Diese 4 Endpunkte haben wir also ins Auge zu fassen. Dabei nehme ich zunächst an, daß die Auslösungsstelle in der Erdoberfläche selber liegt und betrachte dann erst den Einfluß einer etwaigen „Herdtiefe". Schließlich sind dann noch einige Korrektionen wegen verschiedener Umstände zu besprechen.

1) Ort und Zeitpunkt für die Erdbebenstation.

Will ich die Aufzeichnung einer Erdbebenstation zur Konstruktion der Laufzeitkurve verwenden, so muß ich die Lage der Station auf der Erde, die vorläufig als Kugel gedacht ist, kennen. Diese Lage wird wohl in allen Fällen mit der hier erforderlichen Genauigkeit bekannt sein. Ich gehe deshalb sofort über zu dem Zeitpunkt, den mir die Station für den zu betrachtenden Welleneinsatz liefern soll. Hier wird nun von vornherein eine große Schwierigkeit durch den Umstand geboten, daß jedes Erdbeben mehrere, oft sehr viele Einsätze zeigt, die von gleicher oder auch von stark verschiedener Intensität sind. Den einmal ausgewählten Welleinsatz bei allen Stationen mit einiger Sicherheit wieder zu erkennen, ist fast nur möglich bei unmittelbarem Vergleich der verschiedenen Registrierungen. Es erhebt sich somit die dringende Forderung, daß dem Bearbeiter alle zu verwendenden Diagrame im Original oder wenigstens in Kontaktkopie vorliegen sollten. So schwierig dieses Ziel zur Zeit noch zu erreichen ist, so wird es in Zukunft vielleicht doch sehr erleichtert, wenn das Zentralbureau der Internationalen Seismologischen Assoziation, wie es in sehr dankenswerter Weise schon begonnen hat, fortfährt, die eingesandten Kopien größerer Erdbeben durch ein Reproduktions-Verfahren zu vervielfältigen und zu verbreiten. Der Eifer, geforderte Kopien einzusenden, wird durch dieses Vorgehen zum Nutzen eines wichtigen Zweiges der Erdforschung gewiß bedeutend ge-

---

1) Demgegenüber ist zu bemerken, daß die Energie, die vom Erdbebenherd sich ausbreitet, je nach dem speziellen Verlauf eines Bebens nach verschiedenen Richtungen sehr wohl verschieden sein kann.

hoben. — Auf Grund des vorliegenden Kurvenmaterials wird der Bearbeiter im Stande sein, sich ein ungefähres Bild des Bebenverlaufs zu machen. Als am meisten geeignet erweist sich natürlich der oben schon angenommene besondere Fall eines einzigen heftigen Stoßes; der Bearbeiter hat dann nur die Aufgabe, in allen Seismogrammen unter den verschiedenen Welleneinsätzen denjenigen herauszufinden, mit dem die von ihm betrachtete Wellenart — um ein Beispiel zu nennen: die einmal an der Erdoberfläche reflektierten Longitudinalwellen — einsetzen. Viel ungünstiger liegt die Sache, wenn mehrere Primärstöße in wenig Minuten Abstand erfolgt sind. Hier werden sich die verschiedensten Welleneinsätze übereinander lagern und das Bild außerordentlich komplizieren. Ganz besonders schwierig liegt der Fall, wenn die Bewegung erst schwach beginnt und dann stärkere Stöße folgen. Hier wird man nur bei direktem Vergleich der Diagramme mit einiger Sicherheit feststellen können, welche Einsätze in den verschiedenen Seismogrammen einander wirklich entsprechen. Im Ganzen wird man sagen müssen, daß der direkte Vergleich der Seismogramme unter allen Umständen wünschenswert ist und nur dann sich allenfalls umgehen läßt, wenn ein Beben aus einem einmaligen heftigen Stoß besteht und wir entweder nur den Einsatz der direkten Longitudinal- oder allenfalls noch den der direkten Transversalwelle betrachten. Diese beiden Einsätze werden in der Tat in den meisten Berichten über seismische Registrierungen und in der Regel richtig angegeben.

Für das Folgende denken wir uns wieder, das Kurvenmaterial liege dem Bearbeiter vor, und in allen Seismogrammen sei dieselbe eben zu betrachtende Einzelwelle herausgefunden. Als Endpunkt der Laufzeit sollte nach unsrer Übereinkunft der Zeitpunkt gelten, wo die Erregung die Station erreicht. Ging der betrachteten Welle seimische Ruhe voraus, so wird man den Augenblick des ersten Abbiegens der Kurve aus der Ruhelinie sehr genau abzulesen im Stande sein. Gehen der Welle aber schon andere Bewegungen voraus, so ist der Moment des ersten Einsatzes oft schwer zu erkennen und man liest alsdann mit mehr Vorteil den Augenblick der größten seitlichen Elongation ab. Dabei hat man natürlich darauf zu achten, daß dieser Zeitpunkt nicht übereinstimmt mit dem Augenblick der größten seitlichen Bodenausweichung, doch ist die Korrektion, die anzubringen ist, um aus dem abgelesenen Zeitpunkt den für den Erdboden gültigen zu erhalten, mit der gewünschten Genauigkeit etwa einer Sekunde mit Hülfe der Apparatkonstanten leicht zu berechnen.

Wir haben uns nun zu fragen, wie erreichen wir die gewünschte Genauigkeit in der Zeitbestimmung der Welleneinsätze. Es ergeben sich gewisse Anforderungen an Apparate und Uhren, die hier kurz zusammengestellt werden mögen, zugleich als Rechtfertigung, warum weiter unten bei der wirklichen Konstruktion der Laufzeitkurven nur eine so geringe Anzahl von Stationen berücksichtigt worden sind. Schwer wird es sein, für die Vergrößerung schneller Schwingungen ein einheitliches Maß anzugeben, doch muß sie wenigstens so groß sein, daß auch schwächere Einsätze noch deutlich hervortreten. Handelt es sich um Erdbeben in Tausenden von Kilometern Entfernung, so ist eine 10-fache Vergrößerung bedenklich klein und in sehr vielen Fällen unzureichend. Unerläßlich ist, wenigstens wenn die Bodenperioden in der Nähe der Eigenperiode des Apparates liegen, daß der Seismograph gedämpft schwingt. Für die Registriergeschwindigkeit ergiebt sich als Mindestmaß etwa 1 cm/Min., widrigenfalls schnelle Schwingungen nicht mehr hinreichend aufgelöst werden und auch die Ablesegenauigkeit unter eine Sekunde herabsinkt. Von dem Uhrwerk, das die Registrierwalze in Bewegung setzt, wird man verlangen müssen, daß die Minutenlängen durch einige Minuten hindurch sich um weniger als ein Sechzigstel unterscheiden. Die Zeitmarken selber müssen von einer Uhr gegeben werden, die sehr guten Gang hat und häufiger Kontrolle unterzogen wird. Jedenfalls muß für jeden Tag des Jahres die Uhrkorrektion, die an den Zeitmarken eines Seismograms anzubringen ist, auf mindestens eine Sekunde genau bekannt sein. Es scheint mangelhafter Zeitdienst bisher ein wesentlicher Grund gewesen zu sein für die starke Streuung der Beobachtungspunkte, die eine präzise Festlegung der Laufzeitkurve so sehr erschwert.

2) Ort und Zeitpunkt für den Epizentralpunkt.

Wir führen, wie schon bemerkt, die Betrachtung zunächst durch unter der Annahme, daß die Auslösungsstelle in der Erdoberfläche liegt, und wollen zunächst den Vorgang eines großen Erdbebens näher ins Auge fassen. Ueber die Ursachen der Erdbeben bestehen mancherlei Hypothesen, ohne daß bisher auch nur einigermaßen Übereinstimmung der Meinungen erzielt wäre. Wir lassen diese Frage deshalb zunächst ganz beiseite und halten uns an die Beobachtungen, wie sie nach fast allen großen Erdbeben in dem vom Erdbeben betroffenen Gebiet gemacht werden. In der Regel zeigen sich danach Verschiebungen der Erdschichten gegeneinander längs mehr oder weniger weit ausgedehnter Flächen,

die sich in ihrem Schnitt mit der Erdoberfläche als Linien darstellen. Die Verschiebungen treten ein teils in horizontaler, teils in vertikaler Richtung. Bekanntlich war beim kalifornischen Erdbeben am 18. April 1906 das Ausstreichende einer solchen Verschiebungsfläche mehrere 100 km weit zu verfolgen. Wir dürfen uns also etwa Folgendes vorstellen: Durch noch nicht sicher aufgeklärte Ursachen entstehen nahe der Erdoberfläche lokale Spannungen, die anwachsen und schließlich zum Bruch und zur Zerreißung führen. Wir dürfen vermuten, daß bei langen Zerreißungslinien der Riß nicht an allen Stellen zugleich beginnt sondern daß an einer bestimmten Stelle die Bruchfestigkeit zuerst überschritten wird und daß von diesem Punkt aus die Zerreißung dann sich weiter ausbreitet. Mit welcher Geschwindigkeit dies geschieht, wissen wir zunächst noch nicht, dürfen dafür aber wohl vorläufig höchstens die Schallgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit der ersten Vorläufer, annehmen. Machen wir uns eine derartige Vorstellung vom Vorgang des Bebens, so erhellt sofort die Schwierigkeit Ort und Zeitpunkt der Erregung für die von uns betrachtete einzelne Welle festzulegen und es wird von Fall zu Fall immer wieder ein anderes Verfahren den meisten Erfolg versprechen.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn das Beben aus einem einzelnen heftigen Stoß besteht, dessen Wirkung nur auf einem engen, kreisförmigen Gebiet gefühlt wird. In diesem Fall wird man keinen wesentlichen Fehler begehen, wenn man als Erregungsort den Mittelpunkt des Zerstörungsgebietes annimmt. Um die Zeit der Auslösung zu bestimmen, wird man die Angaben der nächsten, zuverlässig arbeitenden Station benützen, wobei man die Laufzeit für die zugehörige Entfernung freilich schon kennen muß. Je näher die Station dem Epizentralpunkt liegt, desto geringer wird im allgemeinen der Fehler sein, den eine kleine Abweichung zwischen der zu Grunde gelegten und der wirklich richtigen Laufzeit verursacht. Das skizzierte Verfahren zur Bestimmung von Ort und Zeit der Auslösung findet man unten angewendet beim indischen Beben vom 4. April 1905.

Hat man Erdbebenregistrierungen von Stationen in nächster Nähe der Auslösungsstelle, so genügt es, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Erdoberfläche zu kennen, um aus dem Einsatz in der nächstgelegenen Station die Zeit des Bebens zu berechnen. Ist diese Station weniger als 100 km entfernt, so braucht der Fehler der Berechnung nicht mehr als eine Sekunde zu betragen. Man kann nämlich für so

kleine Entfernung ohne Gefahr mit gradlinigem Stoßstrahl rechnen und ebenso weiter die Sehne mit dem Bogen längs der Erdoberfläche vertauschen. Die Sorge ist nur die: woher erhält man die Geschwindigkeit, mit der sich die longitudinalen elastischen Wellen in der Erdoberfläche fortpflanzen? Offenbar können zu dieser Bestimmung die Erdbebenbeobachtungen selber dienen. Denken wir uns zwei Stationen der Erdbebenauslösungsstelle so nahe gelegen, daß Stoßstrahl, Sehne und Bogen innerhalb der Fehlergrenzen miteinander vertauschbar sind, so wird die Differenz der Entfernungen der beiden Stationen vom Auslösungspunkt, geteilt durch die Differenz der Eintreffzeiten, direkt den gesuchten Wert geben. Anspruch auf besondere Genauigkeit wird das Verfahren in dieser Form freilich nicht erheben können, doch genügt die gefundene Annäherung, um aus dem Beginn der Registrierung in einer nahe gelegenen Station, den Beginn des Bebens am Auslösungsort auf etwa eine Sekunde genau festzulegen.

Bisher war angenommen, der Auslösungsort lasse sich als Mittelpunkt des Zerstörungsgebietes leicht feststellen. Sehr viel schwieriger wird die Bestimmung dieses Punktes, wenn wir es mit einer Hunderte von km langen Verschiebungslinie zu tun haben. Es erhebt sich die Frage: an welchem Punkt ist die Auslösung des Bebens, bezw. des bestimmten, kräftigen Einzelstoßes erfolgt, den wir für die Laufzeitkurve zu Grund legen wollen? Hier ist man noch mehr wie sonst auf die Registrierungen von Stationen, die dem Herde nahe liegen, angewiesen. Ebenso wird man auch hier von Fall zu Fall je wieder einen anderen Weg mit Vorteil einschlagen, um Ort und Zeit der Auslösung zu ermitteln. Ich will einen Weg andeuten, den man einschlagen kann, wenn die Beobachtungen dreier Stationen in der Nachbarschaft des Herdes vorliegen. Die 3 Stationen seien A, B und C, die Auslösungsstelle selber sei mit X bezeichnet. Die Methode setzt wieder die wenigstens angenäherte Kenntnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in den äußersten Erdschichten voraus. Ich will sie $\mathfrak{v}_0$ nennen. In B seien die ersten Vorläufer p Sek.; in C q Sekunden später eingetroffen als in A. Wenn ich die unbekannte Zeit in Sekunden, die verstrichen ist von der Auslösung bis zum Beginn der Erregung in A, mit y bezeichne, so gelten offenbar die Beziehungen: Entfernung $XA = \mathfrak{v}_0 . y$, $XB = \mathfrak{v}_0 . (y+p)$, $XC = \mathfrak{v}_0 . (y+q)$. Durch Probieren, indem man der Reihe nach für y ganze Zahlen einsetzt und um A, B, C Kreise mit den entsprechenden Radien schlägt, wird man leicht den gesuchten Punkt X als Schnittpunkt der drei Kreise

erhalten, indem man nötigenfalls noch zwischen zwei vollen Sekunden interpoliert. Damit, daß ich y so ermittelt habe, ist natürlich außer dem Auslösungspunkt X auch die Zeit der Auslösung gefunden. Es ist nämlich der Zeitpunkt: Welleneinsatz in $A - y$ Sekunden.

§ 28. Einfluß der Herdtiefe.

Bisher war immer angenommen, daß die Auslösungsstelle in der Erdoberfläche selber liege, also mit dem Epizentralpunkt zusammenfalle. Diese Annahme wird, wie man vermuten darf, bei vielen Erdbeben auch wirklich zutreffen. Trotzdem wird man, so lange wir darüber nichts sicheres wissen, auch mit der Möglichkeit rechnen müssen, daß die Auslösungsstelle in einiger Tiefe unter der Erdoberfläche liegt. Da wir eine Laufzeitkurve aufstellen wollen, die sich auf Herde an der Erdoberfläche bezieht, so sind dann die Beobachtungswerte erst auf diesen Fall zu korrigieren. In Figur 20 bezeichne A den Herd, E den Epizentral-

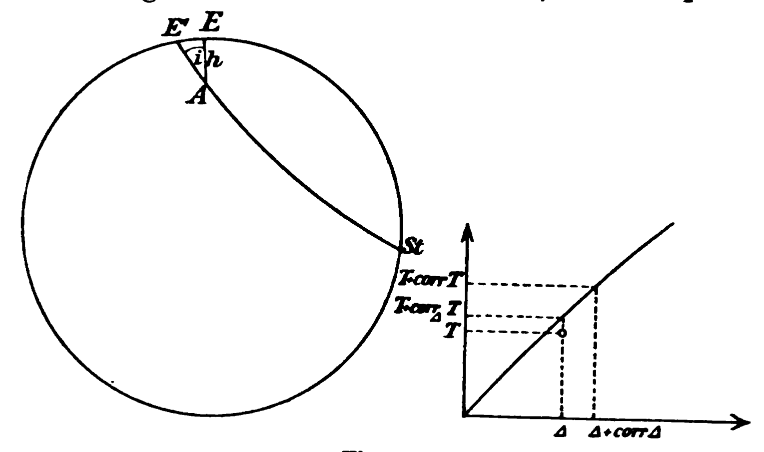


Fig. 20.

punkt, $h = AE$ die Herdtiefe, St die Beobachtungsstation, $\varDelta$ die von E bis St längs der Erdoberfläche gemessene Entfernung der Station. T sei die scheinbare Laufzeit, d. h. der Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen des Welleneinsatzes in der Station und im Epizentralpunkt. Der Weg der Welle vom Herd A zur Station St in der Erde ist in der Figur angedeutet; wir denken uns ihn über den Herd hinaus bis zur Erdoberfläche in E' verlängert. Dann sind der Laufzeitkurve nicht $\varDelta$ und T, sondern die Entfernung $E'St$ und die Laufzeit von E' bis St zugrunde zu legen. Die Korrektion für $\varDelta$ wird dann durch EE' angegeben und die Korrektion für T durch die Summe der zu AE und AE'

gehörigen Laufzeiten; diese Korrektionen mögen mit corr Δ und corr T bezeichnet werden. Wir nehmen an, h sei so klein, daß es genügt, das Dreieck AEE' als geradlinig anzusehen. Der Winkel $E'AE$ ist dann der Einfallswinkel i der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche. $\mathfrak{v}_0$ sei die Raumgeschwindigkeit der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche. — Bei diesen Festsetzungen ergiebt sich aus dem Anblick der Figur:

$$\text{(1)} \qquad \text{corr}\, \Delta = E'E = + h \operatorname{tg} i,$$

$$\text{(2)} \qquad \text{corr}\, T = \frac{AE'}{\mathfrak{v}_0} + \frac{AE}{\mathfrak{v}_0} = + \frac{h}{\mathfrak{v}_0} \frac{1 + \cos i}{\cos i}.$$

Für die Zeichnung der Laufzeitkurve sind dann statt der direkten Beobachtungswerte Δ und T die Werte $\Delta + \text{corr}\, \Delta$ und $T + \text{corr}\, T$ zu benutzen. (Vergl. die Figur). Verwendet man trotzdem direkt Δ und T, so werden Fehler gemacht; ich will nun eine Abschätzung der Größe dieser Fehler vornehmen und frage zu dem Zweck, wie weit die Punkte Δ, T von der korrigierten Laufzeitkurve, also von der durch die Punkte $\Delta + \text{corr}\, \Delta$, $T + \text{corr}\, T$ bestimmten Kurve abstehen.

Den Abstand will ich dabei parallel der T-Axe beurteilen, also in Sekunden der zum betreffenden Abstand gehörigen Laufzeit. Die so gemessene Differenz sei $\text{corr}_\Delta T$, dann müssen Δ und $T + \text{corr}_\Delta T$ einen Punkt ergeben, der auf der Laufzeitkurve liegt. (Vergl. d. Figur). Wie man sieht, können wir unsere Aufgabe auch so formulieren: es soll diejenige Korrektion $\text{corr}_\Delta T$ der scheinbaren Laufzeit T aufgesucht werden, welche bei festgehaltener Entfernung Δ notwendig ist, um den Einfluß der Herdtiefe aus den Beobachtungen auszuschalten.

Die Raumgeschwindigkeit der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche wurde mit $\mathfrak{v}_0$ bezeichnet; bedeutet $\mathfrak{V}$ die Oberflächengeschwindigkeit (d. h. die Geschwindigkeit der Fortpflanzung längs der Oberfläche) der Wellen bei der Station, so ist

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{v}_0}{\sin i}$$

Rückt der Punkt in der Laufzeitkurve um ein kleines Stückchen $\delta\Delta$ vor, ändert sich dabei T um δT, so ist $\delta\Delta = \mathfrak{V}\delta T$ zu setzen, also folgt

$$\text{(3)} \qquad \delta T = \frac{1}{\mathfrak{V}} \delta\Delta = \frac{\sin i}{\mathfrak{v}_0} \delta\Delta.$$

$T + \text{corr}\, T$ gehört zu $\varDelta + \text{corr}\, \varDelta$; zum Fortschritt um $-\text{corr}\, \varDelta$ gehört nach (3) in der Laufzeitkurve eine Veränderung der Laufzeit um

$$-\frac{\sin i}{\mathfrak{v}_0} \text{corr}\, \varDelta.$$

Dadurch wird $T + \text{corr}\, T$ umgewandelt in

$$T + \text{corr}\, T - \frac{\cos i}{\mathfrak{v}_0} \text{corr}\, \varDelta;$$

dieser Wert ist also in der Laufzeitkurve zu $\varDelta$ zuzuordnen. Daraus folgt sofort:

$$\text{(4)} \qquad \text{corr}_{\varDelta} T = \text{corr}\, T - \frac{\sin i}{\mathfrak{v}_0} \text{corr}\, \varDelta$$

als Korrektion von T, wenn als Entfernung die unkorrigierte Epizentalentfernung $\varDelta$ genommen wird. Benutzt man die Formeln (1) und (2), so geht (4) über in:

$$\text{(5)} \qquad \text{corr}_{\varDelta} T = +\frac{h}{\mathfrak{v}_0}(1 + \cos i) = +\frac{h}{\mathfrak{v}_0}(1 + \sin e),$$

i ist hier als die Neigung der bei der Station auftauchenden Wellen gegen die Vertikale anzusehen; e bedeutet den „Emergenzwinkel“, d. h. die Neigung gegen die Horizontale. Der Wert $\text{corr}_{\varDelta} T$ kann nach den vorhin gegebenen Auseinandersetzungen als der Fehler bezeichnet werden, den man in Bezug auf die Laufzeit begeht, wenn man die Epizentralentfernung und die auf den Epizentralpunkt bezogene scheinbare Laufzeit ohne Korrektionen verwertet.

Die Korrektion setzt sich zusammen aus einem Teil $\frac{h}{\mathfrak{v}_0}$, der für alle Entfernungen den gleichen Betrag hat und nur mit der Herdtiefe variiert. Er bedeutet eine Verschiebung der ganzen Laufzeitkurve um $\frac{h}{\mathfrak{v}_0}$ nach oben. Diese Verschiebung um einen konstanten Betrag ist aber nur dann als Korrektion anzubringen, wenn ich als unkorrigierte Laufzeit T, wie oben vorausgesetzt, die Zeitdifferenz nehme zwischen dem Welleneinsatz in E und dem in St. Nun ist mir zwar der Einsatz in der Erdbebenstation St durch die Registrierung bekannt, in den allermeisten Fällen aber nicht der Einsatz im Epizentralpunkt E. Dieser Zeitpunkt ist vielmehr fast immer erst indirekt zu bestimmen. Wenn nicht gerade der gewiß sehr seltene Fall eintritt, daß eine exakte Erd-

bebenregistrierung vom Epizentralpunkt E selbst oder aus seiner allernächsten Nähe vorliegt, so wird man auf die Aufzeichnungen entfernterer Stationen angewiesen sein und man wird, wie unten noch näher auseinandergesetzt werden wird, gar nicht in der Lage sein, den Zeitpunkt des Bebenbeginns im Epizentralpunkt E mit einiger Sicherheit zu erschließen, weit eher vielmehr den Zeitpunkt des Beginns der Erregung im Auslösungspunkt A. Rechnet man die Laufzeiten alsdann von diesem letzteren Zeitpunkt ab, so legt man damit von vornherein gar nicht T sondern $T + \frac{h}{\mathfrak{v}_0}$ der Laufzeitkurve zu Grunde, hat also den konstanten Teil unsrer oben berechneten Korrektion schon berücksichtigt.

Es bleibt mithin nur der Teil $\frac{h}{\mathfrak{v}_0} \cos i$ der Korrektion von Bedeutung. Wir sehen ab von kleinen Entfernungen, für die das Dreieck AEE' nicht mehr als geradlinig angesehen werden darf, wo also unsre Betrachtungen so wie so keine Gültigkeit mehr haben. Wir notieren uns, um ein Beispiel zu haben, für die schon recht erhebliche Herdtiefe $h = 20$ km die Beträge des variabeln Teils von corr $_{\Delta}T$, also von $\frac{h}{\mathfrak{v}_0} \cos i$. Wählen wir die ersten Vorläufer, so haben wir für die Raumgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ in den äußeren Erdschichten ca. 7 km anzunehmen.

für Δ =	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	20	
beträgt $\frac{h}{\mathfrak{v}_0} \cos i$	1,0	1,7	2,1	2,3	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,6	2,8	also bei
einer Laufzeit von	136	257	358	442	512	572	631	688	743	795	ca. 1100?	
in °/o der Laufzeit	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,2	

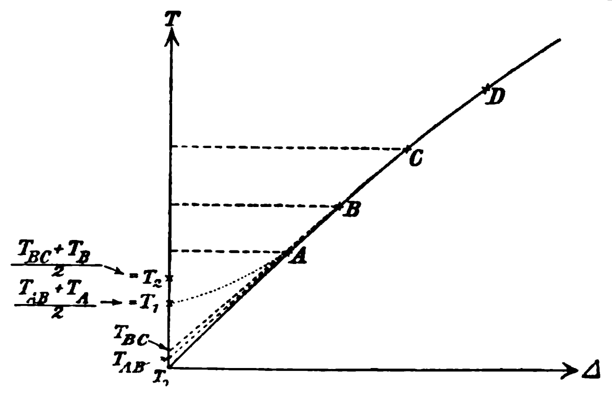
Wollen wir die Erdbebenbeobachtungen, wie es in dieser Arbeit geschehen ist, dazu verwerten, Auskunft über die elastischen Verhältnisse des Erdinnern zu erlangen, so kommt es in erster Linie auf die Verhältnisse der Laufzeiten an, und zwar ganz besonders auf die für größere Entfernungen. Nun beträgt der prozentuale Unterschied des Fehlers, den wir bei Vernachlässigung einer Herdtiefe von 20 km begehen, von $\Delta = 3$ bis $\Delta = 20$ nur 0,4 °/o und von $\Delta = 10$ bis $\Delta = 20$ gar nur 0,1 °/o, kann also unsre auf das Erdinnere bezüglichen Resultate nur außerordent-

lich wenig beeinflussen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Transversalwellen. Unsre Fehlerabschätzung lehrt uns also im Ganzen, daß unbeschadet des Interesses, das die Bestimmung der Herdtiefe eines Erdbebens beanspruchen kann, ihre Berücksichtigung doch keinerlei merklichen Einfluß auf die Schlüsse haben wird, die wir aus den Erdbeobachtungen über die elastischen Verhältnisse des Erdinnern ziehen.

Wie steht es denn überhaupt mit der Bestimmung der Herdtiefe? In größeren Entfernungen vom Epizentralpunkt — also dem Nullpunkt der Abszissen — hat die Laufzeitkurve erfahrungsgemäß einen nach unten konkaven Verlauf. Da aber bei nicht verschwindender Herdtiefe die zum Epizentralpunkt heraufdringenden Wellen hier in der Oberfläche der Erde eine die Wellenfläche tangierende Fläche finden, so müssen wir erwarten, daß die unkorrigierte Laufzeitkurve, wenn wir wieder als Nullpunkt der Zeit den Beginn der Erregung im Epizentralpunkt, nicht den im Auslösungspunkt annehmen, assymptotisch zur Δ (Entfernungs)-Axe in den Nullpunkt hineinläuft. Die Laufzeitkurve muß also kurz vor dem Nullpunkt einen Wendepunkt haben. Die Beziehung zwischen der Lage dieses Wendepunktes und der Herdtiefe ist vielfach diskutiert worden. Doch soll darauf nicht eingegangen werden, da es vorläufig noch niemals geglückt ist, das Umbiegen der Laufzeitkurve durch Beobachtung einwandfrei festzulegen. Auch beim Calabrischen Erdbeben am 8. Sept. 1905, von dem Rizzo[1]) kürzlich eine so vorzügliche Zusammenstellung aller Beobachtungsdaten gegeben hat, kann ein Anwachsen der Oberflächengeschwindigkeit, was mit dem Umbiegen der Laufzeitkurve gleichbedeutend ist, aus der Beobachtung direkt wohl nicht geschlossen werden. Rizzo hat zwar in der am Schluß beigegebenen Laufzeitkurve (Tav. I) das Umbiegen der Kurven für die verschiedenen Wellenarten gezeichnet. Doch sind dabei die nächstgelegenen Stationen Messina, Catania, Ischia und Rocca di Papa nicht berücksichtigt, denn sie liegen alle oberhalb der Kurve. Das Umbiegen der Kurven wird vielmehr erst indirekt aus einer Betrachtung erschlossen, die, wie ich zeigen möchte, so interessant sie ist, eine große Unsicherheit in sich schließt. Es seien A, B, C, D die Beobachtungspunkte, wie sie die dem Herd am nächsten gelegenen Stationen liefern mögen (vgl. Fig. 21). Die Abszissen dieser Punkte sind völlig gegeben, ebenso die oberen Endpunkte der Ordinaten, dagegen nicht ihr

1) G. B. Rizzo. Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8. Sett. 1905. Acc. Reale delle Szienze di Torino (Anno 1905—1906).

gemeinsamer unterer Endpunkt, d. h. es ist der Zeitpunkt, zu dem die Erregung im Epizentralpunkt $\varDelta = 0$ begann, noch zu ermitteln. Rizzo stellt nun für diesen Zeitpunkt zwei Grenzen auf. Den unteren T_{AB} erhält er durch die Annahme, die Oberflächengeschwin-



Figur 21.

digkeit habe bis zum Nullpunkt hin einen konstanten Wert, der durch die Richtung der Kurve zwischen A und B gegeben ist. Als obere Grenze aber benutzt er den Beginn T_A der Erregung in der Station A. Der gefährliche Schritt scheint mir nun darin zu bestehen, daß beide Grenzwerte als gleichwertig angesehen werden und mithin für die Zeit der Erregung im Nullpunkt das arithmetische Mittel $T_1 = (T_{AB} + T_A)/2$ beider angenommen wird. Denn wie die Figur sogleich zeigt, käme man zu einem ganz anderen Nullpunkt für die Ordinaten, wenn statt A und B etwa B und C zufällig die nächsten Stationen wären. Nehmen wir aber doch für einen Augenblick das arithmetische Mittel T_1 zwischen T_{AB} und T_A, wie es Rizzo tut, als Zeitpunkt der beginnenden Bewegung im Nullpunkt an, so müssen wir freilich einen Wendepunkt voraussetzen, um die Laufzeitkurve in stetigem Verlauf von D über CBA nach T_1 hin fortsetzen zu können. Wenn man nun aber auch sagen kann, die elastische Erregung im Epizentralpunkt begann sicher nicht später als zur Zeit T_A und andrerseits wohl nicht viel früher als zur Zeit T_{AB}, so liegt doch wohl keinerlei Grund vor, als Zeitpunkt des wirklichen Beginns gerade das arithmetische Mittel dieser beiden Zeitpunkte anzunehmen. Zum mindesten kein Grund, der sich aus den Beobachtungen selbst erschließen läßt. Es ist somit ersichtlich, wie die Bestimmung des Wendepunktes und der Herdtiefe hier willkürliche Elemente enthält und insbesondere von der zufälligen größeren oder geringeren Entfernung der nächstgelegenen Station abhängt.

Bei der Geschwindigkeit der Erdbebenwellen und der verhältnismäßig nur geringen Tiefe des Herdes wird der Einfluß der Herdtiefe auf die Laufzeit auch in der Nähe des Epizentralpunktes nur auf wenige Sekunden sich belaufen. Zur einwandfreien Bestimmung der Herdtiefe müßte im Bereich der stark veränderlichen Krümmung der Laufzeitkurve, also in der Nähe des Epizentralpunktes selbst, ein enges Netz von Stationen vorhanden sein, die auf Zehntelsekunden genau die Einsätze registrieren. Aber soweit sind wir noch nicht. Vorläufig wird man am besten tun, die doch immer nur geringe Herdtiefe ganz zu vernachlässigen und die Laufzeiten so zu beurteilen, als ob die Auslösungsstelle in der Erdoberfläche selbst läge.

§ 29. Korrektionen wegen verschiedener Umstände.

Wir hatten oben die Endpunkte der Abszissen unsrer Beobachtungspunkte näher diskutiert. Der eine war die Erdbebenstation, der andere der mehrfach besprochene Epizentralpunkt. Berechnen wir aus der Lage dieser beiden Punkte auf der Erdkugel ihre sphärische Entfernung, so erhalten wir den gesuchten Abszissenwert. Doch werden bei noch etwas feinerer Beobachtung Korrektionen an dieser Entfernung sehr bald notwendig werden. Die wichtigste unter diesen rührt her von der Abplattung der Erde. Denke ich mir ein Beben am Äquator und zwei Stationen, die eine am Pol, die andere ebenfalls auf dem Äquator, beide aber 90^0 entfernt vom Ort des Bebens, so werden beiden Stationen nach unseren bisherigen Betrachtungen gleiche Abszissen zugeordnet, die Wege für den Bebenstrahl und mithin auch die Laufzeiten, sind aber nach den beiden Stationen hin verschieden. Man muß also an der Entfernung oder an der Laufzeit entsprechende Korrektionen anbringen. Es kann diese Korrektion z. B. für die Laufzeit bis zu drei Sekunden ausmachen. Man bezieht sich dabei vielleicht am besten auf eine Referenzkugel. Laufzeit und Entfernung werden dann von und bis zu dieser Referenzkugel gerechnet. Erhebt sich z. B. eine Beobachtungsstation wegen der Ellipsoidgestalt der Erde über die Bezugskugel, so kann man die wirklich beobachtete Laufzeit beibehalten, muß aber die Abszisse verlängern um das Wegstück von der Referenzkugel bis zur Ellipsoidoberfläche, gemessen in der Richtung des Erdbebenstrahles.

In ähnlicher Weise kann man der Meereshöhe einer Station Rechnung tragen, obwohl die Korrektionen hier meist nur Bruchteile einer Sekunde betragen. Aber auch nach Einführung aller gedachter Korrektionen werden zwei in gleicher Entfernung, aber

verschiedener Richtung gelegene Stationen nicht völlig gleichzeitige Einsätze liefern. Es wird sich der Umstand geltend machen, daß die Erde vermutlich nicht in konzentrischen Kugel-, sondern in konzentrischen Ellipsoidschalen homogen ist. Andrerseits wird auch dieses modifizierte Gesetz namentlich in den äußeren Schichten nicht streng erfüllt sein, es werden lokale Abweichungen, Änderungen der Elastizitätsverhältnisse auch innerhalb einer Schale, von Ort zu Ort sich geltend machen. Doch sind die dadurch veranlaßten Abweichungen, nach allem zu schließen, nur äußerst gering und anscheinend kleiner, als die zur Zeit noch unvermeidlichen Fehler der Erdbebenbeobachtung. Es hat somit noch weite Wege, bis ein immer mehr verfeinerter Erdbebenbeobachtungsdienst auch derartige Einzelheiten klar legen wird. Vorläufig müssen wir uns begnügen, die Erdbebenbeobachtungen zu Schlüssen, die sich auf die Erde als Ganzes beziehen, zu verwenden, wobei es überraschen muß und für diesen Zweck sich als äußerst vorteilhaft erweist, daß offenbar in sehr weitgehendem Maß unsre Annahme der Homogenität in konzentrischen Kugelschalen erfüllt ist.

§ 30. Beobachtungsmaterial zur Aufstellung der Laufzeitkurven.

Nach vielfachen und eingehenden Beratungen mit Professor Wiechert beschloß ich, zur Konstruktion der Laufzeitkurven bei dieser Arbeit nur drei Erdbeben zu benutzen, für welche ein besonders gutes Beobachtungsmaterial bekannt ist: Das Indische Beben vom 4. April 1905, das Calabrische Beben vom 8. September 1905 und das Kalifornische Beben vom 18. April 1906. Wie weit den so erhaltenen Kurven eine größere Genauigkeit zukommt, als den bislang von anderen Autoren mitgeteilten, wird natürlich erst der Vergleich mit zukünftigen Erdbeben zeigen können. Jedenfalls muß der provisorische Charakter auch dieser Kurven ausdrücklich hervorgehoben werden und zwar bezieht sich das namentlich auf die größeren Entfernungen. Von dem nicht mehr ganz sicheren Punkte bei $\Delta = 11$ an trägt die Kurve sogar ganz extrapolatorischen Charakter und stellt nur den berechneten Verlauf dar unter der Annahme, daß in den betreffenden von den Erdbebenstrahlen durchsetzten Tiefen der Erde die Geschwindigkeit der Longitudinal- und der Transversalwellen keine Änderung mehr erleidet, eine Annahme, von der man wohl nicht erwarten darf, daß sie tatsächlich erfüllt ist, die vielmehr nur zum Ausdruck bringt, daß wir darüber noch nichts auszusagen vermögen.

Dem vorläufigen Charakter der Laufzeitkurven entsprechend,

sind auch die in den Vorbemerkungen aufgestellten Prinzipien durchaus nicht in allen Punkten berücksichtigt. So verzichtete ich auf die dort geforderte direkte Vergleichung der Originalkurven oder der Kopien derselben und zwar im Hinblick auf die Schwierigkeit, von allen in Betracht kommenden Stationen Kopien der Registrierungen zu erhalten. Ich benützte vielmehr die Angabe der Einsätze der ersten und zweiten Vorläufer, wie sie in den periodisch erscheinenden Berichten der verschiedenen Stationen gemacht sind. Da dem Verfahren dadurch schon eine ziemliche Ungenauigkeit anhaftet, schien es vorläufig auch überflüssig, die oben einzeln aufgeführten Korrektionen an Laufzeit und Entfernung zu berücksichtigen. Wie der Epizentralpunkt jeweils ermittelt wurde, soll bei den einzelnen Beben angegeben werden. Die Entfernungen wurden mittels der Formel

$$\cos \Theta = \sin \varphi \,.\, \sin \varphi_0 + \cos \varphi \,.\, \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)$$

berechnet. Hier bedeuten φ und λ Breite und Länge der Beobachtungsstation, φ_0, λ_0 die des Epizentralpunktes und Θ den zur Entfernung beider Orte gehörigen Centriwinkel, aus dem die Entfernung selber durch Multiplikation mit 111,3 hervorgeht. Die Entfernung ist auf 10 km abgerundet. Länge und Breite aller berücksichtigten Stationen sind weiter unten in einer Tabelle zusammengestellt.

1) Indisches Erdbeben, 4. April 1905.

Das indische Beben vom 4. April 1905 war trotz seiner ungemein zerstörenden Wirkung doch auf ein enges Gebiet beschränkt. Die Zeitangaben über den ersten Einsatz nach den Registrierungen der Stationen Bombay, Calcutta und Madras, die mit dem nur siebenfach vergrößernden photographierenden Milne-Pendel ausgerüstet sind, stimmen für unsre Zwecke nicht genügend genau überein, so schien es geraten, die nächste mit feiner auflösenden Apparaten ausgestattete Station Tiflis, die freilich schon 2980 km entfernt liegt, heranzuziehen, um die Zeit des Bebenbeginns im Epizentralpunkt zu ermitteln. Für die Festlegung dieses Punktes selber blieb nur der Ausweg übrig, ungefähr den Mittelpunkt des am meisten von der Zerstörung betroffenen Gebietes dafür anzunehmen. Da nach Zeitungsmeldungen hauptsächlich das Gebiet von Dharmsala und das Kangratal heimgesucht wurde, so nahm ich als Auslösungspunkt den Ort

$$\varphi_0 = 32^\circ\ 18'\ N \text{ und } \lambda_0 = 76^\circ\ 24'\ E \text{ (Greenwich)}$$

an. Aus der Laufzeitkurve, wie sie uns das folgende Beben liefern

wird, entnehmen wir die Laufzeit für 2980 km. Diese ist von der Zeit des ersten Einsatzes in Tiflis abzuziehen. So erhalten wir für die Zeit des Bebens $0^h\ 55^m\ 37^s - 356^s = 0^h\ 49^m\ 41^s$.

Nimmt man dies als die Auslösungszeit am Ort des Bebens, so erhält man folgende Tabelle der Laufzeiten:

Station	Entf.	Erste Vorläufer	Laufzeit	Zweite Vorläuf.	Laufzeit	Quelle
Taschkent	1185	$0^h\ 52^m\ 24^s$	163	$0^h\ 54^m\ 26^s$	285	Bulletin de la Commission-Centrale Sismique Permanente Petersburg, 1906.
Schemacha	2630	. 55 9	328	. 59 44	603	
Tiflis	2980	. 55 37	356	1^h 00 17	636	
Irkutsk	3160	. 55 48	367	. 00 54	673	
Batum	3230	. 56 9	388	. 01 2	681	
Upsala	5230	. 58 22	521	. 05 19	938	Åckerblom, Seismische Registrierungen in Upsala. Göttingen, 1906.
Potsdam	5460	. 58 44	543	. 05 48	967	O. Hecker, Seismometrische Beobachtungen, Potsdam, 1906.
Leipzig	5510	. 58 44	543	. 05 53	972	Fr. Etzold, Sechster Bericht u. s. w. Leipzig, 1906.
Jena	5570	. 58 54	553	. 06 6	985	O. Eppenstein, Monatl. Erdbebenberichte u. s. w. Jena, 1905.
Hamburg	5660	. 58 14	513	. 05 47	966	R. Schütt, Mitteilungen der Hauptstation u. s. w. Hamburg, 1906.
Göttingen	5680	. 58 55	554	. 06 8	987	G. Angenheister, Seismische Registrierungen u. s. w. Göttingen, 1906.

2) Calabrisches Erdbeben; 8. September 1905.

Als Grundlage diente hier die sorgfältige Zusammenstellung von G. B. Rizzo [1]). Dieser Publikation ist auch der Ort des Epizentralpunktes entnommen, nämlich der Punkt $\varphi_0 = 38°\ 50'\ N$,

1) l. c. 1906.

$\lambda_0 = 16^{\circ}\,16'\,E$, desgleichen die Werte der Entfernung nach den verschiedenen Stationen. Die Zeit des Bebens ist unter der Annahme berechnet, daß die elastische Erregung vom Epizentralpunkt bis zur nächstgelegenen Station Messina sich mit konstanter Geschwindigkeit von etwa 7 km/Sekunde fortgepflanzt hat. Da Messina von dem angegebenen Epizentralpunkt etwa 80 km entfernt ist, so wurde vom ersten Einsatz in Messina eine Laufzeit von 12 Sekunde abgezogen, womit sich als Auslösungszeit die Zeit $1^h\ 43^m\ 5^s$ ergibt. Mit diesem Nullpunkt der Ordinaten erhalten wir für unsre Laufzeitkurve vom Calabrischen Beben folgende Tabelle:

Station	Entferng.	Erste Vorläufer	Laufzeit	Zweite Vorläufer	Laufzeit	Quelle
Messina	80	$1^h\ 43^m\ 17^s$	12^s			G. B. Rizzo. Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8. Sett. 1905 Acc. Reale delle Szienze di Torino (Anno 1905—06).
Catania	170	43 30	25			
Ischia	270	43 47	42			
Rocca di Papa	430	44 0	55			
Wien	1050	45 18	133			
München	1100	45 43	158			
Jena	1390	46 2	177	$48^m\ 36^s$	331	
Göttingen	1490	46 22	197	49 6	361	
Potsdam	1530	46 25	200	49 0	355	O. Hecker, Seismometr. Beobachtungen.
Upsala	2340	47 50	285	51 44	519	G. B. Rizzo, l. c.
Tiflis	2450	48 14	309	52 23	558	
Bergen	2500			52 30	565	
Cheltenham	7660			$2^h\ 3\ 11$	1206	

3. Kalifornisches Erdbeben (San Francisco), 18. April 1905.

Beim Kalifornischen Beben vom 18. April 1906 traten längs einer mehrere 100 km langen Linie Verschiebungen der beiden Bruchränder gegen einander im wechselnden Betrag von mehreren Metern auf[1]). Es kann kaum zweifelhaft sein, daß an irgend einer Stelle dieser Rißfläche auch die Auslösungsstelle dieser mächtigen Rißbildung zu suchen ist, von der die elastische Erregung ausging, die als erster Welleneinsatz von allen Stationen registriert wurde. Welchen Punkt auf der langen Linie wir jedoch dafür anzunehmen

1) Vergl. den makroseismischen Monatsbericht der K. Hauptstation Straßburg i. E. vom April 1906.

haben, läßt sich nicht ohne weiteres angeben. Nehmen wir die Registrierungen in Berkeley um 13h 12m 6s und auf dem Mount Hamilton um 13h 12m 12s zu Hülfe und nehmen wir wieder an, die Erregung habe sich mit einer Geschwindigkeit von 7 km/Sek. nach diesen beiden Stationen hin fortgepflanzt, so kommt man zu einem Punkt der Verwerfungslinie, der etwas südlich von San Francisco gelegen ist, nämlich zum Punkt $\varphi_0 = 37° 35' N$, $\lambda_0 = 122° 26' W$. Von Berkeley ist dieser Punkt etwa 35, von der Lickstemwarte etwa 80 km entfernt, was nach den beiden Orten hin die Lautzeiten von 5 bezw. 11 Sekunden ergibt. Subtrahiert man diese Laufzeiten von der Zeit der Einsätze in Berkeley und auf dem Mount Hamilton, so kommt man übereinstimmend zu dem Zeitpunkt 13h 12m 1s für die Auslösung des Bebens im Epizentralpunkt.

Für die Laufzeiten erhalten wir folgende Tabelle:

Station	Entferng.	Erste Vorläufer	Laufz.	Zweite Vorläufer	Laufz.	Bemerkungen
Baltimore	3910	13h 19m 24s	443	13h 25m 12s	791	L. A. Bauer, Magnetograph Records of. Earthquakes etc., Terr. Magn. and Atmosph. Elektr. 11, S. 135 1906.
Cheltenham	3940	. 19 24	443	. 25 04	783	
Washington	3960	. 19 20	439	. 25 0	779	
Samoa	7680	. 23 22	681	32 24	1223	F. Linke, Erdbebenberichte u. s. w. Apia, 1906.
Mizusawa	7950	. 24 07	726	. 33 14	1273	F. Omori, Note on the San Francisco Earthquake u.s.w.
Upsala	8610	. 24 24	743	34 1	1320	Ablesung nach einer von Herrn Åckerblom freundlichst übersandten Kopie der Aufzeichnung.
Osaka	8650	. 24 24	743	. 34 13	1332	F. Omori. l. c.
Kobe	8670	. 24 23	742	. 34 19	1338	
Göttingen	9070	. 24 34	753	. 34 42	1361	G. Angenheister, Wöchentl. Erdbebenber. u. s. w. Göttingen, 1906.
Jena	9200	. 24 34	753	. 35 9	1388	O. Eppenstein, Monatsberichte u.s.w. Jena, 1906

Station	Ent-ferng.	Erste Vorläufer	Laufz.	Zweite Vorläufer	Laufz.	Bemerkungen
Straßburg	9280	. 24 51	770	. 35 18	1397	A. Sieberg, Wöchentliche Erdbebenberichte u. s. w. Straßburg, 1906.
Wien	9630	. 25 03	782	. 34 45	1364	V. Conrad, Wöchentliche Erdbebenberichte u. s. w. Wien, 1906.
Tiflis	11110	. 26 09	848	. 37 59	1558	P. v. Stelling, Wöchentl. Erdbebenber. u. s. w. Tiflis, 1906.

Geographische Lage der benutzten Beobachtungsstationen.

	φ_0	λ_0		φ_0	λ_0
Baltimore	39°18′ N.	76°37′ W.	Mizusawa	39° 8′ N.	141° 8′ E.
Batum	41 40 N.	41 38 E.	München	48 9 N.	11 37 E.
Bergen	60 24 N.	5 18 E.	Osaka	34 40 N.	135 30 E.
Catania	37 30 N.	15 5 E.	Potsdam	52 23 N.	13 4 E.
Cheltenham	38 44 N.	76 50 E.	Rocca di Papa	41 46 N.	12 43 E.
Göttingen	51 33 N.	9 58 E.	Samoa	13 48 S.	171 46 W.
Hamburg	53 34 N.	10 1 E.	Schemacha	40 39 N.	48 40 E.
Jena	50 56 N.	11 35 E.	Straßburg	48 35 N.	7 46 E.
Irkutsk	52 17 N.	104 16 E.	Taschkent	41 19 N.	69 18 E.
Ischia	40 44 N.	13 54 E.	Tiflis	41 43 N.	44 48 E.
Kobe	34 42 N.	135 11 E.	Upsala	59 51 N.	17 38 E.
Leipzig	51 20 N.	12 23 E.	Washington	38 54 N.	77 3 W.
Messina	38 12 N.	15 33 E.	Wien	48 15 N.	16 21 E.

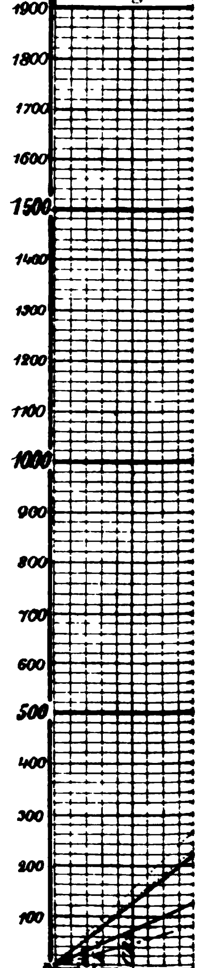
Die beigegebene Tafel I enthält das mitgeteilte Beobachtungsmaterial und die daraus sich ergebenden Laufzeitkurven für die ersten und zweiten Vorläufer, aus denen die Kurven für die reflektierten Wellen durch einfache Rechnung abgeleitet sind. Tafel II bringt einen Vergleich zwischen einigen in den letzten Jahren aufgestellten Laufzeitkurven. Die Tafel III giebt einerseits einen Ueberblick über den Sinus des Einfallswinkels der Erdbebenstrahlen, andrerseits eine Uebersicht über die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in verschiedenen Tiefen der Erde. Dabei geben die Kurven 1 und 2 das Resultat der Rechnungen

unter Zugrundlegung der Laufzeitkurven von Tafel I. Ueber die Rechnung selbst wird Näheres in Teil III dieser Arbeit mitzuteilen sein. Außerdem enthält Tafel III noch die Wiedergabe der Vorläufer eines Fernerdbebens, um daran den Einsatz der an der Erdoberfläche reflektierten Wellen zu zeigen.

Tafel

für die haup

1. Laufzeitl
   Erde und
   zu erwa
2. Longitud
   2a einma
   2b zwein
   2c dreim
3. Transver
   3a einma
   3b zwein
   3c dreim
4. Wellen,
   und eine
   Transver
5. Oberfläc
6. Oberfläc
   salwellen
   dem Auf
   diagramm



10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

1.0

.95

.9

.85

.8

.75

.7

.65

.6

.55

.5

.45

.4

.35

.3

.25

.2

.15

.1

.05

0

Über Differenzenformeln zur Durchrechnung optischer Systeme.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. Juli 1907.

L. Seidel hat in den Sitzungsberichten der math.-physikalischen Klasse der kgl. bayrischen Akademie der Wissenschaften vom 10. Nov. 1866 ein Gleichungssystem zur trigonometrischen Verfolgung eines beliebigen Lichtstrahls durch ein centriertes Linsensystem entwickelt, welches in den optischen Werkstätten allgemein Verwendung gefunden hat.

„Ich muß indessen zum Schlusse noch bemerken", sagt Seidel im letzten Passus seiner Abhandlung, „daß ich für die eigentlich angemessene (d. h. der Natur der Aufgabe am besten entsprechende) Art, in oder außer der Axenebene den Gang des Lichtes durch optische Apparate rechnerisch zu verfolgen, eine wesentlich andere halte, nach welcher man direkt nicht die ganzen Größen sucht, welche die Lage eines Strahls nach beliebig vielen Brechungen bestimmen, sondern nur ihre Abweichungen von denjenigen Werten, die nach den Näherungsformeln (ersten Grades) stattfinden würden. Nach diesem Verfahren hat man nur mit kleinen Größen zu agiren, die durch wenige Dezimalen genau genug gefunden werden, weil sie unmittelbar das repräsentieren, was uns im optischen Bilde als Fehler erscheint. Auch diese Behandlung der Aufgabe ist eleganter Ausdrücke fähig, welche in einer ganz analogen Beziehung zu denjenigen der früher von mir entwickelten Fehler dritter Ordnung (im allgemeinen Falle des Raumes) stehen, wie die Gleichungen mit endlichen Differenzen zu den Differentialformeln ..."

Seidel's „elegante Ausdrücke" sind von ihm selbst nicht publiziert und, wie mir Herr S. Finsterwalder freundlichst mitteilte, auch in seinem Nachlaß nicht gefunden worden. Eine Durchführung hat der von Seidel vorgezeichnete Gedanke inzwischen nur für den speziellen Fall von Strahlen, die die Axe des Systems schneiden, gefunden und zwar in Gestalt der schönen Formel, welche Herr Kerber für die sphärische Aberration angegeben hat. Für den allgemeinen Fall beliebiger gegen die Axe windschiefer Strahlen kann man mannigfaltige Differenzenformeln bilden, die alle Seidel's allgemeiner Idee entsprechen. Unter den verschiedenen Systemen, die ich mir — zum Teil ohne Kenntnis jenes Seidel'schen Passus, aber aus derselben naturgemäßen Idee heraus — gebildet hatte, möchte ich hier zunächst eines mitteilen, welches die unmittelbare Verallgemeinerung der Kerber'schen Formel auf beliebige windschiefe Strahlen darstellt. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß dieses Formelsystem außer der von Seidel erwähnten Beschränkung der Rechnung auf weniger Dezimalen auch noch den Vorteil hat, den Beitrag jeder einzelnen brechenden Fläche zu den Abbildungsfehlern getrennt anzugeben. Ich hoffe daher, daß das hier angegebene Rechenschema in den praktischen Gebrauch der optischen Werkstätten Eingang finden möge. Um die Einführung zu erleichtern, habe ich mich nahe an die Seidel-sche Bezeichnungsweise gehalten und eine Hülfstafel zur Abkürzung bei vierstelliger logarithmischer Rechnung beigefügt.

Bezeichnungen. Die Seidel'schen Brechungsformeln.

Es sei ein centriertes optisches System gegeben. Die optische Axe, die wir horizontal denken wollen, wähle man als x-Axe und rechne x positiv nach der Seite, von welcher das Licht einfällt. Die positive y-Axe gehe vertikal nach oben, die positive z-Axe liege horizontal, von der $+x$-Axe aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers gegen die $+y$-Axe gedreht. Von den brechenden Flächen des Systems, welche alle sphärisch sein sollen, greifen wir zunächst eine heraus, deren Mittelpunkt die Abscisse $x = M$ habe und deren Radius gleich R sei. Die Brechungsexponenten vor und hinter der Fläche seien n und n'. Der Uebergang vom einfallenden zum gebrochenen Strahl soll überall durch einen Accent bezeichnet werden.

Man zeichne die „Strahlebene", diejenige Ebene, in welcher der einfallende Strahl PS und der gebrochene Strahl PS' verlaufen und welche dann auch den Radius MP, die Flächennormale

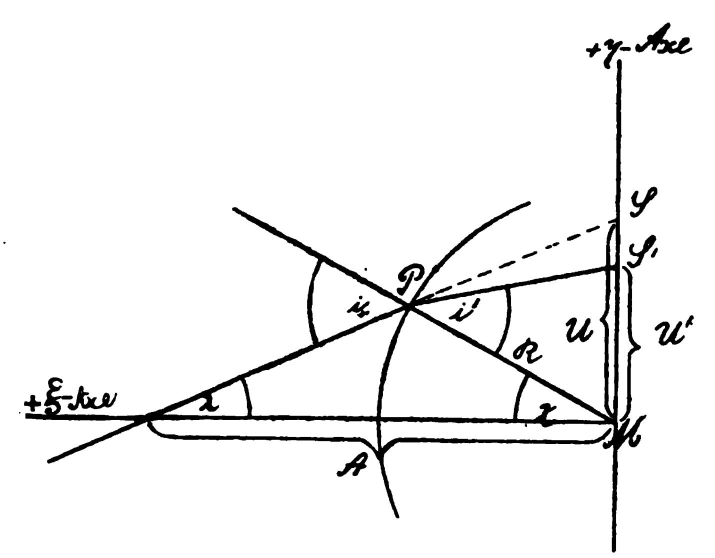


Fig. 1.

im Schnittpunkt P des Strahls mit der Fläche, enthält. Man projiziere ferner die $+x$-Axe auf die Strahlebene. Die Projektion sei MA. Schließlich bringe man die Strahlebene zum Schnitt mit einer „Normalebene“ ε, die im Mittelpunkt M der Fläche senkrecht auf der x-Axe steht. Die Schnittlinie MS wird dann auch senkrecht auf der Projektion MA der x-Axe stehen und durch beide Geraden wird ein Axenkreuz in der Strahlebene festgelegt sein, das wir als $\xi\eta$-System bezeichnen wollen.

Man nenne λ den Winkel des einfallenden Strahls, χ den Winkel des Radius MP mit der ξ-Axe. Dann gilt für den Winkel zwischen Strahl und Radius i:

$$i = \chi + \lambda \tag{1}$$

und es folgt für die Strecke $SM = U$, die der Strahl auf der η-Axe abschneidet.

$$U = \frac{R \sin i}{\cos \lambda} \tag{2}$$

Für den gebrochenen Strahl hat man entsprechend:

(3) (4) $$i' = \chi + \lambda', \quad U' = \frac{R \sin i'}{\cos \lambda'}$$

und es gilt das Brechungsgesetz:

$$n \sin i = n' \sin i'. \tag{5}$$

Die Lage des Strahls in der Strahlebene ist durch U und λ

charakterisiert und die vorstehenden Formeln gestatten aus den Werten für den einfallenden Strahl zu denen für den gebrochenen Strahl überzugehen.

Wir haben nun noch weiter die Lage der Strahlebene im Raume zu fixieren. Dies soll so geschehen:

Man gebe den Winkel μ zwischen der ξ-Axe und der x-Axe, sowie den Winkel ζ zwischen der η-Axe und der y-Axe. Der Winkel μ ist die Neigung der Strahlebene gegen die optische Axe und ζ kann als „Azimuth" der Strahlebene bezeichnet werden. Es sei gleich hervorgehoben, daß μ und ζ bei der Brechung invariant sind.

Was Vorzeichen und Richtungssinn angeht, treffe man folgende Festsetzungen. Man bezeichne diejenige Seite der η-Axe als die positive, welche vom Strahl wirklich getroffen wird (einfallender und gebrochener Strahl schneiden stets auf derselben Seite); die Größe U und U' sind hiernach immer positiv zu rechnen. Der Winkel λ sei positiv, wenn der Strahl zu größerem η ansteigt. Der Winkel χ sei positiv, wenn der Radius im ersten und dritten Quadranten des $\xi-\eta$-Systems verläuft. Man muß dann, um den obigen Formeln allgemeine Gültigkeit zu geben, R positiv zählen, wenn die Fläche konvex gegen den einfallenden Strahl ist, im entgegengesetzten Falle negativ, und man hat i und i' dasselbe Vorzeichen wie R zu geben. Der Winkel ζ werde von der $+y$-Axe nach der $+z$-Axe hin wachsend gezählt und μ sei positiv, wenn die $+\eta$-Axe von der $+x$-Axe aus gesehen rechts erscheint.

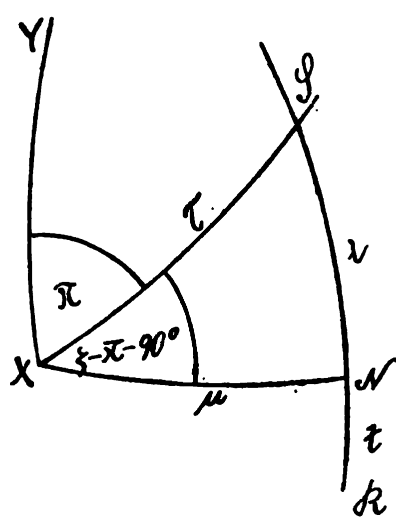


Fig. 2.

So ist der Strahl durch die 4 Daten U, λ, μ, ζ festgelegt. Wir wollen mit Hülfe derselben noch andere Stücke des Strahlverlaufs, deren Kenntnis erwünscht ist, ausdrücken.

a) Nennt man τ den (stets positiven) Winkel des Strahls mit der x-Axe und $\varkappa$ das Azimuth des Strahls, welches in derselben Weise, wie das Azimuth, ζ und zwar für die rückwärtige Richtung des Strahls gezählt werden soll, so erhält man auf einer Einheitskugel, durch deren Mittelpunkt man Parallele zu allen in Betracht kommenden Richtungen legt, folgende Figur. X bezeichnet die

Richtung der optischen Axe, S die des nach rückwärts verlängerten Strahls, R die des nach rückwärts gezogenen Radius, XY den Schnitt der Vertikalebene, SR die Strahlebene, XN die Normale auf die Strahlebene. Das rechtwinkliche Dreieck XNS giebt dann die Beziehungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\lambda = \sin\tau\sin(\zeta-\varkappa-90^0) = -\sin\tau\cos(\zeta-\varkappa) \\ \sin\mu\cos\lambda = \sin\tau\cos(\zeta-\varkappa-90^0) = \sin\tau\sin(\zeta-\varkappa) \\ \cos\mu\cos\lambda = \cos\tau \end{cases}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\tau\cos\varkappa = \sin\zeta\operatorname{tg}\mu - \cos\zeta\dfrac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos\mu} \\ \operatorname{tg}\tau\sin\varkappa = -\cos\zeta\operatorname{tg}\mu - \sin\zeta\dfrac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos\mu} \\ \operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}\tau\sin(\zeta-\varkappa) \end{cases}$$

Entsprechend ist:

$$(7')\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\tau'\cos\varkappa' = \sin\zeta\operatorname{tg}\mu - \cos\zeta\dfrac{\operatorname{tg}\lambda'}{\cos\mu} \\ \operatorname{tg}\tau'\sin\varkappa' = -\cos\zeta\operatorname{tg}\mu - \sin\zeta\dfrac{\operatorname{tg}\lambda'}{\cos\mu} \\ \operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}\tau'\sin(\zeta-\varkappa') \end{cases}$$

b) Die Gleichungen des Strahls lauten in Parameterform, wenn die Länge l des Strahls vom Schnittpunkt mit der Normalebene ε an als Parameter gewählt wird:

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= M + l\cos\tau \\ y &= U\cos\zeta + l\sin\tau\cos\varkappa \\ z &= U\sin\zeta + l\sin\tau\sin\varkappa \end{aligned}$$

Die Schnittkordinaten mit der Normalebene $x = M + q$ werden daher:

$$(9)\quad y = U\cos\zeta + q\operatorname{tg}\tau\cos\varkappa, \quad z = U\sin\zeta + q\operatorname{tg}\tau\sin\varkappa$$

oder mit Hülfe unsrer 4 Bestimmungsstücke des Strahls ausgedrückt:

$$(10)\quad \begin{aligned} y &= \cos\zeta\left(U - q\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos\mu}\right) + \sin\zeta\,.\,q\operatorname{tg}\mu \\ z &= \sin\zeta\left(U - q\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos\mu}\right) - \cos\zeta\,.\,q\operatorname{tg}\mu \end{aligned}$$

Die Seidel'schen Uebergangsformeln und die Strahlinvariante. Wir ziehen jetzt außer der bisher behandelten

brechenden Fläche noch die nächstfolgende in Betracht. Alles, was sich auf diese neue Fläche bezieht, soll zu der bisherigen Bezeichnung noch den Index 1 erhalten, sodaß z. B. i_1 und i_1' Einfalls- und Brechungswinkel für die neue Fläche bedeuten. Größen, welche dem Gebiet zwischen den beiden Flächen angehören, ohne speziell auf eine der beiden Flächen Bezug zu haben, können daher entweder mit einem Accent oder mit dem Index 1 bezeichnet werden. Es ist also:

$$\tau' = \tau_1, \quad \varkappa' = \varkappa_1, \quad n' = n_1.$$

Die Mittelpunktsabscisse der neuen Fläche sei:

$$M_1 = M - D_1. \tag{11}$$

Die Schnittkoordinaten des Strahls mit der Normalebene durch M_1 ergeben sich einerseits, indem man in den für den gebrochenen Strahl angeschriebenen Gleichungen (9): $q = -D_1$ setzt:

$$\begin{aligned} y &= U' \cos \zeta - D_1 \operatorname{tg} \tau_1 \cos \varkappa_1 \\ z &= U' \sin \zeta - D_1 \operatorname{tg} \tau_1 \sin \varkappa_1. \end{aligned}$$

Andererseits folgt mit Hülfe der für die neue Fläche gültigen Größen U_1, ζ_1:

$$y = U_1 \cos \zeta_1 \quad z = U_1 \sin \zeta_1.$$

Durch Verbindung dieser Ausdrücke ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} U_1 \cos(\zeta_1 - \varkappa_1) &= U' \cos(\zeta - \varkappa_1) - D_1 \operatorname{tg} \tau_1 \\ U_1 \sin(\zeta_1 - \varkappa_1) &= U' \sin(\zeta - \varkappa_1) \end{aligned} \tag{12}$$

welche den Uebergang zu den für die neue Fläche geltenden Größen U_1 und ζ_1 vermitteln. Mit Hülfe von U_1, ζ_1, τ_1, $\varkappa_1$ lassen sich dann nach den Gleichungen (6), wofern man alle Größen mit dem Index 1 versieht, auch λ_1 und μ_1 für die neue Fläche berechnet, womit der Uebergang für alle Variable vollendet ist.

Für diesen Uebergang ergibt sich in folgender Weise eine Invariante. Es ist:

$$U \cos \lambda = R \sin i, \quad U' \cos \lambda' = R \sin i'$$
$$n U \cos \lambda = n_1 U' \cos \lambda'$$
$$n U \cos \lambda \sin \mu = n_1 U' \cos \lambda' \sin \mu,$$

also nach (6):

$$n U \sin \tau \sin(\zeta - \varkappa) = n_1 U' \sin \tau' \sin(\zeta - \varkappa') = n_1 U' \sin \tau_1 \sin(\zeta - \varkappa$$

oder nach (12):

$$n U \sin \tau \sin(\zeta - \varkappa) = n_1 U_1 \sin \tau_1 \sin(\zeta_1 - \varkappa_1).$$

Diese Größe ist also beim Uebergang von einer Fläche zur andern und damit für den Gang des Strahls durch das ganze System hindurch invariant. Wir setzen:

$$J = n U \sin \tau \sin (\zeta - \varkappa) \tag{13}$$

und finden aus (6) und (2) auch den Ausdruck:

$$J = n R \sin i \sin \mu. \tag{14}$$

Beziehung zu Seidel's Bezeichnungen. Die Größen n, U, ζ, τ, $\varkappa$ sind identisch mit den von Seidel so bezeichneten. Hingegen gilt für Seidel's Winkel λ_s, i_s und den von ihm benutzten Radius R_s folgende Beziehung zu den hier benutzten Größen:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Für positives } R: & R_s = R & i_s = i & \lambda_s = 90^0 - \lambda \\ \quad\text{„ negatives } R: & R_s = -R & i_s = -i & \lambda_s = 90^0 + \lambda \end{array}\right. \tag{15}$$

Seidel rechnet R und i immer positiv, hat aber den Nachteil, für konkave und konvexe Flächen zwei verschiedene Formelsysteme angeben zu müssen, was mir namentlich für die folgende Ableitung unzuträglich schien.

Formeln der Gauss'schen Dioptrik. Die Gauß'sche Dioptrik, welche für axennahe Strahlen gilt, liefert folgendes Resultat für die Brechung an einer Fläche des Krümmungsradius R und der Mittelpunktskordinate $x = M$:

Ein Punkt mit den Kordinaten $x - M = A$, $y = Y$, $z = Z$ wird durch die Brechung abgebildet in den Punkt:

$$x - M = A', \quad y = Y', \quad z = Z',$$

wobei gilt:

$$n\left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{R}\right) = n'\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R}\right) \tag{16}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{A'}{A}. \tag{17}$$

Der Uebergang auf die nächste Fläche wird gegeben durch die Beziehungen:

$$Y' = Y_1, \quad Z' = Z_1, \quad A_1 = A' + D_1. \tag{18}$$

Es empfiehlt sich für die spätere Anwendung auf ein System aus beliebig vielen Flächen noch Größen H, H' einzuführen, die zu Y, Y' resp. Z, Z' proportional sind, also zu setzen:

$$\frac{H'}{H} = \frac{A'}{A}, \quad H' = H_1 \tag{19}$$

und einen allen Größen H gemeinsamen Proportionalitätsfaktor einstweilen noch zur Verfügung zu behalten.

Die Schnitte des Strahls mit einer Hauptebene.

Der geometrische Gedanke der folgenden Ableitungen ist der, daß wir die Schnitte des Strahls mit einer beliebigen durch die Axe des Systems gelegten Ebene verfolgen. Eine durch die x-Axe gelegte Ebene werde „Hauptebene" genannt. Jeder Schnitt mit der Hauptebene werde charakterisiert durch seine vom nächsten Flächenmittelpunkt an gerechnete x-Kordinate, seine „Schnittweite", und durch den Abstand des Schnittpunktes von der x-Axe, die „Schnitthöhe". Ist das Azimuth der Hauptebene ψ, die Schnittweite a, die Schnitthöhe h — und zwar a und h gültig für den Strahlverlauf vor der ersten von uns betrachteten Fläche — so sind die Koordinaten des Schnittpunkts des einfallenden Strahls mit der Hauptebene:

$$x - M = a, \quad y = h \cos \psi, \quad z = h \sin \psi. \tag{20}$$

Es ist offenbar, daß für einen axennahen Strahl die Schnittweiten a mit den oben eingeführten Gauß'schen Schnittweiten A, y und z mit den Gaußschen Kordinaten Y, Z identisch werden. Für einen beliebigen Strahl bestehen für unsre Schnittweiten und -Höhen Beziehungen, die den Gauß'schen verwandt sind und aus folgender Ableitung hervorgehen:

Die Verbindung der Gleichungen (20) mit den Gleichungen (9) und (10), in welchen man q durch a zu ersetzen hat, giebt

$$h \cos \psi = \cos \zeta \left(U - a \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \mu} \right) + \sin \zeta \, a \operatorname{tg} \mu = U \cos \zeta + a \operatorname{tg} \tau \cos \varkappa$$

$$h \sin \psi = \sin \zeta \left(U - a \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \mu} \right) - \cos \zeta \, a \operatorname{tg} \mu = U \sin \zeta + a \operatorname{tg} \tau \sin \varkappa$$

und hieraus:

$$h \sin (\zeta - \psi) = a \operatorname{tg} \mu, \quad h \sin (\psi - \varkappa) = U \sin (\zeta - \varkappa)$$

$$0 = \sin (\zeta - \psi) \left(U - a \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \mu} \right) - \cos (\zeta - \psi) \, a \operatorname{tg} \mu$$

oder, indem man:

$$U = \frac{R \sin i}{\cos \lambda}$$

einsetzt:

(21) (22) $$\frac{a}{h} = \operatorname{cotg}\mu \sin(\zeta-\psi), \quad \frac{h}{U} = \frac{\sin(\zeta-\pi)}{\sin(\psi-\pi)}$$

(23) $$\frac{R\sin i}{a} = \frac{\sin\lambda}{\cos\mu} + \operatorname{cotg}(\zeta-\psi)\cos\lambda \operatorname{tg}\mu.$$

Entsprechend gilt für den gebrochenen Strahl:

(21′) $$\frac{a'}{h'} = \operatorname{cotg}\mu\sin(\zeta-\psi),$$

(23′) $$\frac{R\sin i'}{a'} = \frac{\sin\lambda'}{\cos\mu} + \operatorname{cotg}(\zeta-\psi)\cos\lambda' \operatorname{tg}\mu.$$

Daraus folgt zunächst:

(24) $$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h'}$$

und ferner:

$$\frac{R\sin i}{a\cos\lambda} - \frac{R\sin i'}{a'\cos\lambda'} = \frac{\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda'}{\cos\mu}$$

oder, indem man die Gleichungen

$$n\sin i = n'\sin i', \qquad \lambda'-\lambda = i'-i$$

berücksichtigt:

$$\frac{n'\cos\lambda'}{a} - \frac{n\cos\lambda}{a'} = \frac{n'\sin(i-i')}{R\cos\mu\sin i}$$

oder nach (6):

$$\frac{n'\cos\tau'}{a} - \frac{n\cos\tau}{a'} = \frac{n'\cos i' - n\cos i}{R},$$

(25) $$n'\left(\frac{\cos\tau'}{a} - \frac{\cos i'}{R}\right) = n\left(\frac{\cos\tau}{a'} - \frac{\cos i}{R}\right).$$

Der Uebergang auf die folgende Fläche vollzieht sich nach den unmittelbar ersichtlichen Beziehungen:

(26) $$h' = h_1, \qquad a_1 = a' + D_1.$$

Man sieht, daß die Formeln (24) und (26) mit den entsprechenden Formeln (18) und (19) der Gauß'schen Dioptrik übereinstimmen und daß die Formel (25) in die Gauß'sche Formel (16) übergeht, wenn man die Cosinus der Winkel τ, τ', i, i' gleich 1 setzen darf.

Die Differenzenformeln.

Es liegt nahe, diese Verwandtschaft zum Ausgangspunkt zu nehmen,

$$(27) \quad a = A + \varDelta a, \quad h = H + \varDelta h, \quad h' = H' + \varDelta h' \text{ usw.}$$

zu setzen und nach einfachen Ausdrücken für die Größen $\varDelta a$ und $\varDelta h$ zu suchen.

Es ist:

$$\left(\frac{n'}{a} - \frac{n}{a'}\right) - \left(\frac{n'}{A} - \frac{n}{A'}\right) = \frac{n\varDelta a'}{a'A'} - \frac{n'\varDelta a}{aA}$$

und auch:

$$= \frac{n'}{a} - \frac{n}{a'} - \frac{n'-n}{R}.$$

Ersetzt man hier a und a' durch die Ausdrücke (23) und (23'), und achtet auf die Gleichung $n \sin i = n' \sin i'$, so folgt:

$$\frac{n\varDelta a'}{a'A'} - \frac{n'\varDelta a}{aA} = \frac{n'}{R \sin i}\left\{\frac{\sin\lambda - \sin\lambda'}{\cos\mu}\right.$$

$$\left. + \operatorname{cotg}(\zeta - \psi)(\cos\lambda - \cos\lambda')\, tg\,\mu - (\sin i - \sin i')\right\}$$

oder in Rücksicht auf die Beziehung $\lambda - \lambda' \doteq i - i'$:

$$\frac{n\varDelta a'}{a'A'} - \frac{n'\varDelta a}{aA} = \frac{2n'}{R \sin i \cos\mu} \sin\frac{\lambda - \lambda'}{2}\left\{\cos\frac{\lambda + \lambda'}{2}\right.$$

$$\left. - \cos\mu \cos\left(\frac{i + i'}{2}\right) - \operatorname{cotg}(\zeta - \psi)\sin\frac{\lambda + \lambda'}{2}\sin\mu\right\}.$$

Multipliziert man hier noch mit

$$\frac{1}{nn'}\frac{a}{h}\frac{A}{H} = \frac{1}{nn'}\frac{a'}{h'}\frac{A'}{H'}$$

und achtet auf die Gleichung (21), so ergiebt sich:

$$\frac{\varDelta a'}{n'h'H'} - \frac{\varDelta a}{nhH} = \frac{2}{nR \sin i \sin\mu}\frac{A}{H}\sin\frac{\lambda - \lambda'}{2}\cdot$$

$$\left\{\sin(\zeta - \psi)\left(\cos\frac{\lambda + \lambda'}{2} - \cos\mu\cos\frac{i + i'}{2}\right) - \cos(\zeta - \psi)\sin\mu\sin\frac{\lambda + \lambda'}{2}\right\}.$$

Um den Klammerausdruck der logarithmischen Berechnung bequem zugänglich zu machen, erinnere man sich an die Beziehung

$$i - \lambda = i' - \lambda' = \chi$$

und führe die Hülfsgrößen f, F, g, G ein nach den Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\chi + \mu}{2}\right) = f \sin F, & 2\sin\frac{\lambda + \lambda' + \chi + \mu}{2} = g \sin G \\ 2\sin\left(\frac{\chi - \mu}{2}\right) = f \cos F, & 2\sin\frac{\lambda + \lambda' + \chi - \mu}{2} = g \sin G. \end{cases}$$

Dann geht die Klammer über in den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{4} f g \sin (G - F + \zeta - \psi).$$

Setzt man nun noch:

$$Q = \frac{A}{H} fg . 2 \sin \frac{\lambda - \lambda'}{2} \sin (G - F + \zeta - \psi), \tag{29 a}$$

benutzt die frühere Bezeichnung der Strahlinvariante

$$J = n R \sin i \sin \mu$$

und bemerkt, daß gemäß den Gleichungen (26):

$$\frac{\Delta a'}{n' h' H'} = \frac{\Delta a_1}{n_1 h_1 H_1}$$

ist, so erhält man die Differenzenformel für die Schnittweiten:

$$\frac{\Delta a_1}{n_1 h_1 H_1} - \frac{\Delta a}{n h H} = \frac{Q}{4J}. \tag{29 b}$$

Es erübrigt nunmehr noch eine entsprechende Formel für die Schnitthöhen zu bilden.

Es ist gemäß (24):

$$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h_1}$$

oder:

$$\frac{A}{h} + \frac{\Delta a}{h} = \frac{A'}{h_1} + \frac{\Delta a_1}{h_1}$$

und mit $\frac{H}{A} = \frac{H_1}{A_1}$ multipliziert:

$$\frac{H}{h} - \frac{H_1}{h_1} = \frac{\Delta h_1}{h_1} - \frac{\Delta h}{h} = \frac{H}{A}\left(\frac{\Delta a_1}{h_1} - \frac{\Delta a}{h}\right), \tag{30}$$

womit die Differenzenformel für die Schnitthöhen gebildet ist.

Specialisierung auf axiale Strahlen. Hat man es mit einem Strahl zu thun, der in einer durch die Axe des Systems gehenden Ebene verläuft, so ist $\mu = 0$ und es folgt aus den Gleichungen (28):

$$F = G = 45^0, \quad f = 2\sqrt{2} \sin \frac{\chi}{2}, \quad g = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\lambda + \lambda' + \chi}{2}\right).$$

Dividiert man nun die Gleichung (29) durch

$$\frac{a}{h} = \frac{a_1}{h_1} = \operatorname{cotg} \mu \sin (\zeta - \psi)$$

und setzt dann $\mu = 0$, so erhält man:

$$\frac{\Delta a_1}{n' a' H_1} - \frac{\Delta a}{n a H} = \frac{4}{n R \sin i} \frac{A}{H} \sin\frac{\chi}{2} \sin\frac{\lambda + \lambda' + \chi}{2} \sin\frac{\lambda - \lambda'}{2}$$

oder, da für $\mu = 0$ nach (23):

$$\frac{R \sin i}{a} = \sin\lambda, \qquad \frac{R \sin i'}{a'} = \sin\lambda' = \sin\lambda_1,$$

ist:

$$\sin\lambda_1 \frac{\Delta a_1}{H_1} - \sin\lambda \frac{\Delta a}{H} = \frac{4A}{H} \sin\frac{\chi}{2} \sin\frac{\lambda + \lambda' + \chi}{2} \sin\frac{\lambda - \lambda'}{2}.$$

Das ist die Kerbersche Differenzenformel, als deren naturgemäße Erweiterung unser allgemeines Formelsystem erscheint.

Zusammensetzung beliebig vieler brechender Flächen.

Während bisher immer nur der Uebergang von einer auf die folgende brechende Fläche betrachtet wurde, wollen wir jetzt den Strahl durch das ganze optische System hindurch verfolgen. Die Flächen des Systems mögen die Indices $1, 2, \ldots \mu$ erhalten. Um unmittelbaren Anschluß an die bisherige Bezeichnung zu gewinnen, haben wir den Größen, welche sich auf den Zwischenraum zwischen der $\nu - 1^{\text{ten}}$ und der ν^{ten} Fläche beziehen, den Index ν oder einen Accent verbunden mit dem Index $\nu - 1$ zu geben.

Die Differenzenformeln (29) und (30) werden allgemein lauten:

$$\frac{\Delta a_{\nu+1}}{n_{\nu+1} h_{\nu+1} H_{\nu+1}} - \frac{\Delta a_\nu}{n_\nu a_\nu H_\nu} = \frac{Q_\nu}{4J}, \tag{31}$$

$$\frac{\Delta h_{\nu+1}}{h_{\nu+1}} - \frac{\Delta h_\nu}{h_\nu} = \frac{H_\nu}{A_\nu}\left(\frac{\Delta a_{\nu+1}}{h_{\nu+1}} - \frac{\Delta a_\nu}{h_\nu}\right). \tag{32}$$

Summiert man durch das ganze System hindurch, so erhält man:

$$\frac{\Delta a_{\mu+1}}{n_{\mu+1} h_{\mu+1} H_{\mu+1}} - \frac{\Delta a_1}{n_1 h_1 H_1} = \frac{1}{4J} \sum_{\nu=1}^{\mu} Q_\nu \tag{33}$$

$$\frac{\Delta h_{\mu+1}}{h_{\mu+1}} - \frac{\Delta h_1}{h_1} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{H_\nu}{A_\nu}\left(\frac{\Delta a_{\nu+1}}{h_{\nu+1}} - \frac{\Delta a_\nu}{h_\nu}\right). \tag{34}$$

Die erstere Formel giebt unmittelbar die Aenderung der letzten Schnittweite durch die Aenderung der ersten und die Summe der Q_ν ausgedrückt. Jedes einzelne Q_ν stellt den Beitrag der betreffenden Fläche zu dem entstehenden Gesamtfehler dar.

Für die zweite Formel empfiehlt sich noch eine Umordnung

Ordnet man die Summe zunächst nach den Werten $\frac{\varDelta a_\nu}{h_\nu}$, so bilden sich die Koeffizienten:

$$C_1 = -\frac{H_1}{A_1}, \quad C_2 = \frac{H_1}{A_1} - \frac{H_2}{A_2}, \dots .$$

$$C_\mu = \frac{H_{\mu-1}}{A_{\mu-1}} - \frac{H_\mu}{A_\mu}, \quad C_{\mu+1} = \frac{H_\mu}{A_\mu}$$

und es schreibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{H_\nu}{A_\nu}\left(\frac{\varDelta a_{\nu+1}}{h_{\nu+1}} - \frac{\varDelta a_\nu}{h_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\mu+1} C_\nu \frac{\varDelta a_\nu}{h_\nu}.$$

Drückt man nun die $\varDelta a_\nu$ nach der Differenzenformel (31) mit Hülfe der Q_ν aus, so ergiebt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{H_\nu}{A_\nu}\left(\frac{\varDelta a_{\nu+1}}{h_{\nu+1}} - \frac{\varDelta a_\nu}{h_\nu}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\mu+1} n_\nu H_\nu C_\nu \left\{\frac{\varDelta a_1}{n_1 h_1 H_1} + \frac{1}{4J} Q_1 + \frac{1}{4J} Q_2 + \cdots \frac{1}{4J} Q_{\nu-1}\right\}.$$

Ordnet man nunmehr diese Summen nach den Q_ν um, so bilden sich die Coeffizienten:

$$B_\mu = n_{\mu+1} H_{\mu+1} C_{\mu+1}, \quad B_{\mu-1} = n_{\mu+1} H_{\mu+1} C_{\mu+1} + n_\mu H_\mu C_\mu, \dots$$

$$B_0 = n_{\mu+1} H_{\mu+1} C_{\mu+1} + n_\mu H_\mu C_\mu + \cdots n_1 H_1 C_1$$

oder allgemein:

$$B_\nu = \sum_{\nu+1}^{\mu+1} n_\nu H_\nu C_\nu$$

und damit folgt:

$$\frac{\varDelta h_{\mu+1}}{h_{\mu+1}} - \frac{\varDelta h_1}{h_1} = \frac{B_0}{n_1 H_1} \frac{\varDelta a_1}{h_1} + \frac{1}{4J} \sum_{\nu=1}^{\mu} B_\nu Q_\nu. \tag{35}$$

Hiermit ist auch die Aenderung der letzten Schnitthöhe durch eine Summe dargestellt, die nach den Beiträgen $B_\nu Q_\nu$ der einzelnen Flächen geordnet ist.

Die Berechnung der Coeffizienten B_ν, die, wie betont sei, nur aus Daten der Gauß'schen Abbildung des Systems zusammengesetzt sind, kann noch durch Umformung der C_ν erleichtert werden.

Man setze:

$$\frac{H_\nu}{A_\nu} = \frac{H_{\nu+1}}{A'_\nu} = T_\nu,$$

dann ist

$$C_\nu = T_{\nu-1} - T_\nu = H_\nu\left(\frac{1}{A'_{\nu-1}} - \frac{1}{A_\nu}\right) = \frac{H_\nu D_\nu}{A'_{\nu-1} A_\nu},$$

$$n_\nu H_\nu C_\nu = n_\nu D_\nu T_\nu T_{\nu-1}.$$

Dieser Ausdruck gilt für $\nu = 2$ bis $\nu = \mu$. Für $\nu = 1$ und $\nu = \mu + 1$ hat man:

$$n_1 H_1 C_1 = -n_1 H_1 T_1, \quad n_{\mu+1} H_{\mu+1} C_{\mu+1} = n_{\mu+1} H_{\mu+1} T_\mu.$$

Einleitung der Rechnung. Schnittpunkte mit den Gauss'schen Bildebenen.

Wir wollen, was keine Spezialisierung bedeutet, den Objektpunkt in der Vertikalebene annehmen und wollen als Hauptebene, deren Schnittpunkte mit dem Strahl wir verfolgen, ebenfalls die Vertikalebene wählen, also $\psi = 0$ setzen. Die Coordinaten des Objektes seien:

$$x = M_1 + A_1, \quad y = Y_1, \quad z = 0.$$

Die Durchrechnung nach den Formeln der Gauß'schen Dioptrik ergiebt dann die Lage der angenäherten Gauß'schen Bilder dieses Objekts nach jeder Brechung.

Da der Schnitt eines Strahls, welcher durch den in der Vertikalebene liegenden Objektpunkt geht, mit der Vertikalebene eben der Objektpunkt ist, so gilt für den Strahl, den wir zur verfolgen haben:

$$a_1 = A_1, \quad Y_1 = h_1.$$

Wählen wir den Proportionalitätsfaktor der Größen H so, daß $H_1 = Y_1$ wird, so ist

$$\Delta a_1 = 0, \quad \Delta h_1 = 0.$$

Die aus den obigen Formeln hervorgehenden Größen $\Delta a_{\mu+1}$ und $\Delta h_{\mu+1}$ bedeuten dann direkt Abweichungen von dem durch das ganze System entworfenen Gauß'schen Bilde.

Will man, wie das in Praxis meist erwünscht ist, die Schnittkoordinaten $y_{\mu+1}$ und $z_{\mu+1}$ mit der letzten Gauß'schen Bildebene, so hat man in Analogie zu den Gleichungen (9) offenbar:

$$\begin{aligned} y_{\mu+1} &= h_{\mu+1} \cos\psi - \Delta a_{\mu+1} \operatorname{tg} \tau_{\mu+1} \cos \pi_{\mu+1} \\ z_{\mu+1} &= h_{\mu+1} \sin\psi - \Delta a_{\mu+1} \operatorname{tg} \tau_{\mu+1} \sin \pi_{\mu+1} \end{aligned}$$

oder für $\psi = 0$ und $y_{\mu+1} = Y_{\mu+1} + \Delta y_{\mu+1} = H_{\mu+1} + \Delta y_{\mu+1}$, $z_{\mu+1} = Z_{\mu+1} + \Delta z_{\mu+1} = \Delta z_{\mu+1}$ als Correctionen der Gauß'schen Bildkoordinaten

$$\begin{aligned} \Delta y_{\mu+1} &= \Delta h_{\mu+1} - \Delta a_{\mu+1} \operatorname{tg} \tau_{\mu+1} \cos \pi_{\mu+1} \\ \Delta z_{\mu+1} &= \qquad\quad - \Delta a_{\mu+1} \operatorname{tg} \tau_{\mu+1} \sin \pi_{\mu+1} \end{aligned}$$

und daraus unter Einführung der Invariante J und der Beziehun

$$\frac{J}{h} = n \sin \tau \sin (\psi - \pi):$$

$$\Delta y_{\mu+1} = -\frac{1}{\sin \tau_{\mu+1} \sin \pi_{\mu+1}} \frac{J}{n_{\mu+1}} \frac{\Delta h_{\mu+1}}{h_{\mu+1}} + \frac{\operatorname{cotg} \pi_{\mu+1}}{\cos \tau_{\mu+1}} \frac{J}{n_{\mu+1}} \frac{\Delta a_{\mu+1}}{h_{\mu+1}}$$

$$\Delta z_{\mu+1} = \qquad + \frac{1}{\cos \tau_{\mu+1}} \frac{J}{n_{\mu+1}} \frac{\Delta a_{\mu+1}}{h_{\mu+1}}.$$

Es soll nun noch folgende letzte Aenderung des Verfahrens eintreten. Nach der bisherigen Verabredung müßte $H_1 = Y_1$ gesetzt und daher für jede neue Entfernung Y_1 des Objekts von der Axe ein neues System von Größen H gerechnet werden. Nun sieht man aber, daß sich die Gleichung (33) überhaupt nicht ändert, wenn man alle Größen H mit einem beliebigen Faktor P multipliziert und daß in Gleichung (35) nur der Faktor P hinzutritt. Wählen wir daher den Faktor P so, daß $H_{\mu+1} = 1$ wird, so ist alles wieder in Ordnung, wofern wir nur die rechte Seite von (35) mit dem ursprünglichen Werte von $H_{\mu+1}$, nämlich der Gauß'schen Koordinate des Bildpunktes $Y_{\mu+1}$ multiplizieren. Auf diese Weise ist im folgenden verfahren.

Gang der Rechnung und Rechenschema.

1. Um eine Anzahl windschiefer Strahlen durch das System zu verfolgen, ist zuerst die Gauß'sche Durchrechnung des Systems vorzunehmen nach den Formeln:

$$n_\nu \left(\frac{1}{A'_\nu} - \frac{1}{R_\nu}\right) = n_{\nu+1} \left(\frac{1}{A_\nu} - \frac{1}{R_\nu}\right)$$

$$A_{\nu+1} = A'_\nu + D_\nu, \qquad \frac{T_\nu}{T_{\nu+1}} = \frac{A_{\nu+1}}{A'_\nu}.$$

Dabei sind die Größen T rückwärts zu rechnen mit $T_\mu = \frac{1}{A'_\mu}$ beginnend.

Es sei in Bezug auf die Bezeichnung wiederholt, daß das System aus μ Flächen mit den Indices $1, 2, \ldots \mu$ bestehen soll, daß die Größen A die Schnittweiten vom Krümmungsmittelpunkt an gerechnet bedeuten, daß A positiv zu zählen ist, wenn der Schnittpunkt vor dem Krümmungsmittelpunkt (im Sinne der Lichtbewegung) liegt, und daß der Radius R positiv gerechnet ist, wenn die Fläche gegen das einfallende Licht konvex ist, daß schließlich D_ν der Abstand der Krümmungsmittelpunkte der Flächen $\nu - 1$ und ν und n_ν der Brechungsindex zwischen diesen Flächen ist.

2. Im Anschluß an diese Rechnung, welche ohnehin in jedem Falle ausgeführt werden würde, sind die Hülfsgrößen zu rechnen:

$$E_\nu = n_\nu D_\nu T_\nu T_{\nu-1} \quad \text{für } \nu = 2, \ldots \mu; \quad E_{\mu+1} = n_{\mu+1} T_{\mu+1}$$

und die Größen B_ν nach der Rekurrenz:

$$B_{\nu-1} = B_\nu + E_\nu$$

mit:

$$B_{\mu+1} = 0$$

beginnend.

3. Nun werde der Strahl, den man zu verfolgen wünscht, in folgender Weise festgelegt. Man suche seinen Schnittpunkt mit der axennormalen Ebene, die den der obigen Gauß'schen Durchrechnung bereits zu Grunde gelegten Abstand A_1 vom Krümmungsmittelpunkt der ersten Fläche hat. Passend wird man für diese Ebene von vorne weg die Objektebene, für den Schnittpunkt also den Objektpunkt wählen. Der Abstand des Schnittpunktes von der Axe sei Y_1. Das ganze System denke man so um seine Axe gedreht, daß der Schnittpunkt vertikal über die Axe zu liegen kommt. Die Richtung des Strahls werde dann noch durch die sphärischen Coordinaten τ_1 und π_1 festgelegt. Es bedeuten dabei τ_1 den stets positiv zu wählenden Winkel des Strahls mit der x-Axe, π das Azimuth des nach rückwärts verlängerten Strahls, und es sei $\pi = 0$ für die Richtung der $+Y$-Axe, $\pi = 90^0$ für die Richtung der $+Z$-Axe. Die Seidel'schen Bestimmungsstücke U_1 und ζ_1 folgen aus den Formeln:

$$Y_1 - A_1 \operatorname{tg} \tau_1 \cos \pi_1 = U_1 \cos \zeta_1$$
$$A_1 \operatorname{tg} \tau_1 \sin \pi_1 = U_1 \sin \zeta_1.$$

Ist das Objekt unendlich entfernt, so pflegt man außer der Richtung τ_1, π_1 des Strahls die Schnittkoordinaten mit der Tangentialebene im Scheitel der ersten Fläche anzugeben, welche $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ heißen mögen; in diesem Falle folgen U_1 und ζ_1 aus:

$$\overline{Y}_1 - R_1 \operatorname{tg} \tau_1 \cos \pi_1 = U_1 \cos \zeta_1$$
$$\overline{Z}_1 - R_1 \operatorname{tg} \tau_1 \sin \pi_1 = U_1 \sin \zeta_1.$$

Nunmehr folgt die Durchrechnung des Strahls durch das ganze System nach dem Seidel'schen Schema:

$$\sin \lambda_\nu = -\sin \tau_\nu \cos(\zeta_\nu - \pi_\nu)$$
$$\sin \mu_\nu \cos \lambda_\nu = \sin \tau_\nu \sin(\zeta_\nu - \pi_\nu)$$
$$\cos \mu_\nu \cos \lambda_\nu = \cos \tau_\nu$$

$$\begin{aligned}
\sin i_\nu &= \frac{U_\nu \cos \lambda_\nu}{R_\nu} \\
n_\nu \sin i_\nu &= n_{\nu+1} \sin i'_\nu \\
i'_\nu - \lambda'_\nu &= i_\nu - \lambda_\nu = \chi_\nu \\
U'_\nu &= \frac{R_\nu \sin i'_\nu}{\cos \lambda'_\nu} \\
\sin \lambda'_\nu &= -\sin \tau_{\nu+1} \cos(\zeta_\nu - \pi_{\nu+1}) \\
\sin \mu_\nu \cos \lambda'_\nu &= \sin \tau_{\nu+1} \sin(\zeta_\nu - \pi_{\nu+1}) \\
\cos \mu_\nu \cos \lambda'_\nu &= \cos \tau_{\nu+1} \\
U_{\nu+1} \cos(\zeta_{\nu+1} - \pi_{\nu+1}) &= U'_\nu \cos(\zeta_\nu - \pi_{\nu+1}) - D_{\nu+1} \operatorname{tg} \pi_{\nu+1} \\
U_{\nu+1} \sin(\zeta_{\nu+1} - \pi_{\nu+1}) &= U'_\nu \sin(\zeta_\nu - \pi_{\nu+1}).
\end{aligned}$$

Durch die Forderungen, daß die Größen U positiv, die Winkel λ, μ, i, τ zwischen $\pm 90^0$ liegen, sind alle Willkürlichkeiten in diesem System beseitigt. Bei der üblichen Durchrechnung unterbleibt das Aufschlagen des Winkels μ, der jedoch in unserm Falle für die weitere Rechnung benötigt wird.

In Bezug auf Kontrollen und Ausnahmefälle sei auf die ausführliche Darstellung in dem Handbuch der angewandten Optik von Steinheil und Voit p. 238 verwiesen, wobei nur der oben erwähnte Bezeichnungswechsel zu beachten ist.

Der Unterschied gegen das übliche Verfahren besteht darin, daß die Durchrechnung des vorstehenden Systems nicht mit derjenigen Stellenzahl zu erfolgen hat, in der man den Gang des Strahles zu kennen wünscht, sondern nur mit derjenigen, in welcher man die Kenntnis der Abweichungen vom Gauß'schen Strahlengang verlangt.

4. Die Berechnung dieser Abweichungen geschieht auf Grund der Größen, welche die bisherige Rechnung geliefert hat, folgendermaßen.

Aus den Gleichungen:

$$2 \sin\left(\frac{\chi_\nu + \mu_\nu}{2}\right) = f_\nu \sin F_\nu, \qquad 2 \sin \frac{\lambda_\nu + \lambda'_\nu + \chi_\nu + \mu_\nu}{2} = g_\nu \sin G_\nu$$

$$2 \sin\left(\frac{\chi_\nu - \mu_\nu}{2}\right) = f_\nu \cos F_\nu, \qquad 2 \sin \frac{\lambda_\nu + \lambda'_\nu + \chi_\nu - \mu_\nu}{2} = g_\nu \cos G_\nu$$

bestimme man $f_\nu, g_\nu, F_\nu, G_\nu$. Als Kontrolle dient die Gleichung:

$$4 \sin \mu_\nu \sin \frac{\lambda_\nu + \lambda'_\nu}{2} = f_\nu g_\nu \sin(F_\nu - G_\nu).$$

Man rechne weiter:

$$Q_\nu = 2\sin\frac{\lambda_\nu - \lambda'_\nu}{2}\sin(\zeta_\nu + G_\nu - F_\nu)\frac{f_\nu g_\nu}{T_\nu}$$

$$M = \sum_{\nu=1}^{\mu} Q_\nu, \qquad N = \sum_{\nu=1}^{\mu} Q_\nu B_\nu.$$

Dann sind die Abweichungen des Strahlschnitts mit der Gauß'schen Bildebene vom Gauß'schen Bildpunkt:

$$\Delta y_{\mu+1} = \frac{M}{4\cos\tau_{\mu+1}}\operatorname{cotg}\pi_{\mu+1} - \frac{Y_{\mu+1} N}{4\sin\tau_{\mu+1}\sin\pi_{\mu+1}}$$

$$\Delta z_{\mu+1} = \frac{M}{4\cos\tau_{\mu+1}}.$$

Schlussbemerkungen. Hülfstafeln.

Das vorstehende Verfahren verkürzt die Rechnung, wenn di Verringerung der Stellenzahl bei der Durchrechnung des Seidel' schen Schemas (No. 3) mehr Zeit erspart, als die Durchrechnun der Formelsysteme unter No. 2 und 4 erfordert. Ob dies de Fall ist, hängt von der Größe der vorkommenden Strahlneigunge und der verlangten Genauigkeit ab. Doch wird sich die Rechnun nach den neuen Formeln auch unter Aufwand etwas größere Rechenarbeit lohnen, sobald man auf die Kenntnis des Beitrag der einzelnen Flächen zu den Abbildungsfehlern Wert leg welche durch die Größen Q_ν und $Q_\nu B_\nu$ vermittelt wird.

Es empfiehlt sich bei der Durchführung der Rechnung al diejenigen Winkel, welche für paraxiale Strahlen klein werde nämlich τ, λ, μ, χ und i, von vorne weg in absolutem Maß rechnen und nur für die den ganzen Umkreis durchlaufend Winkel π, ζ, F, G die Zählung nach Graden, Minuten und Sekund beizubehalten. Für die ersteren Winkel ist dann die üblic Tabelle der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen bis Winkelwerten von 30° zu ersetzen durch die beifolgende Ta Dieselbe giebt in ihrem ersten Teil $\log\frac{x}{\sin x}$ und $\log\frac{1}{\cos x}$ Funktion von $\log\sin x$, in ihrem zweiten Teil dieselben bei Größen als Funktion von $\log x$ und von $\log 2x$, und zwar in E heiten der 4. Dezimale. Man sieht unmittelbar, wie mit Hi dieser Tafel der Uebergang von dem in absolutem Maß gezähl Winkel zu Sinus und Kosinus und durch die Differenz der bei

Kolumnen $\log \frac{x}{\sin x}$ und $\log \frac{1}{\cos x}$ auch zur Tangente möglich ist. Die Spalte $\log 2x$ ist eingefügt, weil in den obigen Formeln öfter von dem Winkel $y = 2x$ auf die Funktion $2 \sin \frac{y}{2} = 2 \sin x$ überzugehen ist, was durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{2 \sin \frac{y}{2}}{y} = \frac{\sin x}{x}$ geschieht.

$\log \sin x$	$\log \frac{x}{\sin x}$	$\log \frac{1}{\cos x}$	$\log x$	$\log 2x$	$\log \frac{\sin x}{x}$	$\log \frac{1}{\cos x}$
8.4000	+ 0	+ 1	8.4000	8.7010	− 0	+ 1
8.5000	1	2	8.5000	8.8010	1	2
8.6000	1	3	8.6000	8.9010	1	3
8.7000	2	5	8.7000	9.0010	2	5
8.8000	3	9	8.8000	9.1010	3	9
8 9000	5	14	8.9000	9 2010	5	14
9 0000	7	22	9.0000	9.3010	7	22
9.0200	8	24	9.0200	9.3210	8	24
9.0400	9	26	9.0400	9.3410	9	26
9.0600	10	29	9.0600	9.3610	10	29
9.0800	10	32	9.0800	9.3810	10	32
9.1000	11	35	9.1000	9.4010	11	35
9.1200	13	38	9.1200	9.4210	13	38
9.1400	14	42	9.1400	9.4410	14	42
9.1600	15	46	9.1600	9.4610	15	46
9.1800	17	50	9.1800	9.4810	17	50
9.2000	18	55	9.2000	9.5010	18	55
9.2200	20	61	9.2200	9.5210	20	60
9.2400	22	67	9.2400	9.5410	22	66
9.2600	24	73	9.2600	9.5610	24	72
9.2800	26	80	9.2800	9.5810	26	79
9.3000	29	88	9.3000	9.6010	29	87
9.3200	32	97	9.3200	9.6210	32	95
9.3400	35	107	9.3400	9.6410	35	105
9.3600	39	117	9 3600	9.6610	39	115
9.3800	43	129	9.3800	9.6810	43	126
9.4000	47	142	9.4000	9.7010	46	138
9.4100	49	148	9.4100	9.7110	48	145
9.4200	51	156	9.4200	9.7210	50	152
9.4300	54	163	9.4300	9.7310	53	159
9.4400	56	171	9.4400	9.7410	55	167
9.4500	59	180	9.4500	9.7510	58	175
9.4600	62	189	9.4600	9.7610	60	183
9.4700	66	198	9.4700	9.7710	63	192
9.4800	69	208	9 4800	9.7810	66	201
9.4900	72	218	9.4900	9.7910	69	211
9.5000	75	229	9.5000	9.8010	73	221
9.5100	79	240	9.5100	9.8110	76	231
9.5200	83	252	9.5200	9.8210	80	243
9.5300	87	265	9.5300	9.8310	83	254
9.5400	91	278	9.5400	9.8410	87	266
9.5500	96	292	9.5500	9.8510	92	279
9.5600	100	307	9.5600	9.8610	96	293
9.5700	105	323	9.5700	9.8710	100	307
9.5800	111	339	9.5800	9.8810	105	322
9.5900	116	356	9.5900	9.8910	110	337
9.6000	122	375	9.6000	9.9010	115	353
9.6050	125	384	9.6050	9.9060	118	362
9.6100	128	394	9.6100	9.9110	121	371
9.6150	131	404	9.6150	9.9160	124	38[illegible]
9.6200	135	414	9.6200	9.9210	127	38[illegible]
9.6250	138	425	9 6250	9.9260	130	39[illegible]
9.6300	141	436	9.6300	9.9310	133	40[illegible]
9.6350	145	447	9.6350	9.9360	136	41[illegible]
9.6400	149	459	9.6400	9.9410	139	42[illegible]
9.6450	152	471	9.6450	9.9460	142	43[illegible]
9.6500	156	483	9.6500	9.9510	145	44[illegible]
9.6550	160	496	9.6550	9.9560	149	45[illegible]
9.6600	164	509	9.6600	9.9610	152	47[illegible]
9.6650	169	522	9.6650	9.9660	156	4[illegible]
9.6700	173	536	9.6700	9.9710	160	4[illegible]
9.6750	177	550	9.6750	9.9760	163	5[illegible]
9.6800	182	565	9.6800	9.9810	167	5[illegible]
9.6850	186	580	9.6850	9.9860	171	5[illegible]
9.6900	191	596	9.6900	9.9910	175	5[illegible]
9.6950	196	612	9.6950	9.9960	179	5[illegible]
9.7000	201	628	9.7000	0.0010	183	5[illegible]

Beiträge zu der Lehre von der Luftelectricität.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1907.

V. Ueber die Zerstreuung in gleichmässig bewegter Luft.

1. In einem Aufsatze mit dem gleichen Titel[1]) habe ich früher gezeigt, daß die Zerstreuung, welche die electrische Ladung einer Kugel in der Luft erleidet, von der Bewegung der letzteren in gewissen Grenzen unabhängig ist. Die Richtigkeit des Satzes ist von H. Schering in seiner Dissertation experimentell bestätigt worden. Ich hatte von vornherein vermutet, daß dem Satze eine weiterreichende Bedeutung zukomme; in der Tat hat sich die Unabhängigkeit der Zerstreuung von der Geschwindigkeit der Luft auch bei den von Gerdien und von Schering zur Leitfähigkeitsbestimmung construierten Apparaten herausgestellt. Die Versuche von Schering besitzen ein besonderes Interesse, weil sie die ersten sind, bei denen eine Registrierung der Leitfähigkeit erreicht wurde; es war mir daher von Interesse, die Versuchsanordnung auch von theoretischer Seite zu untersuchen.

2. Als Zerstreuungskörper dient ein horizontal ausgespannter Draht, den wir als unendlich lang betrachten wollen. Einen Punkt 0 desselben machen wir zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen X-Axe horizontal nach rechts, dessen Y-Axe nach oben gehen soll. Die Luft ströme in der Richtung der negativen X-Axe mit der Geschwindigkeit u. Der in der Richtung der Z-Axe liegende Draht trage auf der Längeneinheit die Ladung $-\eta$; die electrische Feldstärke in der Entfernung r

1) Beiträge zur Lehre von der Luftelectricität. II. Ueber die Zerstreuung in gleichmäßig bewegter Luft. Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, 1903. Annalen d. Phys., 1903, Bd. 12, S. 52.

von der Z-Axe ist dann: $-\frac{2\eta}{r}$, ihre Componenten nach der Richtungen der X- und der Y-Axe sind:

$$-2\eta\frac{x}{r^2} \quad \text{und} \quad -2\eta\frac{y}{r^2}.$$

Verstehen wir unter c die Lichtgeschwindigkeit, unter U die ab solute Beweglichkeit der positiven Ionen, so gelten für die Ge schwindigkeitscomponenten eines positiven Ions in den Richtunge der X- und der Y-Axe die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathfrak{u} - 2cU\eta\cdot\frac{x}{r^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -2cU\eta\cdot\frac{y}{r^2}.$$

Man kann sie auch auf die folgenden Formen bringen:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathfrak{u} - 2cU\eta\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dt} = -2cU\eta\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x^2}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathfrak{u}y + 2cU\eta\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right\}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathfrak{u}y + 2cU\eta\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right.$$

Die Strömungslinien der positiven Ionen sind somit gegeben dur die Gleichung:

$$uy + 2cU\eta\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$$

Wir bezeichnen den Winkel, den der Leitstrahl r mit der X-A einschließt, durch φ; dann ist: $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Wir setzen fer die Constante $C = 2cU\eta\alpha$; wir erhalten dann die verschiede Strömungslinien, wenn wir dem Winkel α alle möglichen We von 0 bis ∞ erteilen. Die Gleichung der Strömungslinien kom jetzt auf die Form:

$$\mathfrak{u}y = 2cU\eta(\alpha-\varphi).$$

Das System der Linien ist natürlich symmetrisch zu der XZ-Eb Für die Linien eines Halbraumes liegt φ zwischen den Gren 0 und π. So lange α kleiner als π, wird $y = 0$ für $\varphi = \alpha$. entsprechenden Strömungslinien enden in der Z-Axe, die auf i bewegten Ionen gelangen auf den Draht. Ist α grösser als π wird y nicht mehr gleich 0, die Strömungslinien gehen nicht m durch die Z-Axe, sie werden nur nach der XZ-Ebene hin von ursprünglichen Richtung abgelenkt; die auf ihnen bewegten I

erreichen den Draht nicht. Für $\varphi = 0$, in unendlicher Entfernung vor dem Drahte sind die Werte von y gegeben durch $2 c \eta \alpha \frac{U}{u}$.

3. Nach dem vorhergehenden sind alle Ionenbahnen, welche in der Z-Axe endigen, eingeschlossen zwischen zwei zur XZ-Ebene parallelen Ebenen, deren Abstand von der XZ-Ebene gleich $2 \pi c \eta \frac{U}{u}$ ist. Alle Ionen, die aus der Luft auf ein Stück des Drahtes von der Länge l gelangen, sind somit in einem Kanale enthalten, der in sehr grosser Entfernung von dem Drahte den Querschnitt $4 \pi c \eta l \frac{U}{u}$ besitzt. Das Volumen der Luft, die in einer Secunde durch den Querschnitt des Kanales hindurchströmt, ist gleich $4 \pi c \eta l U$; verstehen wir also unter $\overset{+}{N}$ die Zahl der positiven Ionen in der Volumeinheit, unter ε das electrische Elementarquantum, so ist die Menge positiver Electricität, die sich in einer Secunde auf der Länge l des Drahtes niederschlägt, gegeben durch $4 \pi c \eta l \varepsilon \overset{+}{N} U$. Ebenso groß ist natürlich der Verlust, den die negative Ladung des Drahtes in einer Sekunde erleidet. Bezeichnen wir die gesamte Ladung des Drahtes auf der Länge l mit e, den Ladungsverlust in der Secunde mit δe, so ergiebt sich die Formel:

$$\frac{\delta e}{e} = 4 \pi c \varepsilon \overset{+}{N} U.$$

Ebenso bei positiver Ladung des Drahtes:

$$\frac{\delta e}{e} = 4 \pi c \varepsilon \bar{N} V.$$

Die Formeln sind dieselben, wie die früher bei der Kugel gefundenen; sie zeigen, daß die Zerstreuung auch bei einem Drahte von der Luftbewegung unabhängig ist.

4. Der Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Satzes läßt sich folgendermassen führen. Einen beliebigen Conductor, der eine negative Ladung besitzen möge, ersetzen wir durch ein System discreter electrischer Massen, $-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \ldots$. Bezeichnen wir ihre Entfernungen von einem beliebigen außerhalb des Conductors liegenden Punkte mit $d_1, d_2, d_3, \ldots$, so ist das Potential des Conductors gegeben durch:

$$\varphi = -\frac{\eta_1}{d_1} - \frac{\eta_2}{d_2} - \frac{\eta_3}{d_3} \cdots = -\sum \cdot \frac{\eta}{d}.$$

Hat die Luft wieder eine constante Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in der Richtung der X-Axe, so ergeben sich für die Geschwindigkeiten der positiven Ionen die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathfrak{u} - cU\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = -cU\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = -cU\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -\mathfrak{u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\sum\cdot\frac{cU\eta}{d}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus der letzten Form der Gleichungen folgt der Satz: Die Strömungslinien der positiven Ionen sind identisch mit den Kraftlinien in einem ursprünglich homogenen electrischen Felde von der Intensität $-\mathfrak{u}$, welches durch die Einlagerung der Massen

$$-cU\eta_1, \quad -cU\eta_2, \quad -cU\eta_3, \quad \ldots$$

gestört wird. Nach einem bekannten Satze ist aber die Zahl der in einem elektrischen Massenpunkte endigenden Kraftlinien gleich 4π multipliciert mit der Ladung jenes Punktes. Die Gesamtzahl der in den electrischen Puncten des Systems endigenden Kraftlinien ist somit:

$$Q = -4\pi cU.\sum.\eta.$$

In sehr großer Entfernung von dem Conductor sind die Kraftlinien parallel der X-Axe, durch die Fläche von 1 qc gehen $\mathfrak{u}$ Kraftlinien hindurch; somit entspricht einer Zahl von Q Kraftlinien ein Querschnitt von $Q/\mathfrak{u}$ qc. Nun entspricht aber jeder in einem electrischen Massenpunkte endigenden Kraftlinie eine eben solche Strömungslinie der positiven Ionen; in großer Entfernung von dem geladenen Conductor erfüllen also die Strömungslinien einen Cylinder, dessen Querschnitt gleich $Q/\mathfrak{u}$ ist. Das Luftvolumen, welches in einer Secunde durch diesen Querschnitt strömt, ist gleich Q, seine positive Ionenladung gleich $Q\varepsilon\overset{+}{N}$. Ebensogroß ist die Abnahme $\delta\mathfrak{e}$, welche die negative Ladung des Conductors in der Secunde erleidet. Wir erhalten also

$$\delta\mathfrak{e} = 4\pi cU\varepsilon\overset{+}{N}.\sum.\eta,$$

oder, wenn wir unter $\mathfrak{e}$ wieder die Gesamtladung des Conductors verstehen:

$$\frac{\delta\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}} = -4\pi cU\varepsilon\overset{+}{N},$$

dieselbe Formel, wie in den früheren speciellen Beispielen. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Strömung der Luft selbst durch d

Gegenwart des Conductors nicht merklich gestört wird; diese Bedingung würde practisch dadurch zu erfüllen sein, daß man den Conductor aus einem Drahtnetze herstellt. In einfachen Fällen, bei der Kugel, dem unendlich langen Cylinder, wird der Einfluß auch theoretisch zu verfolgen sein.

5. Setzt man die Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit der Luft als gegeben voraus, so kann man schließlich die allgemeine Gültigkeit des Zerstreuungsgesetzes noch in der folgenden Weise zeigen. Wir nehmen an, der wiederum negativ geladene Conductor befinde sich in ruhender Luft. Wir betrachten eine Fläche, auf der das Potential den constanten Wert $\varphi = C$ besitzt. Auf der Fläche grenzen wir ein Element do ab, dessen innere Normale mit n bezeichnet werde. Die nach innen gerichtete electrische Kraft ist gleich $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$; somit die Geschwindigkeit, mit der die positiven Ionen in das Innere der Fläche einströmen, gleich $-cU\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Die Menge von positiver Electricität, welche von den Ionen in einer Secunde durch das Element do in das Innere der Potentialfläche hineingeführt wird, ist dann:

$$-cU\varepsilon\overset{+}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial n}do,$$

und die durch die ganze Oberfläche einströmende Electricitätsmenge:

$$\delta e = -cU\varepsilon\overset{+}{N}\int\frac{\partial \varphi}{\partial n}do.$$

Bezeichnen wir mit e die Ladung des Conductors, so ist nach einem bekannten Satze:

$$4\pi e = \int\frac{\partial \varphi}{\partial n}do.$$

Wir erhalten daher für die Menge der durch die Potentialfläche einströmenden Electricität den Ausdruck:

$$\delta e = -4\pi cU\varepsilon\overset{+}{N}e.$$

Der Wert von δe ist für alle Potentialflächen derselbe, also auch derselbe für die Oberfläche des Conductors. δe giebt somit auch die Abnahme, welche die negative Ladung des Conductors in der Secunde erleidet. Für diese gilt also ganz unabhängig von der Form des Conductors die Gleichung:

$$\frac{\delta e}{e} = -4\pi cU\varepsilon\overset{+}{N}.$$

Ueber den Spannungsabfall in der positiven Lichtsäule nach Beobachtungen von Heinrich Schwienhorst.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. November 1907.

1. Herr Schwienhorst hat in seiner Dissertation[1]) dei Spannungsabfall in der positiven Lichtsäule in seiner Abhängig keit von Stromstärke, Druck und Röhrenweite untersucht. Di Drucke wurden mit der Quecksilberluftpumpe nach der von Hage: angegebenen Methode bestimmt. Bei einer Neumessung der D: mensionen der Pumpe stellte sich ein Fehler in den frühere Messungen heraus; in Folge davon sind alle in der Dissertation g machte Druckangaben um einen konstanten Faktor zu klein. Dies Umstand veranlaßte mich, die Messungen des Herrn Schwie: horst von neuem in einer etwas anderen Weise zu berechne: die Resultate der Rechnung mögen im folgenden mitgeteilt werde Mit Bezug auf das Beobachtungsmaterial selbst verweise ich a die Dissertation. Die Beobachtungen beziehen sich auf 6 Röhre welche der Reihe nach die folgenden inneren Querschnitte u Durchmesser besitzen:

Röhre:	I	II	III	IV	V	VI
Querschnitt:	158,3	41,8	5,73	3,74	3,02	0,80 qm
Durchmesser:	1,420	0,730	0,270	0,218	0,196	0,101 c

Die Stromstärken stiegen von etwa 0,2 bis 4 Milliamper; Drucke von 0,7 bis gegen 10 mm.

---

1) Heinrich Schwienhorst, Experimentelle und theoretische Un suchungen an der positiven ungeschichteten Lichtsäule. Göttingen 1903.

2. Für jede einzelne Röhre wurden zuerst die den verschiedenen Drucken entsprechenden Werte des Spannungsabfalles f durch Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{E} = A - Bi$$

dargestellt. Einzelnen Beobachtungsreihen würde man allerdings durch einen quadratischen Ausdruck besser entsprochen haben, im Interesse der Einfachheit und Einheitlichkeit wurde darauf verzichtet. Die Berechnung der Konstanten A und B erfolgte nach der Methode der kleinsten Quadrate.

3. Die Konstanten A und B sind bei jeder einzelnen Röhre Funktionen des Druckes. Es zeigte sich, daß sie durch lineare Funktionen von der Form

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 p, \qquad B = \beta_1 + \beta_2 p$$

dargestellt werden konnten.

Was die Berechnung des Druckes anbelangt, so ist zu bemerken, daß alle in der Dissertation des Herrn Schwienhorst gemachten Druckangaben mit dem Faktor 1,066 zu multiplizieren sind, um den Druck in mm zu erhalten. Die Konstanten α_1, α_2, β_1, β_2 wurden wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die Resultate der Rechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Röhre	α_1	α_2	β_1	β_2	β
I	17,34	23,99	−1,40	1,86	1,42
II	25,94	24,34	+0,33	2,14	2,29
III	35,07	29,26	+0,89	3,44	3,61
IV	34,10	30,80	−0,69	4,24	3,77
V	36,97	30,83	−1,69	4,70	3,87
VI	58,29	31,54	−1,34	5,36	4,71

Die höheren Drucke von 7,50 − 8,36 − 9,55 mm sind bei dieser Berechnung nicht mitberücksichtigt worden.

Die Tabelle zeigt, daß die konstanten β_1 im Vorzeichen wechselnde und verhältnismäßig kleine Werte besitzen. Es lag daher nahe, die Formel $B = \beta_1 + \beta_2 p$ durch die einfachere $B = \beta p$ zu ersetzen. In der Tat zeigte sich, daß dies möglich war ohne wesentliche Einbuße an Genauigkeit der Darstellung. Die berechneten Werte von β sind in der letzten Kolumne der Tabelle angegeben. Fassen wir die Ergebnisse der bisherigen Rechnungen zusammen, so erhalten wir für jede einzelne Röhre eine Gleichung von der Form:

1) $$\mathfrak{E} = \alpha_1 + \alpha_2 p - \beta_1 i - \beta_2 p i,$$
oder
2) $$\mathfrak{E} = \alpha_1 + \alpha_2 p - \beta p i.$$

Es bleibt dann schließlich noch übrig, die Konstanten α_1, α_2, β_1, β_2 und β darzustellen als Funktionen des Röhrendurchmessers.

4. Für die Konstante α_1 ergab sich die Formel:

$$\alpha_1 = \mathfrak{a}_1 + \frac{\mathfrak{b}_1}{d}.$$

Daß die Potenz -1 von d den Beobachtungen am besten entspricht, ergibt sich aus dem folgenden; bei der Rechnung nach kleinsten Quadraten liefert die Potenz -1 die Summe der Fehlerquadrate 30,4; bei der Potenz $-1{,}2$ wird diese Summe gleich 35,6; bei der Potenz 0,8 gleich 36,3. Die Werte von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ sind gleich 17,25 und 4,106, somit die Formel für α_1:

$$\alpha_1 = 17{,}25 + \frac{4{,}106}{d}.$$

5. Bei der Berechnung der Konstanten α_2 wurde der allgemeine Ansatz benützt:

$$\alpha_2 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 d^{-n}.$$

Die spezielle Form

$$\alpha_2 = -5{,}34 + 30{,}32 \cdot d^{-0{,}1}$$

gab als Summe der Fehlerquadrate den Wert 5,35; die Formel

$$\alpha_2 = 4{,}91 + 19{,}53 \cdot d^{-0{,}15}$$

gab eine Fehlerquadratsumme von 5,29; die Formel

$$\alpha_2 = 24{,}67 \cdot d^{-0{,}123}$$

endlich gab die Fehlerquadratsumme 4,82; die letztere wurde daher zu der definitiven Darstellung benützt.

6. In derselben Weise wurden schließlich auch die Konstanten α_1, β_2, β behandelt. Von β_1 wurde angenommen, daß es von dem Röhrendurchmesser unabhängig sei; sein Wert wurde gleich dem Mittel aus den in der früheren Tabelle enthaltenen Werten gesetzt, also:

$$\beta_1 = -0{,}65.$$

Für β_2 und β ergaben sich die Formeln:

$$\beta_2 = 2{,}06 \cdot d^{-0{,}437},$$
$$\beta = 1{,}85 \cdot d^{-0{,}449}.$$

7. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse erhalten wir schließlich zur Darstellung der Beobachtungen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \mathfrak{E} = 17{,}25 + 0{,}65\, i + \frac{4{,}106}{d} + 24{,}67\, p\, d^{-0{,}128} - 2{,}06\, p\, i\, d^{-0{,}437},$$

$$\text{II.} \quad \mathfrak{E} = 17{,}25 + \frac{4{,}106}{d} + 24{,}67\, p\, d^{-0{,}128} - 1{,}85\, p\, i\, d^{-0{,}449}.$$

Von der Genauigkeit der Darstellung gibt die folgende Tabelle ein Bild; aus der großen Zahl von 124 Beobachtungen, welche der Rechnung zu Grunde liegen, sind dabei nur wenige herausgegriffen. In den mit I und II überschriebenen Kolumnen sind die nach den Gleichungen I und II berechneten Werte enthalten. Unter III sind Werte angegeben, die aus einer von Schwienhorst aufgestellten Gleichung folgen.

Tabelle I.

Röhre	p	i	$\mathfrak{E}$ beob.	I	II	III
III	0,72	2,77	46,9	47,8	46,7	62,9
V	0,72	0,87	55,2	57,8	57,5	75,5
I	1,08	1,26	43,5	44,1	43,5	49,5
III	1,08	1,42	61,1	59,2	58,8	74,0
II	1,92	0,55	73,8	69,9	69,8	78,4
IV	1,92	2,70	81,5	74,2	74,2	90,7
IV	2,94	1,78	101,8	103,3	102,1	116,4
VI	2,94	3,23	112,5	102,8	104,9	114,9
I	3,54	3,03	89,0	86,8	86,9	95,5
V	3,54	1,02	136,5	130,4	130,0	140,8
II	3,96	1,52	113,8	111,2	110,2	121,0
VI	3,96	2,28	142,0	138,0	140,6	144,7
I	4,91	2,50	111,0	116,1	116,8	127,7
IV	4,91	1,08	166,5	161,6	162,7	164,3
II	6,09	0,97	164,0	165,7	166,4	175,4
VI	6,09	3,08	152,5	153,7	160,0	153,9

Die mittlere prozentische Abweichung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten beträgt bei Gleichung I 4,76 %, bei

Gleichung II 4,92 %; bei der Gleichung von **Schwienhorst** steigt sie auf 16,6 %. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die Formel von **Schwienhorst** Drucke bis zu 10 mm umfaßt, während bei den Formeln I und II nur Drucke bis zu 6 mm in Rechnung gezogen sind. Die Stromstärken liegen übereinstimmend zwischen den Grenzen 0,23 und 4,06 Milliamper, die Röhrendurchmesser zwischen den Grenzen 0,104 und 1,420 cm.

8. An die einfachere zweite Gleichung

$$\mathfrak{E} = \alpha_1 + \alpha_2 p - \beta p i,$$

$$\mathfrak{E} = 17{,}25 + \frac{4{,}106}{d} + 24{,}67\, p d^{-0{,}123} - \beta p i,$$

wollen wir noch eine weitere Bemerkung knüpfen. Von vornherein liegt die Annahme nahe, daß das Spannungsgefälle unmittelbar nicht von der Stromstärke abhänge, sondern von der Stromdichte. Man kann dementsprechend versuchen, das letzte Glied der Formel so umzugestalten, daß es nicht abhängt von p, i, d, sondern nur von dem Drucke p und der Stromdichte $j = i/q$, wo q den Röhrenquerschnitt bezeichnet. Verstehen wir unter r eine noch zu bestimmende Funktion der Stromdichte, so können wir das letzte Glied in der Form rp schreiben, und erhalten dann zur Bestimmung von r die Gleichung:

$$rp = 17{,}25 + \frac{4{,}106}{d} + 24{,}67\, p d^{-0{,}123} - \mathfrak{E}\ \text{beob.}$$

Die Rechnung wurde in der folgenden Weise ausgeführt. Zuerst wurden mit Hülfe der Werte von Tabelle I die zusammengehörigen Werte von r und j ermittelt. Nahe beisammenliegende Werte von j und die ihnen entsprechenden von r wurden zu Mittelwerten vereinigt und so die Zusammenstellung der folgenden Tabelle erhalten.

Tabelle II.

j	r beob.	r ber.	beob.-ber.
0,016	2,57	2,60	−0,03
0,284	3,67	4,28	−0,61
0,479	7,76	5,32	+2,44
0,722	6,09	6,61	−0,52
2,85	11,42	13,97	−2,55
3,85	17,16	14,98	+2,18
4,04	14,08	14,99	−0,91

Die berechneten Werte von r sind erhalten mit Hülfe der Formel:

$$r = 2{,}50 + 6{,}27 j - 0{,}786 j^2.$$

9. Substituiert man diesen Ausdruck in Gleichung II, so ergibt sich für das Spannungsgefälle die dritte Formel:

$$\text{III.}\quad \mathfrak{E} = 17{,}25 + \frac{4{,}106}{d} + 24{,}67\, p\, d^{-0{,}123} - p\,(2{,}50 + 6{,}27 j - 0{,}786 j^2).$$

Die hieraus berechneten Werte von $\mathfrak{E}$ sind in Tabelle III mit den beobachteten zusammengestellt; benützt sind dabei dieselben Werte von i, beziehungsweise j, von p und von d wie in der Tabelle I.

Tabelle III.

Röhre	j	$\mathfrak{E}$ beob.	$\mathfrak{E}$ ber.	%
III	0,483	46,9	49,5	−4,00
V	0,258	55,2	56,9	−3,08
I	0,008	43,5	42,9	+1,38
III	0,248	61,1	59,6	+2,45
II	0,013	73,8	67,1	+9,08
IV	0,722	81,5	80,5	+1,22
IV	0,476	101,8	105,7	−3,83
VI	4,04	112,5	109,9	+2,31
I	0,019	89,0	94,5	−6,18
V	0,338	136,5	130,4	+4,47
II	0,036	113,8	113,6	+0,17
VI	2,85	142,0	131,9	+7.12
I	0,016	111,0	123,4	−11,17
IV	0,289	166,5	161,3	+3,12
II	0,023	164,0	162,9	+0,67
VI	3,85	152,5	165,8	−8,72

Die letzte Kolumne enthält die Abweichungen der berechneten Werte von den beobachteten in Prozenten der letzteren ausgedrückt. Die prozentische Abweichung beläuft sich im Mittel auf 4,30 %; die Formel III stimmt also mit den Beobachtungen noch etwas besser überein, als I.

Die im vorhergehenden entwickelten Formeln geben das Spannungsgefälle in Volt pro cm, wenn die Stromstärke in Milliamper, die Stromdichte in Milliamper pro qmm, der Druck in mm Quecksilber, der Röhrendurchmesser in cm ausgedrückt wird.

Vergleich der Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus in Potsdam und Cheltenham im Jahre 1904.

Von

F. Linke.

Mit 1 Figur und 1 Tabelle.

Vorgelegt durch Herrn E. Wiechert in der Sitzung am 23. November 1907.

1. Die Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus geschieht allgemein nach der Methode der Ablenkungen und Schwingungen. Die hierfür aufgestellten Formeln weichen nur unwesentlich von einander ab. Lamont hat folgende Fassung vorgeschlagen:

$$\log H = \log\left(\pi \sqrt{\frac{2k K_0}{e_0^3}}\right) - \log T - \tfrac{1}{2} \log \sin \varphi - 0.4343\, (\tfrac{3}{2}\beta - \beta')\, t$$
$$+ 0.4343\, (\tfrac{1}{2}\alpha + \beta')\, (t' - t) - 0.4343\, [1 + \tfrac{1}{2}(n' + n_1')\, \varepsilon']$$
$$- 0.1861\, k' H\, (1 + \tfrac{4}{3} \sin \varphi).$$

Hierbei bedeuten:

H Horizontalintensität,
k die sogenannte Ablenkungskonstante,
K_0 das Trägheitsmoment des schwingenden Magneten bei 0°.
e_0 die Entfernung des ablenkenden Magneten bei 0°,
T die Schwingungsdauer,
φ den Ablenkungswinkel,
β den Ausdehnungskoeffizienten des Messings,
β' den Ausdehnungskoeffizienten des Stahls,
α den Temperaturkoeffizienten des Magneten,
t die Temperatur des Magnaten bei den Schwingungen,

t' die Temperatur des Magneten bei den Ablenkungen,
n' den Stand des Variationsinstrumentes bei den Schwingungen,
n_1' den Stand des Variationsinstrumentes bei den Ablenkungen,
ε' den Skalenwert des Variationsinstrumentes,
k' des Induktionskoeffizienten des Magneten.

Um die Formel übersichtlicher zu machen, bezeichnet man
mit H_0 den Basiswert des Variationsinstrumentes,
mit T_0 die auf die Basis des Variationsinstrumentes und eine Mitteltemperatur reduzierte Schwingungsdauer,
mit φ_0 den in gleicher Weise reduzierten Ablenkungswinkel,
mit C den Ausdruck $\pi\sqrt{\frac{2kK_0}{e_0^3}}$, welcher die als unveränderlich anzunehmenden Konstanten enthält.

Ferner nehme ich für das letzte Glied, in welchem noch die irrtümliche Annahme enthalten ist, daß der Induktionskoeffizient bei vergrößernder Induktion verschieden sei von dem bei verringernder, die Potsdamer Form:

$$-0.217\,k'\,H\,(1+\sin\varphi).$$

Hiernach verwandelt sich die Lamontsche Fassung in folgende:

$$\log H_0 = \log C - \log T_0 - \tfrac{1}{2}\log\sin\varphi_0 - 0.217\,k'\,H\,(1+\sin\varphi).$$

Von diesen vier Gliedern der rechten Seite ist das erste für denselben Theodolithen und denselben Magneten konstant; die beiden mittleren ergeben sich aus der jedesmaligen Beobachtung; das letzte (Induktions-)Glied variiert so schwach mit der Horizontalintensität und dem Winkel φ, das man es für ein und denselben Ort als konstant betrachten kann.

Aus der Erfahrung ergibt sich nun, daß man die drei letzten Glieder mit großer Genauigkeit bestimmen kann und daß die Schwierigkeit der Messung allein in der Bestimmung von C besteht. Es sind hierzu sehr genaue Hilfsmessungen erforderlich mit Apparaten, welche nicht an allen Instituten vorhanden zu sein pflegen.

Das Wesen der „Relativen Theodolithen“ besteht nun darin, daß C nicht durch absolute Bestimmung der einzelnen Faktoren, sondern durch Vergleich mit dem Theodolithen eines größern Observatoriums gewonnen wird.

Ohne die Genauigkeit irgendwie zu verringern, erspart man auf diese Weise die Messung der Entfernungen des ablenkenden Magneten, die Messung und Berechnung des Trägheitsmomentes,

die Berechnung der sog. Ablenkungskonstanten mittels Ablenkungen aus zwei Entfernungen; ferner werden Ungenauigkeiten in der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten (α) und des Induktionskoeffizienten (k') durch teilweise Uebernahme in die Konstante C in ihren Wirkungen auf das Resultat abgeschwächt. Die Hauptfehlerquellen werden dadurch vermieden. Ein weiterer Vorteil ist es, daß der „Relative Theodolith" infolgedessen viel einfacher, leichter und billiger gebaut werden kann.

2. Es könnte eingewandt werden, daß ein leichtgebauter Theodolith sich zu leicht verändern wird. Demgegenüber können als beste Widerlegung die tatsächlichen Ergebnisse angeführt werden. Sie wurden gewonnen mit einem Magnalium-Theodolithen von der Firma L. Tesdorpf in Stuttgart, welcher nach Angaben von M. Eschenhagen und J. Edler verfertigt war (s. Figur auf Seite 4). Er wurde zuerst von F. Bidlingmeyer auf der Deutschen Südpolar-Expedition 1901/1903 benutzt. Während der Expedition hatte sich — nach einer privaten Mitteilung von Herrn Bidlingmeyer — der $\log C$ des Magneten 22 um 0.00002 geändert, was einer Unsicherheit von H um noch nicht 1 γ entspricht $\left(0.00002 \frac{H}{\text{mod.}},\ H = 0.189\right)$.

Danach wurde dasselbe Instrument 2½ Jahre im Samoa-Observatorium in Apia benutzt. Die Veränderung von $\log C$ betrug bei Magnet 22 0.00002, bei Magnet 32 0.00000; im Mittel also $\Delta H = \frac{1}{2}\gamma$. Man muß das Verhalten des Theodolithen als recht gut bezeichnen, besonders wenn man bedenkt, welchen Strapazen er bei den häufigen Transporten ausgesetzt gewesen ist. Auf der Fahrt durch die Vereinigten Staaten von Nord-Amerika war er als Passagiergepäck aufgegeben; bei der magnetischen Vermessung von Samoa ist er tagelang von eingeborenen Trägern transportiert worden; alles das hat ihm ebensowenig wie Sonnenstrahlung und Kälte anhaben können.

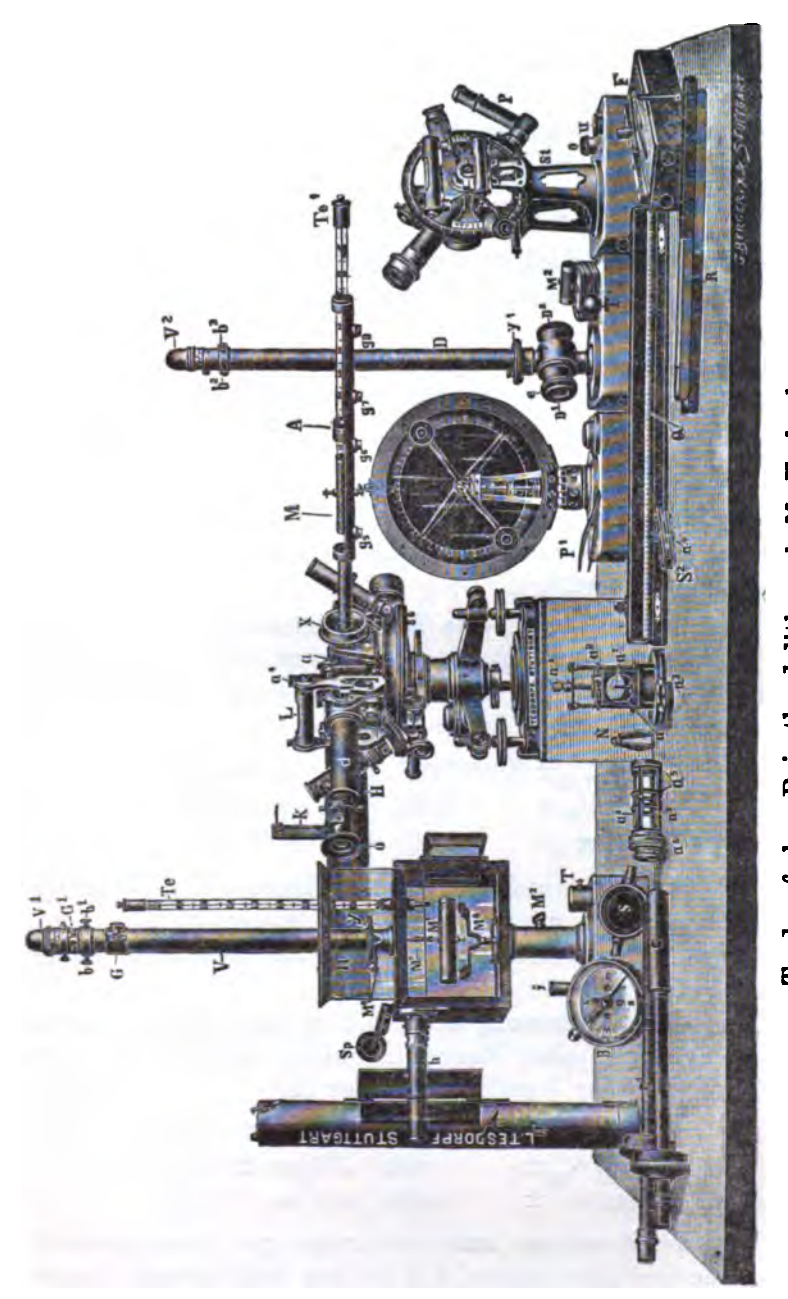
Um für den Fall, daß sich eine wesentliche Aenderung der Konstanten zeigen sollte, die Ursache feststellen zu können, sind zeitweise Ablenkungen in zwei Entfernungen gemacht worden.

Es muß die Formel bestehen:

$$\frac{M_0}{H_0} = \frac{1}{2k} e_0^3 \sin\varphi_0 (1 + k' H \sin\varphi) = \frac{1}{2K} E_0^3 \sin\Phi_0 (1 + k' H \sin\Phi)$$

also

$$\frac{e_0^3 K}{E_0^3 k} = \frac{\sin\Phi_0}{\sin\varphi_0} \cdot \frac{1 + k' H \sin\Phi}{1 + k' H \sin\varphi}$$



Tesdorpfscher Reisetheodolith nach M. Eschenhagen.

(Mit Erlaubnis von F. Sartorius in Göttingen.)

oder logarithmiert

$$\log \sin \varphi_0 - \log \sin \Phi_0 + \log (1 + k' H \sin \Phi) - \log (1 + k' H \sin \Phi) = \log \frac{e_0^3 K}{E_0^3 k},$$

wo Φ und K für die zweite Entfernung E gelten und M das Moment des Magneten ist.

Wenn keine Veränderungen vorgekommen sind, muß $\log \frac{e_0^3 K}{E_0^3 k}$ auch an Orten mit verschiedener Horizontal-Intensität konstant sein.

Die Zahlenwerte dieses Ausdruckes waren im Mittel mehrerer Beobachtungssätze:

	in Potsdam vor der Ausreise	in Apia bei Ankunft	in Apia vor Abreise	in Potsdam nach Rückkehr
für *Mgt* 22	0.07121	0.07128	0.07128	0.07124
für *Mgt* 32	0.07108	0.07111	0.07112	0.07111

3. Mit diesem Tesdorpfschen Reisetheodolithen wurde nun eine Vergleichung der Messungen der Horizontal-Intensität in Potsdam und Cheltenham ausgeführt.

Zunächst wurden durch eine Anschlußmessung in P o t s d a m, die aus je 4 ganzen Messungssätzen mit jedem der beiden Magnete 22 und 32 bestand, $\log C_{22}$ und $\log C_{32}$ bestimmt. Die dabei berechneten wahrscheinlichen Fehler waren für

$\log C_{22} \pm 0.00000.87$, $\Delta H = \pm 0.38\,\gamma$
$\log C_{32} \pm 2.35$, $\Delta H = \pm 1.02\,\gamma$
für die ganze Messung ± 1.16, $\Delta H = \pm 0.50\,\gamma$.

In C h e l t e n h a m wurden mit jedem Magnete drei Messungssätze beobachtet. Die mit jedem Magnete erlangten Mittelwerte stimmen genau mit einander überein. Der wahrscheinliche Fehler des Resultats beträgt: $\Delta H = \pm 0.78\,\gamma$.

Die bei der Schlußmessung in P o t s d a m nach Rückkehr durch 3 Messungssätze mit jedem Magneten erzielte Genauigkeit (wahrscheinlicher Fehler der Resultate) beträgt für

$\log C_{22} \pm 0.00000.61$, $\Delta H = \pm 0.26\,\gamma$
$\log C_{32} \pm 1.02$, $\Delta H = \pm 0.44\,\gamma$
für die ganze Messung ± 0.53, $\Delta H = \pm 0.23\,\gamma$.

Obgleich die Messungen unter sich recht gut übereinstimmen, und damit die Gewißheit geben, daß bei den Reduktionen (Temperatur und Variation) keine Versehen untergelaufen sind, stellte es sich heraus, daß der V e r g l e i c h s t h e o d o l i t h mit den in

Mgt 22. 1) Ablenkungen.

Ort	Datum	Zeit	Bez.	φ	$A\delta\varphi^2$	$\Delta\vartheta$	φ corr	log sin φ corr	t	n'	Reduktion auf $t = 28$	Reduktion auf $n' = n'_0$	log sin φ_0	$^1/_2$ Mittel	Bemerkungen
											0.00	0.000			Induktionskoeffizient k'_{22} = 0.01227.
Potsdam	04. X. 30	8ª 15—34	0	54°51!92	—0!02	+ 0!12	54°52!02	9.91266	17°71	91.38	— 279	+ 08	9.90995	9.95495	Mittl. Temperaturkoeff.
		10ª 10—25	*u*	54 48.92	— 0.02	+ 0.13	54 49.03	9.91239	18.47	90.93	— 259	+ 06	9.90986		f. Ablenk. — 0.000274 f. Schwing. — 0.000118
Cheltenham	04. XI. 20	1 *p* 0—20	0	50 23.20	— 0.13	— 0.01	50 23.06	9.88669	15.41	17.2	— 339	+ 37	9.88367	9.94180	log. Skalenwert ($\varepsilon'^{\frac{0.4343}{H}}$)
		2 *p* 1—20	*u*	50 16.10	— 0.13	— 0.05	50 15.92	9.88593	17.24	23.0	— 292	+ 50	9.88351		in Potsdam: 6.10 (ε' = 2.65) in Cheltenham: 2.16 (ε' = 1.00)

2) Schwingungen.

Ort	Datum	Zeit	Bez.	T	t	h	n'	log T	Reduktion auf $t = 28$	Reduktion auf $h = 0$	Reduktion auf $n' = n'_0$	$^1/_2$ log $(1+\gamma)$	log T_0	Mittel	Bemerkungen
									0.00	0.0000	0.000	0.00			Basis n'_0
Potsdam	04. X. 30	9ª 4—15	0	4ˢ16325	18°25	2°8	91.04	0.61943	+ 115	— 2	+ 03	+ 195	0.62254	0.62248	in Potsdam: 90.0 mm in Cheltenham: 0 *)
		9ª 35—46	*u*	4.16230	18.50	2.8	91.40	0.61933	+ 111	— 2	+ 04	+ 195	0.62241		Basiswert H_0 in Potsdam: 0.18879
Cheltenham	04. XI. 20	1 *p* 32—43	0	4.03305	16.10	2.6	20.0	0.60563	+ 137	— 1	+ 22	+ 184	0.60905	0.60912	in Cheltenham:
		1 *p* 47—57	*u*	4.03460	16.47	2.5	21.0	0.60580	+ 133	— 1	+ 23	+ 184	0.60919		0.20100 *)

3) Berechnungen.

Potsdam.

$$\log H_0 + \log T_0 + {}^1/_2 \log \sin \varphi_0 + 0.217\, \varkappa' H (1 + \sin \varphi) = \log C_{22}$$

9.27598 0.62248 9.95495 0.00092 9.85433

Cheltenham.

$$\log C_{22} - \log T_0 - {}^1/_2 \log \sin \varphi_0 - 0.217\, \varkappa' H (1 + \sin \varphi) = \log H_0$$

9.85433 0.60912 9.94180 0.00095 9.30246

Theod. Tesdorpf H_0 = 0.20066
Cheltenham H_0 = 0.20100
Differenz: — 0.00034

*) Um das Rechenverfahren beibehalten zu können, wurden die Beobachtungen in Cheltenham auf die angenommene Basis 0.20100 reduziert.

Potsdam bestimmten Konstanten in Cheltenham einen um 35 γ kleineren Wert der Horizontal-Intensität ergab als die dortigen Messungen.

Ein weiterer Vergleich der H-Messung in Cheltenham und Potsdam wurde in Apia ausgeführt zwischen demselben Theodolithen des Samoa-Observatoriums und dem auf dem Vermessungsschiff „Galilee“ der Carnegie-Institution benutzten (Kew-Model), welcher an Cheltenham angeschlossen ist. Nach dem mir mitgeteilten Resultat ergab letzterer im Mittel $H = 0.35709$ *cgs* während die Registrierungen des Samoa-Observatorium $H = 0.35675$ ergaben. Da die Differenz von 34 γ fast dieselbe ist, wie die in Cheltenham festgestellte, kann man an einem prinzipiellen Unterschiede zwischen den beiden indirekt verglichenen Observatorien nicht zweifeln.

4. Es soll besonders erwähnt werden, daß stets die gleichen Berechnungsmethoden und Formeln benutzt wurden und auch sonst auf jede Weise die Möglichkeit eines Versehens ausgeschaltet wurde.

Um wegen der außergewöhnlichen Größe des gefundenen Unterschiedes so weit wie möglich eine Kontrole zu ermöglichen, sowie durch Vergleich der Methoden zum Aufsuchen der Ursache des Unterschiedes anzuregen, soll in nebenstehender Tabelle die Berechnung je einer Messung in Cheltenham und Potsdam mit Ableitung der hauptsächlichen Konstanten ausgeführt werden.

Die obigen Resultate erübrigen es fast darauf hinzuweisen, wie notwendig es ist, derartige Vergleiche von Zeit zu Zeit zu veranstalten, wenn man die Resultate verschiedener Observatorien zu theoretischen Studien benutzen will. Gleichzeitig sollte hier gezeigt werden, daß solche Vergleiche einwandsfrei mittels „Relativer Theodolithen“ ausgeführt werden können.

Nach den Erfahrungen dieses Vergleichs Cheltenham-Potsdam würde es zu erwägen sein, ob kleinere Observatorien nicht auf absolute Konstantenbestimmung prinzipiell verzichten und ihre Messungen an ein Hauptobservatorium anschließen sollten. Es genügt vollständig, wenn an 2 oder 3 solchen Hauptobservatorien die Konstantenbestimmung ausgeführt würde; hier aber auch mit aller Schärfe und nach mehreren von einander unabhängigen Methoden.

Göttingen im Oktober 1907.

Ueber das Verhalten und das Alter der Störungen in der Umgebung der Sackberge und des Leinethales bei Alfeld und Elze.

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Dezember 1907.

Seit längeren Jahren habe ich das Verhalten von Dislokationen und den Gebirgsbau im nordwestlichen Deutschland eingehend untersucht und Verschiedenes darüber veröffentlicht. Verschiedene Fragen blieben aber noch zweifelhaft, so namentlich das Fehlen gerade der festen Gesteine des Oberen Jura auf der rechten Leineseite unterhalb Kreiensen, während solche auf der gegenüber liegenden Seite in großer Mächtigkeit und regelmäßiger Folge vorhanden sind, ähnlich wie im Wesergebirge, während im Teutoburger Walde nur einzelne Schollen von Oberem Jura erhalten sind.

Dort konnte nun H. Stille den Nachweis führen, daß durch Störungen vor der Kreidezeit sehr erhebliche Verschiebungen der Schichten erfolgt sind, so daß sie an relativ gehobenen Stellen abradirt oder sonstwie abgetragen werden konnten. Daß solche Abrasionen auch viel weiter nach Osten stattgefunden haben, unterliegt keinem Zweifel, ist doch schon vor über 50 Jahren durch Ewald und Andere hervorgehoben worden, daß das Hilskonglomerat am nördlichen Harzrande vielfach abgerollte Bruchstücke von Ammoniten vermengt enthält, welche aus verschiedenen Schichten des Jura stammen, und in der Gegend von Salzgitter treten solche als Eisenstein entwickelte Hilskonglomerate in recht verschiedenen Horizonten der unteren Kreide, im oberen Valanginien, Hauterivien, Barrêmien und unteren Aptien auf. Die Abtragungen haben

somit sehr lange Zeit in dieser Gegend fortgedauert und haben sich später an anderen Stellen wiederholt, wie z. B. die unter-senonen Eisensteine von Bülten-Adenstedt-Ilsede Konglomerate von Thoneisenstein- und Phosphorit-Geröllen sind, in denen noch am häufigsten Ammoniten des unteren und oberen Albien (Gault) vorkommen, und es wird sich wohl feststellen lassen, aus welcher Gegend diese einstmals fortgewaschen sind.

Die wichtigsten Störungen, welche für die jetzige Oberflächengestaltung von besonderer Bedeutung gewesen sind, gehören aber der jüngeren Tertiärzeit, dem oberen Miocän oder selbst dem unteren Pliocän an, da an zahlreichen Stellen das nordwestdeutsche Tertiärgebirge von Brüchen der Südost-Nordwestrichtung und der Süd-Nordrichtung durchsetzt und gestört wird, wie ich schon vor längeren Jahren hervorgehoben habe und zuletzt noch in einem Aufsatze „über scheinbare und wirkliche Transgressionen".

Es muß daher versucht werden, das Verhalten der zu verschiedenen Zeiten entstandenen Dislokationen zu einander klar zu legen, und einen Beitrag hierzu möchte ich im Folgenden liefern.

Zwischen Alfeld und Brüggen, gegen 700 m nordwestlich von Wettensen, springt auf der rechten Seite der Leine das Steilufer nach Westen vor und läuft dann wieder weiter nach Nordwesten. Hier ist auf ca. 800 m Länge aufgeschlossen, ziemlich steil nach Nordosten einfallend:

1. Der oberste Wellenkalk; darüber folgt an dem steilen Vorsprunge

2. Mittlerer Muschelkalk, wenig über 50 m mächtig, nahe seiner unteren Grenze mit ca. 4 m streifigem Gyps.

3. Trochitenkalk und Thonplatten, verrutscht, gegen 20 m.

4. Graue Mergel und Sandsteine (Lettenkohle?), sowie rothe Mergel mit Steinmergel, Gypskeuper, wohl etwa 100 m.

5. Grauer, schiefriger Thon, vielleicht Rhätkeuper.

6. Dunkle Thone, vermuthlich Lias.

Darüber liegen an dem Steilhange theils vorglacialer Plänerschotter und Grundmoräne, diese auch unmittelbar, theils nach Osten mächtiger Lößlehm. Weder der obere Muschelkalk noch der Keuper ist in voller Mächtigkeit vorhanden, also wohl beide durch eine Verwerfung abgeschnitten, wie dies ja so häufig der Fall ist.

Der Trochitenkalk läßt sich übrigens auch gegen 600 m weit nach Nordwesten verfolgen und fällt dort in einem alten Stein-

bluche mit 30 Grad nach Nordosten ein. In gleicher, nordwestsicher Richtung, ein wenig weiter nach Osten, tritt auch an ein Paar kleinen Stellen unter der Lehmdecke Gypskeuper hervor sowie auch Lias, der etwa 800 m nordwestlich von dem erwähnten Profile eine größere Fläche einnimmt und ziemlich viel Thoneisenstein enthält, wie dies sonst besonders bei oberem Amaltheenthon der Fall ist. Unmittelbar östlich davon waren auf dem Felde herausgepflügt

7. Oolithischer Brauneisenstein und grauer Neokomthon mit Exogyra Couloni, Hoplites noricus und Belemnites subquadratus, also Unteres Hauterivien. Bei einer Erstreckung des Thones von Westen nach Osten von fast 200 m könnten auch noch höhere Zonen der Neokom vorhanden sein, dann folgt

8. Heller, mürber Hilssandstein, Unteres Albien (oder Gault).

9. Minimus-Thon und Flammenmergel am Vorderen Hainholz und dann die ganze obere Kreide der Sackberge.

Ganz dieselbe Schichtenfolge von 1. bis 9. findet sich nun auch im Fortstreichen nach Südosten jenseit Alfeld am Schleeberge und auf der Nordostseite des nach Hörsum führenden Thales und weiter über Everode bis weit über Winzenburg hinaus auf eine Erstreckung von nahezu 12 Kilometern, abgesehen davon, daß die obere Kreide nicht ganz so weit reicht.

Ein Zusammenhang dieses langen Streifens mit dem oben beschriebenen Profil, unter der Thalsohle der Leine fort, ist daher ganz wahrscheinlich, obgleich diese Unterbrechung gegen 5 Kilometer lang ist; mit Flachbohrungen auf den Wiesen nordwestlich von Alfeld ist aber auch Muschelkalk und Gypskeuper im Untergrunde angetroffen worden, so daß der Zusammenhang wohl mit genügender Sicherheit angenommen werden kann.

Der Streifen von Muschelkalk mit gleichem Einfallen, auf Blatt Gandersheim freilich meist ohne Keuper, läßt sich aber mit geringen Unterbrechungen durch Querthäler und Lehmplatten noch ca. 12 Kilometer weiter, also von Alfeld an 24 Kilom. weit bis Dannhausen bei Seesen verfolgen, wo er sich längs einer Störung erst steil nach Norden umbiegt und dann nach Nordwesten über Lamspringe und, stärker gestört, über Harbarnsen bis Sehlem (auf Blatt Sibbesse) verläuft. Hier, auf der Ostseite der Sackberge, folgt aber über dem Muschelkalk, ganz wie auf der Westseite bei Alfeld, ein Theil des Keuper und des Lias und dann dieselben Stufen der unteren und der oberen Kreide, so daß hier wie dort eine gleichzeitige Aufrichtung der Schichten und eine gleichzeitige

Entstehung der Verwerfungen oder Ueberschiebungen durch dieselben Kräfte angenommen werden darf.

Diese Zeit ist aber jedenfalls eine früh-kretacische oder vorkretacische im Sinne von H. Stille, und es folgte ihr die Abtragung oder Abrasion aller jüngeren Schichtenfolgen des mittleren und oberen Jura, wie sie sonst rund herum, am Selter westlich der Leine, bei Hildesheim bis Derneburg, bei Goslar, südlich von Dannhausen etc. mehr oder minder vollständig noch heute vorhanden sind, so daß die hier ältesten Kreideschichten, der Neokomtan, diskordant auf mittlerem oder oberem Lias, im Norden auch unterstem braunem Jura abgelagert werden konnten.

Wenn nun die Kreidemasse der Sackberge (Gronauer Kreidemulde Försters, Siebenberge nebst Vorbergen, Sackwald etc.) noch deutlich oben eine Abrasionsfläche und Reste von jedenfalls untermiocänen Quarzsanden führt, die sich im Norden merklich neigt, während sonst die Tertiärschichten in der weiten Umgebung sehr viel tiefer liegen, fast stets nachweisbar an Störungen eingesunken, so müssen dies eben noch jüngere Störungen sein, wie ich dies schon seit langen Jahren verschiedentlich ausgeführt habe.

Nördlich von dem ganzen, bisher besprochenen Gebiete zieht sich nun die große Trias-Antiklinale des Hildesheimer Waldes (im weitesten Sinne) aus der Gegend von Derneburg nach Westen und Westnordwesten bis in die Nähe von Nordstemmen hin, hat aber ein ganz anderes Schichtenstreichen als die oben angeführten Muschelkalkzüge und bleibt von ihnen überall getrennt, bei Bodenburg namentlich auch durch eingesunkenes Tertiär (marines Oberoligocän), so daß ich für sie eine andere Zeit der Entstehung resp. Auffaltung für wahrscheinlich halten möchte, nämlich eine jungtertiäre. Wenn auch auf der Nordseite des Hildesheimer Waldes bei Diekholzen und Marienrode marines Oberoligocän unmittelbar neben Buntsandstein liegt und die stärker zerrüttete Triasantiklinale davon trennt, die sich von hier nach Norden über Himmelsthür bis Giesen erstreckt, so könnten diese füglich eine nach Westen verschobene und schmalere Fortsetzung der konvergirenden antiklinalen Triaszüge des „Heber“ (Lamspringe-Sehlem) und der „Harplage“ sein, also gleichzeitig mit ihnen aufgerichtet worden sein.

Im Leinethal treten, wie schon Wermbter[1]) ausführte, Störungen verschiedenen Alters und verschiedener Richtungen auf, welche damals zutreffend beschrieben wurden, aber besonders für

1) Der Gebirgsbau des Leinethals zwischen Greene und Banteln, Inaugural-Dissertation Göttingen 1890 und Beilage-Band VII des Neuen Jahrbuchs für Mineralogie etc. 1890.

das nördliche Gebiet nicht recht anschaulich gemacht werden konnten, da genaue Specialkarten, wie die Meßtischblätter im Maßstabe von 1:25000 noch nicht existirten.

Bei und in Freden wurde die eigentliche Sattelspalte des Leinethales, in welcher eingeklemmt Streifen von Neokomthon, Hilssandstein und Flammenmergel, sowie marines Oberoligocän und Quarzsande des Unteren Miocän liegen, als jung-tertiär angesprochen, und dies trifft auch jetzt noch zu. Daß sie etwa vorkretacisch wäre und sich nur in der jüngeren Tertiärzeit erneuert oder erweitert hätte, ist auch deshalb nicht wohl anzunehmen, weil sie eine etwas andere Richtung hat, als die nordöstlich davon liegenden Trias-Züge, die nach dem oben Gesagten vor- oder doch früh-kretacisch aufgerichtet sein dürften. Auf der später von mir aufgenommenen geologischen Spezialkarte, Blatt Freden, konnten nun einzelne Störungen und Bruchlinien nicht dargestellt werden, weil sie bei dem Mangel an Aufschlüssen über Tage in den wenig verschiedenen, mürben, zerfallenen Schichten des Unteren Buntsandstein nicht genau erkannt werden konnten oder auch wohl in der Thalsohle oder unter einer Lehmdecke liegen. Aber selbst wenn man annehmen will, daß der Triasstreifen nordöstlich der Leine seine jetzige, oft recht steile Lage nicht gleich ursprünglich, sondern zum Theil erst weit später durch wiederholte Bewegungen erhalten hätte, so dürfte doch der eigentliche alte Bruchrand etwa von der Zechsteinscholle bei Hausfreden östlich von Klein-Freden und dem Kaliwerk Hohenzollern vorbei in der Richtung auf Meimerhausen verlaufen.

Dies wird auch dadurch wahrscheinlich, daß der Buntsandsteinrücken, auf welchem das Kaliwerk steht, ein südnördliches Streichen aufweist, abweichend von dem allgemeinen nordwestlichen Streichen. Die Störungen und Ueberschiebungen [1]), welche durch den Bergbau dort nachgewiesen sind, dürften daher mindestens theilweise erst in der jüngeren Tertiärzeit ausgebildet worden sein, ebenso wie die das Leinethal selbst bis Freden auf der rechten Seite und von da nach Nordwesten auf der linken Seite begleitenden Brüche.

Diese bedingen ja nun zum Theil recht erhebliche Störungen, welche auf der geologischen Karte nicht sofort in die Augen springen; so möchte ich hervorheben, daß in der scheinbar regelmäßigen Schichtenfolge westlich von Alfeld zunächst der Buntsandstein stark zerrüttet ist, indem ganz verschiedene Abthei-

---

1) A. v. Koenen, Ueber die Wirkungen des Gebirgsdruckes im Untergrunde in tiefen Salzbergwerken. Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1905 I und Zeitschr. f. praktische Geologie 1905.

lungen desselben neben einander liegen und ganz verschiedener Streichen und zum Theil recht steiles Einfallen besitzen; der Wellenkalk steht ferner etwas überkippt und zeigt Quetschfalten, während der Obere Muschelkalk wieder normal einfällt, aber durch eine Ueberschiebung vom Gypskeuper getrennt ist.

Nordwestlich von Alfeld und nordöstlich vom Külf treten dann auffällige Geländeformen auf, die ich zum Theil auf Auslaugung von Steinsalz und entsprechende Senkung der Oberfläche zurückführen möchte. so das recht große, mit Lehm erfüllte Becken bei Limmer zwischen der Eisenbahnstrecke und dem anstehenden Buntsandstein, welcher dort ja so ungewöhnlich schmal wird und sich so stark senkt, ferner die Einsenkung westlich von Banteln und der „Bruch“ nördlich von Eime. Bei der Senkung mögen dann auch Störungen entstanden sein. welche die Untersuchung des Gebirgsbaues wesentlich erschweren, indem die Schichten nach solchen Senkungsgebieten hin einfallen, so am Nordwesthange des Wahrberges bei Alfeld etc.

Da diluviale Bildungen den weitaus größten Theil der ganzen Störungszone weiter nach Norden und Nordwesten verhüllen, so ist die Untersuchung der auf dem Oberge S. S. O. Banteln (Ohberg bei Wermbter) und westlich davon zu Tage tretenden Gesteine geeignet, ein Bild von dem ganzen Gebirgsbau zu geben. Es finden sich dort vier getrennte, annähernd parallele Streifen von Trochitenkalk, von welchen der erste den Nordostkamm des Berges bildet, in Steinbrüchen aufgeschlossen ist und mit durchschnittlich 25 bis 30 Grad nach Nordosten einfällt. Er wurde schon von Wermbter in (natürlich nicht ununterbrochene) Verbindung gebracht mit den oben erwähnten Muschelkalkstreifen am Leineufer südlich von Brüggen, sowie mit dem Trochitenkalk am Ostende und nördlich von Eime auf dem „Hunnenlager“. Auf dem nördlichsten Feldwege des Oberges fällt dann, nur 75 m von dem ersten Streifen entfernt, ein zweiter entgegengesetzt mit ca. 30 Grad nach Südwesten ein; am Südhange des Oberges liegt aber unter dem ersten Streifen noch Mittlerer und Unterer Muschelkalk mit ähnlichem Einfallen, und der letztere steht auf dem südlichsten Feldwege wieder mit ca. 30 Grad südwestlichem Einfallen an als Gegenflügel der Antiklinale. Auf dem Rücken südlich vom Oberge fällt aber ein Streifen Trochitenkalk nach Norden ein und biegt sich an der Landstraße nach Banteln nach Nordwesten um in der Richtung auf den dritten Streifen Trochitenkalk. Dieser liegt auf dem Feldwege, welcher vom Südhange des Oberges nach Westen führt, 50 m westlich von der Landstraße und wird östlich durch einen Streifen Gypskeuper abgeschnitten; nach Westen folgen dann etwa 500 m nach Süd-

ders in ihrem nördlichen Theile alle Jura- und Kreidebildungen (abgesehen vielleicht von dem nicht entwickelten Valanginien und Barrêmien) regelmäßig über einander, während wesentliche Brüche den Hilskamm bei Delligsen und Holzen durchschneiden, und andere am Selterzug und am Ith auftreten, und Bohrungen nach Wälderthonkohle außerhalb und innerhalb des Hilskammes haben in den letzten 10 Jahren vielfach Rutschflächen und Harnische sowie stärkere Störungen in den durchbohrten Kreide- und Wealden-Schichten ergeben; endlich liegen zwischen dem Hilskamme und dem Selterzuge bei Wallensen Tertiärschichten eingesunken, ebenso wie bei Freden, Eschershausen etc., so daß jungtertiäre Störungen hier jedenfalls von wesentlichem Einfluß sind.

Dasselbe ist auch der Fall bei Groß-Rhüden-Bornhausen, Bodenburg und Diekholzen-Marienrode, aber der Hildesheimer Wald, die Trias-Antiklinale zwischen Derneburg und Nordstemmen, ist jedenfalls etwas älter, als die durch Tertiärschichten von ihr getrennten Bergzüge, die mehr oder minder steil gegen sie gerichtet sind, wie die süd-nördlich laufende Antiklinale Marienrode-Giesen, die südlich von den Giesener Teichen eine Scholle miocäner Quarzsande eingeklemmt enthält und sich im Süden so auffällig zwischen den Muschelkalk und Buntsandstein des Hildesheimer Waldes und den Rhätkeuper einschiebt; dieser legt sich weiter nach Osten ganz gleichmäßig auf den Muschelkalk auf, wie dies alles Windhausen gezeigt hat.

gebrachtes Bohrloch unter 120 m Diluvium die obersten Schichten des Wellenkalk traf und diesen bis 420 m Tiefe nicht durchbohrte. Mit diesem Bohrloch wurde wohl noch der Nordostflügel der Antiklinale getroffen, mit dem anderen der verruschelte mittlere Theil.

Die Störungen vom Rande des Külf setzen jedenfalls weiter nach Nordwesten fort; so fällt auf dem Sonnenberge zwischen Dunsen und Esbeck der Trochitenkalk vorwiegend nach Südwesten ein, im Südosten aber auch nach Nordosten, und ist im Norden gespalten.

Im weiteren Fortstreichen liegt endlich auf der Nordostseite des Osterwaldes Muschelkalk neben dem Lias.

Die geologische Geschichte der Bergzüge im Hildesheimischen würde nach allem diesem folgende sein: Gegen Beginn der Kreidezeit wurde der Trias-Sockel der Sackberge zusammen- und emporgeschoben, so daß der Keuper großentheils auf die Thonplatten und der Lias auf dem Keuper überschoben, jedenfalls alle drei durch Verwerfungen abgeschnitten oder getrennt wurden. Der mittlere und obere Jura ragten dann so weit hervor, daß sie abradiert und vielleicht auch gleich den untersten Kreide-Bildungen einfach nicht abgelagert wurden. Es liegen daher die ältesten vorhandenen Kreidezonen, von denen nur unteres Hauterivien bisher nachgewiesen ist, meistens auf Lias, vereinzelt auf unterstem braunem Jura, und darüber folgt in normaler Entwicklung das ganze Albien, Cenoman und Turon, von welchem als oberstes Glied noch Cuvieri-Pläner erhalten, Vieles aber später wieder fortgewaschen ist, vielleicht schon in der obersten Kreidezeit oder der älteren Tertiärzeit, sicher aber in der jüngeren Tertiärzeit, da auf der Abrasionsfläche der Sackberge im Norden noch Fetzen von Miocän erhalten sind.

Die Störungen, welche am Ende der Miocänzeit erfolgt sind und sonst so bedeutenden Einfluß auf den Gebirgsbau gehabt haben, sind auf die Sackberge und ihren Triassockel, abgesehen von dessen nördlichem Rande, ohne wesentliche Bedeutung geblieben, indem sie nicht viel mehr, als etwa eine stärkere Aufbiegung und Fältelung der Muldenflügel bewirkt haben dürften. Eine sehr starke Erosion hat dann besonders in vorglacialer Diluvialzeit stattgefunden wesentlich stärker, als in postglacialer Zeit.

Die Hilsmulde im weiteren Sinne ist wesentlich stärker erodirt und enthält oberes Turon nicht mehr, dagegen liegen beson

ders in ihrem nördlichen Theile alle Jura- und Kreidebildungen (abgesehen vielleicht von dem nicht entwickelten Valanginien und Barrêmien) regelmäßig über einander, während wesentliche Brüche den Hilskamm bei Delligsen und Holzen durchschneiden, und andere am Selterzug und am Ith auftreten, und Bohrungen nach Wälderthonkohle außerhalb und innerhalb des Hilskammes haben in den letzten 10 Jahren vielfach Rutschflächen und Harnische sowie stärkere Störungen in den durchbohrten Kreide- und Wealden-Schichten ergeben; endlich liegen zwischen dem Hilskamme und dem Selterzuge bei Wallensen Tertiärschichten eingesunken, ebenso wie bei Freden, Eschershausen etc., so daß jungtertiäre Störungen hier jedenfalls von wesentlichem Einfluß sind.

Dasselbe ist auch der Fall bei Groß-Rhüden-Bornhausen, Bodenburg und Diekholzen-Marienrode, aber der Hildesheimer Wald, die Trias-Antiklinale zwischen Derneburg und Nordstemmen, ist jedenfalls etwas älter, als die durch Tertiärschichten von ihr getrennten Bergzüge, die mehr oder minder steil gegen sie gerichtet sind, wie die süd-nördlich laufende Antiklinale Marienrode-Giesen, die südlich von den Giesener Teichen eine Scholle miocäner Quarzsande eingeklemmt enthält und sich im Süden so auffällig zwischen den Muschelkalk und Buntsandstein des Hildesheimer Waldes und den Rhätkeuper einschiebt; dieser legt sich weiter nach Osten ganz gleichmäßig auf den Muschelkalk auf, wie dies alles Windhausen gezeigt hat.

Ueber eine Berechnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen aus dem Planckschen Energie-Element.

Von

W. Wien.

Mit einer Figur im Text.

Vorgelegt in der Sitzung am 23. November 1907.

Bei Gelegenheit der Bestimmung des Verhältnisses der Energie der Röntgenstrahlen zu der der erzeugenden Kathodenstrahlen hatte ich bemerkt[1]), daß die Geschwindigkeit der von den Röntgenstrahlen sekundär erzeugten Kathodenstrahlen bei weitem zu groß ist, um durch die beschleunigende Wirkung des von den Röntgenstrahlen herrührenden elektrischen Feldes erklärt zu werden. Ich hatte vielmehr die Hypothese aufgestellt, daß die große Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen aus den Atomen selbst stamme, sodaß die Wirkung der Röntgenstrahlen nur eine auslösende sei, durch die die Atome in eine Art radioaktiven Zustand unter Aussendung von β-Strahlen versetzt würden. Eine Arbeit von Bumstead[2]), der fand, daß die Röntgenstrahlen in Blei doppelt so viel Wärme entwickeln wie in Zink, schien diese Ansicht zu bestätigen.

Auch P. D. Innes[3]), der neuerdings die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen maß und im wesentlichen die Dornschen[4]) Werte bestätigte, schließt sich der Aufstellung, daß die Sekundärstrahlen ihre kinetische Energie dem Atom entnehmen, an.

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 18, S. 991, 1905.
2) H. A. Bumstead, Phil. Mag. 11, S. 292, 1906.
3) P. E. Innes, Proc. of Royal Soc. 4, 79, S. 442, 1907.
4) E. Dorn, Jubelband f. G. A. Lorentz, 1900, S. 595.

Inzwischen hat E. Angerer[1]) im Würzburger Institut die Bumsteadschen Versuche nach einer andern Methode wiederholt, ist aber zu den entgegengesetzten Ergebnissen gelangt, indem er durchaus keinen Unterschied zwischen der Erwärmung durch Röntgenstrahlen in Zink und Blei finden konnte.

Obwohl nun der Grund des Unterschiedes in den Ergebnissen Bumsteads und Angerers noch nicht aufgeklärt ist, so scheinen mir doch die Bumsteadschen Ergebnisse nicht mehr zur Stütze der erwähnten Auffassung über die Entstehung der Sekundärstrahlen benutzt werden zu können.

Ich möchte nun eine andere Auffassung der Entstehung der sekundären Kathodenstrahlen mitteilen, welche die Erzeugung der hohen Geschwindigkeiten der sekundären Kathodenstrahlen nicht nur erklärt, sondern fordert und außerdem noch eine Berechnung der Wellenlänge der erzeugenden Röntgenstrahlen liefert. Diese Theorie ist eine einfache Erweiterung der Planckschen Strahlungstheorie auf Röntgenstrahlen.

Nach dieser Theorie findet bei Emission und Absorption die Abgabe und Aufnahme der Energie immer in bestimmten, von der Wellenlänge abhängigen Energieelementen statt. A. Einstein hat die Plancksche Theorie auf die lichtelektrischen Vorgänge angewandt, und A. Joffe[2]) findet diese Theorie, wenigstens was die Abhängigkeit von der Schwingungszahl angeht, durch die Versuche E. Ladenburgs[3]) (der seine Beobachtungen allerdings anders darstellt) bestätigt.

Ich habe die Plancksche Theorie auf die Erzeugung der Spektrallinien[4]) anzuwenden versucht und dabei die Anschauung vertreten, daß das Elementarquantum diejenige Energiemenge ist, welche von einem Atom in der Form von Strahlung aufgenommen oder abgegeben wird, um ein Elektron aus dem Atom zu treiben oder in das Atom aufzunehmen.

Wenn man diese Hypothesen überhaupt gelten läßt, so ist kein ersichtlicher Grund vorhanden, sie nicht auch auf Röntgenstrahlen auszudehnen.

Nun ist nach Planck

$$\varepsilon = hn = \frac{hc}{\lambda}$$

1) E. Angerer, Ann. d. Phys. 24. S. 370, 1907.

2) A. Joffe, Ber. d. Münchener Akad., Nov. 1907.

3) E. Ladenburg, Phys. Zeitschr. 8, S. 590, 1907.

4) W. Wien, Ann. d. Phys. 23, S. 415, 1907.

wenn ε das Energieelement, n die Schwingungszahl, λ die Wellenlänge, c die Lichtgeschwindigkeit $h = 6{,}548 \, . \, 10^{-27}$ ist.

Da nun bei den großen Geschwindigkeiten der Sekundärstrahlen die Arbeitsleistung, welche beim Hinaustreiben eines Elektrons gegen die anziehenden Kräfte des Metalls geleistet werden muß, zu vernachlässigen ist, so haben wir, wenn wir mit v die Geschwindigkeit des Elektrons, mit m seine Masse, mit e seine Ladung bezeichnen,

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

sodaß

$$\lambda = \frac{2\,hce}{mv^2\,e}$$

ist.

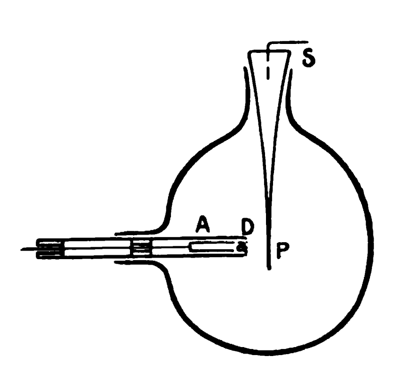
Es geht aus dieser Hypothese hervor, daß die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen nur von der Wellenlänge der Röntgenstrahlen abhängen kann und unabhängig sein muß vom Material, das die Sekundärstrahlen aussenden.

In der Tat geben die Beobachtungen von Innes für die Geschwindigkeiten der Sekundarstrahlen bei den verschiedenen Schwermetallen sehr nahe gleiche Werte, und nur der Wert für Zink ist um etwa 15% kleiner.

Beobachtungen, die ich selbst über Sekundärstrahlen angestellt habe, ergaben allerdings, daß auch noch viel langsamere Strahlen beigemischt sind.

Ich habe nicht die photographische Methode benutzt, wie Dorn und Innes, sondern folgende Anordnung:

In eine Glasbirne ragte eine Bleiröhre A von etwa 2 cm lichter Weite, in die, durch Bernstein isoliert, ein zylindrischer Auffänger a eingeführt war. Vorn war die Röhre durch ein feines Drahtnetz D abgeschlossen. Der Auffänger bestand aus einem hohlen Metallzylinder, der vorn offen, hinten geschlossen war und mit einem Dolezalekschen Elektrometer mit Bernsteinisolation verbunden war. Dem Ende der Bleiröhre gegenüber, an einem Schliff S drehbar befestigt, befand sich die



Platte P, auf die schräg von der Seite die Röntgenstrahlen auffielen, gegen die der Auffänger durch die Bleiröhre geschützt war. Zwischen D und P konnte eine hohe Spannung gelegt werden. Wenn P positiv geladen wurde, verzögerte sie die von P durch D nach a gelangenden Sekundärstrahlen.

Hier zeigte sich nun, daß bei einer Spannungsdifferenz von 1000 Volt zwischen D und P die Menge der nach a gelangenden Sekundärstrahlen auf 50 % fiel, bei 2000 Volt auf 38 %, wenn P aus Platin bestand und mit Strahlen von einer Röntgenröhre mit Eisenantikathode und 70000 Volt Spannung bestrahlt wurde. Bei Aluminiumplatte P gingen im ersteren Falle die Strahlen auf 75 % zurück, während sämtliche Strahlen bei 25000 Volt verschwanden.

Wurde das Vakuum durch Kohle und flüssige Luft verbessert, so fielen um 20 % mehr Strahlen auf den Empfänger.

Das Vorhandensein langsamer Strahlen kann nicht weiter auffallen, da es ja jetzt feststeht, daß die Kathodenstrahlen selbst wieder langsamere Strahlen erzeugen, wenn sie auf feste Körper auffallen. Die aus der Tiefe des Metalls hervordringenden schnellen Kathodenstrahlen werden daher langsame auslösen müssen, die natürlich für die hier vertretene Theorie keine Bedeutung haben. Nehmen wir für v den Wert

$$v = 8 . 10^9, \quad \frac{e}{m} = 1{,}72 . 10^7 \quad e = 4{,}69 . 10^{-10},$$

so ist

$$\lambda = 6{,}75 . 10^{-9} \text{ cm}$$

während nach Haga-Wind-Sommerfeld

$$\lambda = 1{,}3 10^{-8} \, cm$$

ist. Für etwas kleineres v würde man daher zu vollständiger Übereinstimmung gelangen.

Dieser berechnete Wert verdient jedenfalls trotz der hypothetischen Voraussetzung größeres Vertrauen als der früher von mir auf Grund einer hypothetischen Annahme über den Mechanismus der Entstehung der Röntgenstrahlen abgeleitete Wert.

Würzburg, November 1907.

Ueber Langbeinit und Vanthoffit
($K_2SO_4 . 2MgSO_4$ und $3Na_2SO_4 . MgSO_4$).

Von

R. Nacken in Göttingen.

Mit 2 Figuren im Text.

Vorgelegt von Th. Liebisch in der Sitzung vom 23. November 1907.

Unter den wasserfreien Doppelsulfaten beanspruchen ein besonderes Interesse die in den Kalisalzlagern auftretenden Mineralien Langbeinit und Vanthoffit. Die Bedingungen ihrer Bildung aus wässrigen Lösungen auf diesen Lagerstätten sind durch J. H. van't Hoff[1]) festgestellt worden. Ueber die Entstehung des regulär kristallisierenden Langbeinits, $K_2SO_4 . 2MgSO_4$, aus dem Schmelzfluß besitzen wir eine Beobachtung von F. R. Mallet[2]), wonach ein Gemenge von K_2SO_4 und $MgSO_4$ im Molekularverhältnis 1:2 bei starker Rotglut schmilzt, aufschäumt und nach dem Erkalten im Innern häufig einen Hohlraum darbietet, dessen Wände mit Kristallen von Langbeinit besetzt sind. Auf gleiche Weise soll noch eine andere regulär kristallisierende Verbindung[3]) $K_2SO_4 . MgSO_4$ darzustellen sein, die auch von Berthelot und Ilosvay[4]) angegeben ist.

Vanthoffit, $3Na_2SO_4 . MgSO_4$, ist auf diesem Wege nicht dargestellt worden. Es ist vielmehr aus einer Untersuchung von H. Le Chatelier[5]) über die Erstarrungstemperaturen von ge-

1) J. H. van't Hoff, Z. Bildung d. ozean. Salzablagerungen, Braunschweig 1905, I. Heft, 51, 52.

2) F. R. Mallet, Journ. Chem. Soc. 77, 219; 1900.

3) F. R. Mallet, a. a. O. 224.

4) Berthelot et Ilosvay, Ann. chim. phys. (5) 29, 329; 1883.

5) H. Le Chatelier, Ann. d. Mines (9) 11, 209; 1897.

mischten Schmelzen aus Natriumsulfat und Magnesiumsulfat zu entnehmen, daß diese Verbindung beim Kristallisieren der entsprechenden Schmelze direkt nicht entsteht. Dagegen würde man aus der von Le Chatelier mitgeteilten Erstarrungskurve schließen müssen auf die Existenz der Verbindung $Na_2SO_4 . 2MgSO_4$. Auch Mallet[1]) giebt an, dieses Doppelsalz durch Zusammenschmelzen der Komponenten dargestellt zu haben und beschreibt es als einen doppeltbrechenden Körper. Indessen konnte er die Homogeneität des aus dem Schmelzflusse entstandenen Stoffes nicht mit Sicherheit feststellen.

In der Untersuchung van't Hoffs traten nur Langbeinit und Vanthoffit auf.

Um einen Ueberblick über das Verhalten der hier in Betracht kommenden wasserfreien Sulfate von Kalium, Natrium und Magnesium zu gewinnen, habe ich die Temperatur-Konzentrationsdiagramme der aus den Komponenten $MgSO_4 - K_2SO_4$ und $MgSO_4 - Na_2SO_4$ gebildeten Systeme aufgenommen. Die Versuchsanordnung war wesentlich dieselbe wie früher[2]) bei der Untersuchung des Systems $Na_2SO_4 - K_2SO_4$.

A. Die einfachen Sulfate.

Natriumsulfat und Kaliumsulfat sind enantiotrop-dimorph mit den Umwandlungstemperaturen 234° und 595°, und den Schmelztemperaturen 883° und 1076°. Sie schmelzen ohne merkliche Zersetzung oder Verdampfung. Dagegen zersetzt sich Magnesiumsulfat sehr stark, bevor es schmilzt; bei ca. 1000° entweichen weiße SO_3 Dämpfe. Gleichwohl gelang es seine Schmelztemperatur (1124°) zu bestimmen, da die Schmelzwärme bedeutend ist. H. Le Chatelier ermittelte den Wert 1170°.

Das durch Erhitzen entstehende MgO ist in der Schmelze nicht merklich löslich, denn es ergeben sich bei mehreren aufeinanderfolgenden Beobachtungen für die Schmelztemperatur dieselben Zahlen. Die Frage, ob $MgSO_4$ vor dem Schmelzen eine Umwandlung erleidet, konnte mit Sicherheit nicht entschieden werden. Zuweilen schien in der Abkühlungskurve zwischen 950° und 1000° ein schwacher Knick aufzutreten. Zur optischen Prüfung konnten Dünnschliffe aus der blasigen und porzellanartig trüben Schmelze nicht verwendet werden. Bei der Ausarbeitung der Temperatur-

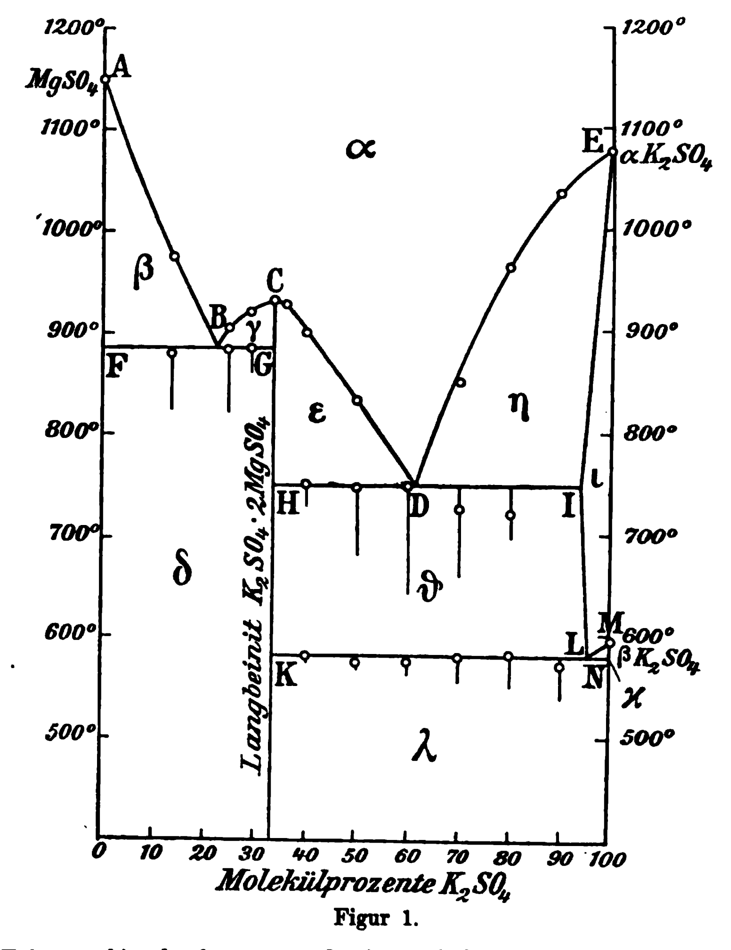
1) F. R. Mallet, Journ. Chem. Soc. 81, 1548; 1902.

2) R. Nacken, Dissert. Göttingen 1907. N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 24, 8 und 54f.; 1907.

Konzentrationsdiagramme wurde daher die etwaige Dimorphie des $MgSO_4$ nicht berücksichtigt.

B. Das System Magnesiumsulfat-Kaliumsulfat.

Die gemischten Schmelzen bilden homogene Phasen. Ihr Existenzgebiet α (Fig 1) wird in der Richtung sinkender Temperaturen



Figur 1.

α Existenzgebiet der homogenen flüssigen Mischungen.
β Gleichgewichtsgebiet von Magnesiumsulfat und Schmelzen.
γ, ε Gleichgewichtsgebiete von Langbeinit und Schmelzen.
η Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen ι und Schmelzen.
ι Existenzgebiet von Mischkristallen aus α-Kaliumsulfat und Langbeinit.
δ Existenzgebiet von eutektischen Gemengen aus Magnesiumsulfat u. Langbeinit.
ϑ Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen ι und Langbeinit.
$\varkappa$ Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen ι und β-Kaliumsulfat.
λ Existenzgebiet von eutektischen Gemengen aus β-Kaliumsulfat u. Langbeinit.

Tabelle 1.

Temperatur-Konzentrationsdiagramm des Systems $MgSO_4 - K_2SO_4$.

Molekül % K_2SO_4	Beginn der Erstarrung	Eutektische Kristallisation	Zeitdauer der eutektischen Kristallisation	Temperaturen der Umwandlung des K_2SO_4	Zeitdauer der Umwandlung
0	1124° (A)				
13,8	974	878°	157 sec.		
24,7	904	884	180		
29	920	884	75		
33,3	930 (C)				
36,1	927				
40	899	750	75	580°	15 sec
50	831	747	210	573	30
60		746 (D)	337	574	52
70	850	724	285	578	75
80	963	718	165	581	82
90	1035			570	120
100	1076 (E)			595 (M)	

durch die Aeste der Erstarrungskurve AB, BC, CD und DE begrenzt. Von besonderem Interesse ist der Punkt C, da er der Bildung des Langbeinits entspricht, der einzigen zwischen den Komponenten existierenden Verbindung. Enthalten die Schmelzen mehr Magnesiumsulfat, als der Zusammensetzung des Langbeinits entspricht, so beginnt ihre Erstarrung bei Temperaturen, die durch Punkte auf den Kurvenästen AB oder BC bestimmt werden. Die vollständig kristallisierten Phasen sind aus Magnesiumsulfat und Langbeinit aufgebaut. Ist der Gehalt der Schmelzen kleiner, so beginnt die Ausscheidung von Phasen, die Langbeinit und Kaliumsulfat enthalten, bei Temperaturen, die den Aesten CD oder DE entsprechen.

1. Langbeinit $K_2SO_4 . 2MgSO_4$.

Die Annahme von W. Meyerhoffer[1]), daß Langbeinit einen inkongruenten Schmelzpunkt besitze, hat sich nicht bestätigt.

1) W. Meyerhoffer, Zeitschr. f. Krist. **34**, 374; 1904.

Vielmehr erstarrt eine Mischung von 33 1/3 Mol. % K_2SO_4 und 66 2/3 Mol. % $MgSO_4$ bei konstanter Temperatur 930°. Die Kristallisation von 30 g Substanz dauerte unter den Versuchsbedingungen 5 Minuten, woraus auf eine beträchtliche latente Schmelzwärme geschlossen werden kann. Auf den Abkühlungskurven äußert sich dies durch einen ausgeprägten Haltepunkt im Gegensatz zu den Knicken auf Abkühlungskurven von Mischungen, die mehr oder weniger Kaliumsulfat enthalten.

Für die Existenz der Verbindung ergeben sich aus dem Diagramme noch folgende Belege. Die Temperatur des Punktes C liegt höher als die der benachbarten Punkte. An der in C entspringenden Vertikalen CHK endigen die eutektischen Geraden FBG und HDI, die etwa 150° auseinander liegen. Auch ergiebt sich aus der Beobachtung der Umwandlung des Kaliumsulfats, daß in dem aus Magnesiumsulfat und der Phase C gebildeten System freies Kaliumsulfat nicht mehr vorhanden ist, da eine Zustandsänderung nicht erfolgt. Das Kaliumsulfat ist demnach völlig in dem Doppelsalz $K_2SO_4 . 2 MgSO_4$ gebunden.

In Uebereinstimmung hiermit zeigte die Abkühlungskurve von 30 g geschmolzenen Langbeinits aus Neu-Staßfurt, den das hiesige mineralogische Institut Herrn Prof. Dr. Precht verdankt, bei 930° einen ausgeprägten Haltepunkt. Die Kristallisation dauerte wieder ca. 5 Minuten.

Die Prüfung von Dünnschliffen der erstarrten Schmelze mit 33 1/3 Mol. % K_2SO_4 erwies die einfache Brechung des künstlichen Langbeinits. Auch im spezifischen Gewicht war ein Unterschied zwischen dem Mineral und den künstlich dargestellten Kristallen nicht vorhanden. Splitter von beiden Stoffen schwebten bei 25° gleichzeitig in einer Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht 2,829 betrug.

2. Die Erstarrungskurve ABC.

Bei der Bestimmung der Erstarrungstemperaturen von Mischungen mit größerem $MgSO_4$-Gehalt, als dem Langbeinit entspricht, trat die Zersetzbarkeit[1]) des $MgSO_4$ störend auf. Die hierdurch entstehenden Aenderungen in der Zusammensetzung bewirkten Aenderungen der Erstarrungstemperaturen, die in Mischungen,

---

1) Die Zersetzbarkeit des $MgSO_4$ erhellt auch aus einer Angabe von H. Debray, wonach durch Zusammenschmelzen von $MgSO_4$ und K_2SO_4 Periklaskristalle erhalten werden können, wenn die Mischungen starker Glühhitze ausgesetzt werden. (Compt. rend. 52, 985; 1861).

deren Konzentrationen durch Punkte des Astes AB repräsentiert werden, ca. 8—10°, in Mischungen mit Konzentrationen längs BC und dem Beginn von CD ca. 5—8° betrugen. Daher wurden aus den flüssigen Schmelzen vor der Messung ihrer Erstarrungstemperaturen Proben mit einem Platinlöffel entnommen; ihre Zusammensetzung wurde später durch Ermittelung des Gehaltes an Schwefelsäure und Kalium bestimmt. Auf solche Weise wurde für den eutektischen Punkt B des Systems Magnesiumsulfat-Langbeinit die Temperatur 884° und die Konzentration 22 Mol. % K_2SO_4 festgelegt. Aus der Beobachtung der Dauer der eutektischen Kristallisation in den verschiedenen Mischungen dieses Systems wurde ermittelt, daß Mischbarkeit der Komponenten im festen Zustande nicht vorliegt.

Da in dem Gebiet δ eine Umwandlung im kristallisierten Zustande nicht stattfindet und die Bestandteile der Konglomerate durch den Gegensatz von einfacher Brechung und Doppelbrechung zu unterscheiden sind, so läßt sich hier das Ergebnis der Krystallisation optisch prüfen.

Ein Dünnschliff einer erstarrten Schmelze mit etwa 25 Mol. % K_2SO_4 zeigt einfachbrechende Langbeinitkristalle, die z. T. quadratische Begrenzungen zeigen und in einer eutektischen Grundmasse eingelagert sind.

3. Die Erstarrungskurve CDE.

Im System Langbeinit-α-Kaliumsulfat liegt ein Erstarrungstypus für beschränkte Mischbarkeit vor. Die Schmelzen sind viel weniger zersetzlich, sodaß eine Analyse nur in den an Langbeinit reichsten Mischungen erforderlich war. In den übrigen Mischungen ändert sich die Erstarrungstemperatur bei mehrmaligem Schmelzen nicht merklich. Der eutektische Punkt D bei 747° entspricht einem Gehalt von etwa 62 Mol. % K_2SO_4. Aus der Vergleichung der Zeitdauer der eutektischen Kristallisation in den benachbarten Mischungen ergiebt sich, daß Mischbarkeit nur in den an Kaliumsulfat reichen Mischungen, nicht aber auf der Seite des Langbeinit auftritt. Der bei 747° neben Langbeinit bestandfähige Mischkristall enthält etwa 6 Mol. % $MgSO_4$. Bestätigt wird die Existenz von Mischkristallen dadurch, daß die Umwandlungstemperatur des Kaliumsulfats herabgedrückt erscheint (KLM).

Beim Erstarren der Mischungen CD, aus denen sich zuerst Langbeinit ausscheidet, treten Unterkühlungen auf, die durch kräftiges Umrühren verhindert werden können. Bei den Schmelzen DE, aus denen zuerst Mischkristalle ι auskristallisieren, wurden

solche Erscheinungen nicht wahrgenommen. Aber hier trat die eutektische Kristallisation, bei der neben Mischkristallen Langbeinit sich bildet, 30—35° unter der dem Punkt D entsprechenden Temperatur 747° ein. In beiden Fällen handelt es sich also um eine Verzögerung der Langbeinitbildung. Daher setzt sich im zweiten Falle die alleinige Ausscheidung von Mischkristallen ι auch noch unterhalb 747° fort und die Schmelzen ändern hierbei kontinuierlich ihre Zusammensetzung entsprechend der Verlängerung der Kurve DE über D hinaus. Die darauf bei der Kristallisation von Langbeinit freiwerdende Wärmemenge reicht nicht aus, um die Temperatur des Systems bis auf 747° zu erhöhen. Auf diese Weise erklären sich die Differenzen zwischen den beobachteten eutektischen Temperaturen und der Temperatur des Punktes D.

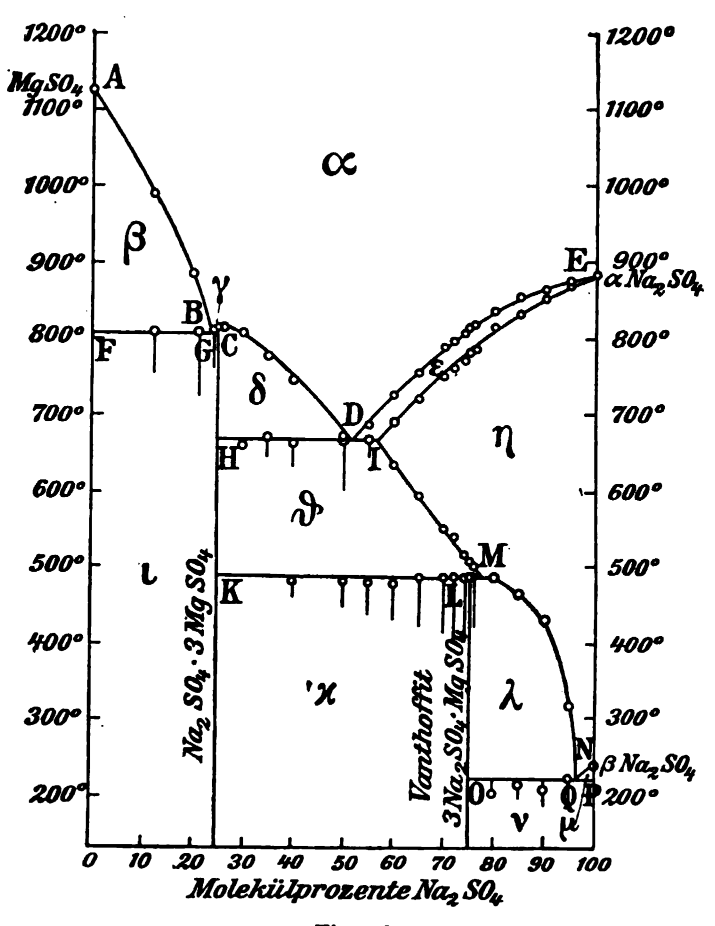
4. Die Umwandlungskurve ILMKN.

Umwandlungsvorgänge spielen sich nur im System Langbeinit-Kaliumsulfat ab, da nur hier freies Kaliumsulfat vorhanden ist. In den Mischkristallen ι tritt zunächst unterhalb 747° eine Entmischung auf. Es ist im Diagramm (Fig. 1) angenommen, daß sie längs der Kurve IL erfolgt; ihre Punkte geben die Konzentrationen der bei den entsprechenden Temperaturen beständigen gesättigten Mischkristalle an. Die Umwandlung des Kaliumsulfats wird in den Mischkristallen ι herabgedrückt. Es ergiebt sich die Umwandlungskurve ML, die im eutektischen Punkte L bei 576° endet. Hier wandelt sich bei konstanter Temperatur ein Mischkristall mit ca. 4. Mol. % $MgSO_4$ um in Langbeinit und β-Kaliumsulfat.

Da der Langbeinit nicht beeinflußt wird durch die Umwandlung des Kaliumsulfats, so erblickt man im Dünnschliff u.d.M. seine durchsichtigen Kristalle umschlossen von einer infolge der Umwandlung porzellanartig trüben Grundmasse.

C. Das System Magnesiumsulfat-Natriumsulfat.

Die gemischten Schmelzen (α in Fig. 2) bilden homogene flüssige Phasen. Ihr Existenzgebiet ist durch die Temperaturen der Erstarrungskurve A bis E begrenzt. Beim Erstarren waren, wenn kräftig gerührt wurde, Unterkühlungen nicht zu bemerken. Aber auch in diesem System war bei den an Magnesiumsulfat reichen Mischungen eine Analyse der erhitzten Schmelzen notwendig.



Figur 2.

α Existenzgebiet der homogenen flüssigen Mischungen.

β Gleichgewichtsgebiet von Magnesiumsulfat und Schmelzen.

γ, δ Gleichgewichtsgebiete von $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ und Schmelzen.

ε Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen η und Schmelzen.

η Existenzgebiet von Mischkristallen aus $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ und α-Natriumsulfat.

ϑ Gleichgewichtsgebiet von $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ und Mischkristallen η.

ι Existenzgebiet von eutektischen Gemengen aus Magnesiumsulfat und $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$.

κ Existenzgebiet von Gemengen aus $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ und Vanthoffit.

λ Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen η und Vanthoffit.

μ Gleichgewichtsgebiet von Mischkristallen η und β-Natriumsulfat.

ν Existenzgebiet von eutektischen Gemengen aus Vanthoffit und β-Natriumsulfat.

Tabelle 2.

Temperatur-Konzentrations-Diagramm des Systems $Na_2SO_4 - MgSO_4$.

Molekül % Na_2SO_4	Beginn der Erstarrung	Eutektische Kristallisation	Zeitdauer der eut. Kristallisation	Beginn der Entmischung	Bildung des Vanthoffits	Zeitdauer der Bildung des Vanthoffits	Eutektische Umwandlung	Zeitdauer der eutektischen Umwandlung
0	1124°(A)							
12,3	987	808°	120 sec.					
20,1	884	809	180					
24	811	808	105					
25	813 (C)							
26	813							
30	799	658	15					
35	776	667	45					
40	746	662	75		480°	60 sec.		
50	672	665	150		480	90		
55	683	665	105		478	120		
		Ende der Erstarrung						
60	726	660		633°	477	135		
65	754	720		592	485	157		
70	789	750		550	485	172		
72	796	760		538	486	180		
74	807	770		515	487	195		
75	814	782		506	486 (L)	210		
76	816	784		500	486	165		
80	836	815		485			200°	30 sec.
85	853	832		463			212	52
90	865	852		427			210	75
95	876	870		318			221	90
100	883 (E)			234 (N)				

1. Das Doppelsalz $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$.

Nach H. Le Chatelier[1]) ist die Erstarrungskurve dieses Systems ausgezeichnet durch ein Temperaturmaximum (800°), das der Bildung der Verbindung $Na_2SO_4 . 2MgSO_4$ entsprechen würde. Meine Beobachtungen ergaben ein Maximum bei 813° (C), aber nicht für die dem Langbeinit analoge Natrium-Verbindung, sondern für das Doppelsalz $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$.

Auf dieselbe Formel führen die Bestimmungen der Zeiten der eutektischen Kristallisation und der Umwandlung der Mischungen, die in Fig. 2 unterhalb HI und KM durch Strecken dargestellt sind. Denn durch Verbindung der Endpunkte gelangt man nach H und K auf der Vertikalen, die einer Mischung mit 25 Mol. % Na_2SO_4 entspricht.

Ein Dünnschliff zeigt ein Aggregat doppelt brechender Körner ohne regelmäßige Umgrenzung. Das spezifische Gewicht von kleinen in einem Hohlraum der erstarrten Schmelze aufgewachsenen Kristallen war 2,0345 bei 25°.

Als Mineral ist dieses Doppelsalz nicht bekannt.

2. Die Erstarrungskurve ABC.

Sie entspricht den Kristallisationsvorgängen des aus $MgSO_4$ und $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ gebildeten Systems. Die Komponenten mischen sich nicht. Bei 808° und 23 Mol. % Na_2SO_4 liegt der eutektische Punkt B. Es sind Schmelzen also im Gleichgewicht mit Kristallen von Magnesiumsulfat im Gebiet β und mit Kristallen von $Na_2SO_4 . 3MgSO_4$ im Gebiet γ. Unterhalb der eutektischen Graden FBG erstreckt sich herab zu gewöhnlichen Temperaturen das Existenzgebiet ι für Gemenge dieser beiden Kristallarten.

3. Die Erstarrungskurve CDE und die Schmelzkurve IE.

In dem System $Na_2SO_4 . 3MgSO_4 - \alpha Na_2SO_4$ findet beschränkte Mischbarkeit statt. Bei 665° liegt ein eutektischer Punkt (D) mit der Konzentration 52 Mol. % Na_2SO_4. Die eutektische Horizontale HDI verläuft nur auf der Seite des Doppelsalzes bis zur reinen Komponente (H). Rechts von D wird durch ihren Endpunkt I, der sich aus der Zeitdauer der Kristallisation ergiebt, die Konzentration des bei 665° gesättigten Mischkristalls I zu etwa 57 Mol. % Na_2SO_4 bestimmt. Schmelzen mit

1) H. Le Chatelier, a. a. O.

einem größerem Gehalt an Natriumsulfat erstarren daher in einem Intervall zu Mischkristallen. Das Ende der Kristallisation ließ sich aus den Knicken der Abkühlungskurven bestimmen, die infolge des Rührens scharf hervortraten. Auf solche Weise ergaben sich die Punkte der Kurve E I. Das Erstarrungsintervall beträgt also im Maximum ca. 40°.

4. Die Entmischungskurve IMQN und das Auftreten des Vanthoffit.

Bei weiterer Abkühlung bleiben die Mischkristalle nicht beständfähig. Es tritt vielmehr eine Entmischung ein unter Abscheidnng von Doppelsalzen oder des reinen Natriumsulfats in der β-Form. Denn die Akkühlungskurven von Schmelzen, deren Zusammensetzungen zwischen 57 und 100 Mol. % Na_2SO_4 liegen, zeigen außer den vom Erstarrungsintervall herrührenden Knicken noch je einen Knick und einen Haltepunkt. Die Knicke liefern die Punkte des Kurvenzuges IMQN, die Haltepunkte bestimmen die Horizontalen MLK und OQP.

Aus Mischkristallen, deren Existenzgebiet über der Entmischungs-Kurve IM liegt, scheidet sich das Doppelsalz $Na_2SO_4 . 3\,MgSO_4$ ab. Wird z. B. die zu homogenen Mischkristallen mit 60 Mol. % Na_2SO_4 erstarrte Schmelze abgekühlt, so beginnt bei 633° eine Entmischung unter Abscheidung jenes Doppelsalzes, und dieser Vorgang vollzieht sich bei fortgesetzter Wärmentziehung längs der Kurve IM. Dadurch werden die mit dem Doppelsalze koexistierenden Mischkristalle ärmer an Magnesiumsulfat. Schließlich enthält der bei 490° neben dem Doppelsalz beständfähige Mischkristall (M) nur noch 23 Mol. % $MgSO_4$.

Der Knickpunkt M ist bedingt durch das Auftreten eines zweiten Doppelsalzes, des Vanthoffit $3\,Na_2SO_4 . MgSO_4$. Es erfolgt nämlich durch Wärmeentziehung bei der konstanten Temperatur 490° ein Umsatz:

$$\text{Mischkristalle (M)} + Na_2SO_4 . 3\,MgSO_4 \rightarrow 3\,Na_2SO_4 . MgSO_4.$$

Die Uebereinstimmung der Umwandlungstemperatur des künstlich dargestellten Doppelsalzes mit der des Vanthoffit von Neu-Staßfurt, den das mineralogische Institut ebenfalls Herrn Prof. Dr. Precht verdankt, folgt daraus, daß ein Dünnschliff dieses Materials bei 489° eine Aenderung der Doppelbrechung zeigte. Auch ergab sich übereinstimmend als spezifisches Gewicht bei 25° der Wert 2,6955.

Diese durch Wärmezufuhr bewirkte Umwandlung des Vanthoffit in einen Mischkristall gleicher Zusammensetzung erfolgt in einem Intervall, ein Vorgang, der einem inkongruenten Schmelzen entspricht.

In den Mischkristallen, die dem Gebiete über der Kurve MQ entsprechen, findet die Entmischung unter gleichzeitiger Bildung von Vanthoffit statt.

Die Entmischung eines Kristalles mit 90 Mol. % Na_2SO_4 beginnt bei 427°. Es bildet sich mit sinkender Temperatur fortgesetzt Vanthoffit, wodurch der Magnesiumgehalt der mit ihm koexistierenden Mischkristalle geringer wird. Deren Zusammensetzungen ergeben sich für Temperaturen zwischen 234° und 212° aus den Punkten der Entmischungskurve MQ.

Enthalten aber die Mischkristalle mehr als 97 Mol. % Natriumsulfat, so beginnt ihre Entmischung bei Temperaturen, die der Umwandlungskurve QN entsprechen. Es bildet sich freies β-Natriumsulfat, wodurch mit sinkender Temperatur der Gehalt der Mischkristalle an Natriumsulfat schließlich bis auf 97 Mol. % sinkt; dies ist der Fall bei etwa 212° (eutektischer Punkt Q). Hier tritt bei weiterer Wärmeentziehung als neue feste Phase neben β-Natriumsulfat auch Vanthoffit auf.

Dieser bei konstanter Temperatur vor sich gehenden Umwandlung der Mischkristalle Q in ein Konglomerat von Vanthoffit und β-Natriumsulfat entsprechen die Punkte der Horizontalen OP, deren Bestimmung durch den trägen Verlauf der Umwandlung des Natriumsulfats erschwert wurde.

Dem Verbande für die wissenschaftliche Erforschung der deutschen Kalisalzlagerstätten bin ich für die Unterstützung dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Göttingen, mineralogisches Institut, September 1907.

Ueber die Eigenbewegungen der Fixsterne.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1907.

Die Hypothese von der rein zufälligen Verteilung der Spezialbewegungen der Sterne hat sich als unhaltbar erwiesen. Die Sterne bewegen sich nicht durcheinander, wie die Moleküle eines Gases, etwa nach dem Maxwell'schen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. Herr Kobold hat zuerst gezeigt, daß es eine Reihe ausgezeichneter Bewegungsrichtungen giebt, denen die Sterne mit Vorliebe folgen und welche übrigens alle der Ebene der Milchstraße parallel liegen[1]. Eine zusammenfassende mathematische Formulierung der thatsächlichen Anordnung der Bewegungen hat Herr Kobold nicht versucht, da er offenbar die Erscheinungen für zu verwickelt hielt. In dieser Hinsicht hat Herr Kapteyn einen bedeutsamen Schritt vorwärts gethan, indem es ihm glückte, die wesentlichsten Züge der Verteilung der Eigenbewegungen aus dem Bilde zweier Sternschwärme, die sich durchsetzen, abzuleiten[2]. Die Bevorzugung der Milchstraßenebene kommt dabei dadurch zum Ausdruck, daß die Bewegungsrichtung des einen Schwarmes relativ zum andern parallel zur Milchstraße liegt. Die Kapteyn'sche Vorstellung ist kürzlich von Herrn Eddington[3] an dem Material von Eigenbewegungen geprüft worden, das aus der Neubearbeitung der Beobachtungen von Groombridge hervor-

---

1) Vgl. H. Kobold. Der Bau des Fixsternsystems. Braunschweig 1906, pag. 78—150.

2) Report of the British Association for the Advancement of Science 1905, pag. 257.

3) Monthly Notices of the Roy. Astron. Society 1906, Bd. 67, pag. 34.

gegangen ist. Herr Eddington setzt ausdrücklich innerhalb jedes der beiden einander durchdringenden Schwärme das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung voraus. Aus der Superposition der beiden Schwärme mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung ergiebt sich bei geeigneter Wahl ihrer Relativbewegung eine so vortreffliche Wiedergabe der beobachteten Anordnung der Geschwindigkeiten, daß man — zumal unter der Wucht von Herrn Eddington's prägnanter Darstellung — den Eindruck hat, hier sei mehr, als eine Interpolation: hier sei eine wirkliche Erkenntnis der Bewegungsvorgänge im Fixsternsystem gewonnen, mit der man sich, wenn sie überraschend erscheint, eben abfinden müsse.

Indessen ist das Abfinden mit der Vorstellung zweier sich durchsetzender „Sternengase" schwer. Man wird an sich nur ungern den Glauben an die durch das Phänomen der Milchstraße dokumentierte Einheit des Fixsternsystems aufgeben. Außerdem zeigen Herrn Eddington's Rechnungen, daß der eine Schwarm in derselben Himmelsrichtung eine Vermehrung der Sternanzahl, eine Verdichtung, aufweist, wie der andere. Auch die Größe der scheinbaren Eigenbewegungen und damit vermutlich die durchschnittliche Entfernung der Sterne beider Schwärme ergiebt sich als gleich. Die beiden „Sternengase" müßten also, während sie durcheinander strömen, gemeinsamen Verdichtungen unterliegen, und es bleibt die Frage nach plausibeln Ursachen offen, welche dies bewirken könnten.

Ich habe daher geglaubt, dasselbe Beobachtungsmaterial, auf das sich Herr Eddington stützt, noch einmal auf Grund einer unitarischen Hypothese über die Sternbewegungen bearbeiten zu sollen. Die notwendige Abänderung der alten unzureichenden Vorstellung regelloser Verteilung der Spezialbewegungen wurde in folgendem gesucht. Bezeichnet man die Komponenten der Geschwindigkeiten eines Sterns gegen einen als ruhend betrachteten Punkt mit U, V, W, so ist die Anzahl der innerhalb des Geschwindigkeitsbereiches $U+\delta U$, $V+\delta V$, $W+\delta W$ liegenden Geschwindigkeiten nach Maxwell gleich: $dU dV dW . e^{-A(U^2+V^2+W^2)}$ (A eine Konstante). Statt dieser Formel habe ich gesetzt:

$$dU dV dW . e^{-AU^2-BV^2-CW^2},$$

wo A, B, C drei verschiedene Konstante bedeuten. Es ist also die kugelförmige Maxwell'sche Dichte-Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren durch eine ellipsoidische ersetzt. Die Fläche: $1 = AU^2+BV^2+CW^2$ selbst soll als „Geschwindigkeits-

ellipsoid“ bezeichnet werden. Die Axen dieses Ellipsoides stellen ausgezeichnete Richtungen dar, ohne welche man eben nach unsern jetzigen Kenntnissen von der Verteilung der Eigenbewegungen nicht auskommen kann.

Es war zu vermuten, daß die Annahme einer ellipsoidischen Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren eine verhältnismäßig gute Darstellung der beobachteten Verteilung der Eigenbewegungen liefern würde. Denn denkt man sich die Geschwindigkeitsvektoren nach der Eddington'schen Annahme zweier Maxwell'scher Verteilungen unter Berücksichtigung seiner quantitativen Ergebnisse räumlich aufgetragen, so erhält man zwei kugelförmige Haufen, die beträchtlich ineinander eingreifen und daher, indem man die Einkerbung zwischen den beiden Kugeln ausfüllt, einigermaßen durch eine ellipsoidische Verteilung ersetzt werden können.

Für die Ausführung eines Teiles der folgenden Rechnungen bin ich Fräulein J. Lehmann zu Dank verpflichtet.

Die ellipsoidische Geschwindigkeitsverteilung auf die Sphäre projiziert.

Wir wollen also einen begrenzten Raum innerhalb des Fixsternsystems ins Auge fassen und annehmen, daß die Anzahl der Sterne dieses Raumes, welche Geschwindungen zwischen U und $U+\delta U$, V und $V+\delta V$, W und $W+\delta W$ haben, gegeben sei durch:

$$(1) \quad Ke^{-AU^2-BV^2-CW^2}\, dU\, dV\, dW \quad (K, A, B, C \text{ Konstante})$$

wofern man das Koordinatensystem seinem Nullpunkt und seiner Richtung nach geeignet wählt. Was wir beobachten, ist nur die Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die Himmelssphäre. Es ist also zu überlegen, welches Gesetz für die Häufigkeit von Projektionen bestimmter Größe und Richtung folgt. Diese Ueberlegung sei hier nur für den Fall des Rotationsellipsoides ($B = C$) durchgeführt.

Der Winkel, welchen der Visionsradius nach der betreffenden Himmelsgegend mit der Rotationsaxe (x-Axe) des Ellipsoides macht, heiße χ. Die z-Axe kann man wegen der Symmetrie um die x-Axe in die Ebene hineingedreht denken, welche durch die Rotationsaxe und den Visionsradius geht. Nennt man nun u die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Visionsradius in dieser Ebene, v diejenige senkrecht zum Visionsradius und senkrecht zu dieser Ebene, w die dem Visionsradius parallele Komponente, so gilt:

$$U = u \sin\chi + w \cos\chi$$
$$V = v$$
$$W = u \cos\chi - w \sin\chi.$$

Es folgt:

$$AU^2 + B(V^2+W^2) = (A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)u^2 + Bv^2 + (A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)w^2 + 2uw\sin\chi\cos\chi(A-B).$$

Für die durch die Komponenten u, v, w ausgedrückten Geschwindigkeiten tritt daher an Stelle von (1) der Ausdruck:

$$(2)\qquad K.dudv.dw.e^{-(A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)u^2 - Bv^2 - (A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)w^2 - 2\sin\chi\cos\chi(A-B)uw}.$$

Da alle in dasselbe Bereich $du.dv$ fallenden Geschwindigkeitsvektoren gleiche Eigenbewegung an der Sphäre geben und nicht nach dem Werte der dritten unbekannten Komponente w getrennt werden können, so haben wir, um eine mit der Beobachtung vergleichbare Häufigkeitsfunktion zu erhalten, über alle Werte von w von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. Spaltet man den von w unabhängigen Faktor:

$$(3)\qquad K.e^{-(A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)u^2 - Bv^2}$$

ab, so ist also das Integral:

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)w^2 - 2\sin\chi\cos\chi(A-B)uw}\, dw$$

auszuführen.

Der Exponent läßt sich so umschreiben:

$$(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)w^2 + 2\sin\chi\cos\chi(A-B)uw$$
$$= (A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)\left[w + \frac{(A-B)\sin\chi\cos\chi.u}{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}\right]^2 - \frac{(A-B)^2\sin^2\chi\cos^2\chi u^2}{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}.$$

Beachtet man, daß, wenn p und q beliebige Konstante bedeuten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(w+q)^2}\, dw = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

ist, so ergiebt sich hiernach für das ganze Integral (4) der Wert:

$$\sqrt{\frac{\pi}{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}}\, e^{\frac{(A-B)^2\sin^2\chi\cos^2\chi u^2}{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}}.$$

Fügt man hierzu den vorher abgespalteten Faktor (3), so erhält man durch einfache Umstellung den Ausdruck für die Verteilung der Geschwindigkeitsprojektionen:

$$(5)\begin{cases} ke^{-au^2-bv^2}du\,dv, \\ \text{wobei:} \\ k = \dfrac{K\sqrt{\pi}}{\sqrt{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}}, \quad a = \dfrac{AB}{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}, \quad b = B \end{cases}$$

ist.

Die Verteilung der Geschwindigkeitsprojektionen kann also ebenfalls als eine ellipsoidische bezeichnet werden und die Kurve $au^2+bv^2=1$ soll kurz „Geschwindigkeitsellipse" heißen. Die Beziehung der Bestimmungsstücke A, B des ursprünglichen „Geschwindigkeitsellipsoides" zu den Bestimmungsstücken a, b der „Geschwindigkeitsellipse" läßt sich einfacher in der Form schreiben:

$$(6)\qquad \frac{b}{a} - 1 = \left(\frac{B}{A} - 1\right)\sin^2\chi.$$

Berücksichtigung der Eigenbewegung der Sonne. Häufigkeit der Eigenbewegungen bestimmter Richtung.

Bisher war als Nullpunkt ein Punkt gewählt, um den die Eigenbewegungen der Fixsterne symmetrisch verteilt sind. Unser Beobachtungspunkt, die Erde oder Sonne, bewegt sich gegen diesen Symmetriepunkt mit einer gewissen Geschwindigkeit u_0 in Richtung auf einen bestimmten Zielpunkt (Apex). Ist der Winkel zwischen dem Visionsradius und der Richtung nach dem Apex gleich σ, so erhält man die thatsächlich zu beobachtenden Eigenbewegungen an der Sphäre, indem man von dem Vektor u, v den Vektor $h = u_0 \sin\sigma$ abzieht. Die Richtung nach dem Apex möge den Positionswinkel φ_0 haben in dem oben benutzten an der Sphäre gezeichneten Axensysteme, welches die Richtung von $u\,(\varphi = 0)$ zur x-Axe, die von $v\,(\varphi = 90^0)$ zur y-Axe hat. Die Komponenten des beobachteten Vektors sind also:

$$(7)\qquad x = u - h\cos\varphi_0, \quad y = v - h\sin\varphi_0.$$

Die Häufigkeit einer zu beobachtenden Eigenbewegung mit den Komponenten x, y wird daher:

$$(8)\qquad ke^{-a(x+h\cos\varphi_0)^2 - b(y+h\sin\varphi_0)^2}dx\,dy.$$

Nun ist schließlich noch zu berücksichtigen, daß wir nicht die absoluten, sondern nur die angulären Beträge der Eigenbewegungen direkt beobachten. Um keine Hypothese über die Entfernungen der Sterne machen zu müssen, wollen wir uns in der üblichen Weise auf die Betrachtung der **Richtung** der Eigenbewegungen beschränken, also:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \tag{9}$$

setzen, und gleich nach der Anzahl von Eigenbewegungen fragen, welche in den Winkelraum φ bis $\varphi + d\varphi$ fallen.

Der Ausdruck (8) geht durch Einführung der Polarkoordinaten (9) über in:

$$ke^{-a(r\cos\varphi + h\cos\varphi_0)^2 - b(r\sin\varphi + h\sin\varphi_0)^2}\, r\,dr\,d\varphi.$$

Hierüber hat man von $r = 0$ bis $r = \infty$ zu integrieren, um die Häufigkeit $J(\varphi)$ der Eigenbewegungen in der Richtung φ auf Grund unserer Annahmen zu erhalten. Die Integration läßt sich auf das Wahrscheinlichkeitsintegral zurückführen.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} F &= a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi, \quad F_0 = a\cos^2\varphi_0 + b\sin^2\varphi_0 \\ \xi &= h\,\frac{(a\cos\varphi\cos\varphi_0 + b\sin\varphi\sin\varphi_0)}{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}} \end{aligned} \right.$$

und führt an Stelle von r die neue Variable z ein durch:

$$z = r\sqrt{F} + \xi$$

so erhält das auszuführende Integral die Form:

$$J(\varphi) = ke^{-h^2F_0 + \xi^2}\int_\xi^\infty e^{-z^2}\,dz\,\frac{(z-\xi)}{F}$$

oder:

$$J(\varphi) = \frac{ke^{-h^2F_0}}{F}\left[\tfrac{1}{2} - \xi e^{\xi^2}\int_\xi^\infty e^{-z^2}\,dz\right]$$

oder auch:

$$\text{(II)} \qquad J(\varphi) = \frac{ke^{-h^2F_0}}{F}\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\xi e^{\xi^2} + \xi e^{\xi^2}\int_0^\xi e^{-z^2}\,dz\right].$$

Vermöge der Gleichungen (I) und (II) läßt sich also mit Hülfe einer Tafel des Wahrscheinlichkeitsintegrals die Anzahl $J(\varphi)$ der Eigenbewegungen berechnen,

welche unter Annahme der ellipsoidischen Geschwindigkeitsverteilung in jeder Richtung φ zu erwarten ist.

Anschluss an eine beobachtete Verteilung. Für jede Himmelsgegend liefert die Anordnung der beobachteten Eigenbewegungen nach ihrer Richtung φ und die Abzählung der in jeden Einheitswinkelraum (nach Herrn Eddington im folgenden zu 10^0 gewählt) fallenden Anzahl von Eigenbewegungen die Funktion $J(\varphi)$. Dabei ist allerdings noch zu beachten, daß φ vom Schnitt der durch Visionsradius und Rotationsaxe des Ellipsoids gehenden Ebene mit der Himmelskugel an zu zählen ist und daß diese Richtung zunächst unbekannt ist. Zählt man mit Herrn Eddington Positionswinkel ϑ am Himmel von der Richtung nach Osten beginnend über Süden, Westen, Norden, so möge die Ausgangsrichtung der Zählung von φ, die frühere x-Axe, den Positionswinkel ϑ_0 haben. Es sei also allgemein:

$$\varphi = \vartheta - \vartheta_0. \tag{10}$$

Die aus der Beobachtung unmittelbar hervorgehende Häufigkeitsfunktion $J(\vartheta)$ wird daher gegeben durch:

$$J(\vartheta) = \frac{ke^{-h^2F_0}}{F}\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\xi e^{\xi^2} + \xi e^{\xi^2}\int_0^{\xi} e^{-z^2}dz\right] \tag{II'}$$

wobei:

$$\left\{\begin{aligned} F &= a\cos^2(\vartheta-\vartheta_0) + b\sin^2(\vartheta-\vartheta_0), \quad F_0 = a\cos^2\varphi_0 + b\sin^2\varphi_0, \\ \xi &= h\cdot\frac{a\cos\varphi_0\cos(\vartheta-\vartheta_0) + b\sin\varphi_0\sin(\vartheta-\vartheta_0)}{\sqrt{a\cos^2(\vartheta-\vartheta_0) + b\sin^2(\vartheta-\vartheta_0)}} \end{aligned}\right. \tag{I'}$$

ist. Das Problem besteht darin, diejenigen Werte der Konstanten $a, b, \vartheta_0, \varphi_0, h, k$ zu bestimmen, welche die beobachtete Verteilung möglichst gut wiedergeben. Man bemerke übrigens, daß sich J nicht ändert, wenn man a, b, k und $1/h^2$ mit demselben Faktor multipliziert, daß wir also eine dieser Größen willkürlich wählen dürfen und nur 5 unabhängige Konstanten zur Verfügung haben. Wir wollen die Willkür gleich ausnutzen und setzen:

$$ke^{-h^2F_0} = 1. \tag{11}$$

Es wurde folgendes Verfahren eingeschlagen. Man fasse die zu zwei gegenüberliegenden Werten von ϑ, nämlich ϑ und $\vartheta + 180^0$ gehörigen Anzahlen:

$$J = J(\vartheta), \quad J' = J(\vartheta + 180^0)$$

ins Auge. Bei Vermehrung von ϑ um 180° ändert sich F nicht, ξ wechselt nur sein Zeichen. Indem man daher die geraden und ungeraden Bestandteile des Ausdrucks von J trennt, erhält man:

$$J' + J = \frac{1}{F}\left[1 + 2\xi e^{\xi^2}\int_0^{\xi} e^{-z^2}\,dz\right]$$

$$J' - J = \frac{\sqrt{\pi}}{F}\,\xi e^{\xi^2}$$

Bildet man die Funktionen:

$$M(\xi) = 1 + 2\xi e^{\xi^2}\int_0^{\xi} e^{-z^2}\,dz \quad \text{und} \quad N(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\xi e^{\xi^2}}{M(\xi)}$$

so ergiebt sich:

$$\frac{J' - J}{J' + J} = N(\xi), \quad F = \frac{M(\xi)}{J' + J}. \tag{12}$$

Die Funktionen $M(\xi)$ und $N(\xi)$ sind in dem Täfelchen I auszugsweise tabuliert.

Tabelle I.

ξ	$M(\xi)$	$N(\xi)$	ξ	$M(\xi)$	$N(\xi)$
0.00	1.00	0.000	0.35	1.27	0.553
0.05	1.00	0.087	0.40	1.36	0.614
0.10	1.02	0.175	0.45	1.46	0.666
0.15	1.04	0.259	0.50	1.59	0.715
0.20	1.08	0.341	0.55	1.74	0.757
0.25	1.13	0.416	0.60	1.90	0.794
0.30	1.19	0.488	0.65	2.12	0.827
0.35	1.27	0.553	0.70	2.37	0.857

$M(\xi)$ ist stets positiv. $N(\xi)$ hat dasselbe Vorzeichen wie ξ.

Aus jedem Paar gegenüberliegender Werte J und J' kann man nach den Formeln (12) mit Hülfe der Tafel zunächst ξ und dann F finden. Führt man diese Rechnung für jeden Wert von ϑ durch, so müssen die erhaltenen Werte ξ und F in einer leicht zu übersehenden Weise verlaufen, falls unsre Annahmen überhaupt zur Darstellung der Beobachtungen ausreichen. Setzt man nämlich:

$$F = \frac{1}{\varrho^2}, \quad \frac{\xi}{\varrho} = \sigma, \tag{13}$$

wonach also ϱ und σ unmittelbar aus F und ξ zu berechnen sind, so gelten für ϱ und σ die Beziehungen:

$$1 = a\,\varrho^2\cos^2(\vartheta - \vartheta_0) + b\,\varrho^2\sin^2(\vartheta - \vartheta_0) \tag{14}$$

$$1 = ha \cos \varphi_0 \, \sigma \cos (\vartheta - \vartheta_0) + hb \sin \varphi_0 \, \sigma \sin (\vartheta - \vartheta_0). \tag{15}$$

Diese Gleichungen haben folgende geometrische Bedeutung: Trägt man zu jedem Positionswinkel ϑ den berechneten Wert ϱ als Radiusvektor auf, so müssen die entstehenden Punkte auf einer Ellipse liegen. Verfährt man ebenso mit den berechneten Werten σ, so muß eine Gerade entstehn. Die Ellipse ist unmittelbar die „Geschwindigkeitsellipse." Die Richtung ihrer großen Axe liefert den Positionswinkel ϑ_0. Die Beträge α und β ihrer Halbaxen ergeben a und b nach den Relationen:

$$a = \frac{1}{\alpha^2}, \quad b = \frac{1}{\beta^2}. \tag{16}$$

Die 3 Konstanten a, b, ϑ_0 sind also aus der Ellipse zu bestimmen. Was die Gerade angeht, so haben ihre Abschnitte p und q auf den beiden Axen der Ellipse die Werte:

$$p = \frac{1}{ha \cos \varphi_0}, \quad q = \frac{1}{hb \sin \varphi_0}, \tag{17}$$

sodaß aus den Gleichungen:

$$h \cos \varphi_0 = \frac{1}{pa}, \quad h \sin \varphi_0 = \frac{1}{qb} \tag{18}$$

auch noch die beiden übrigen Konstanten h und φ_0 folgen.

Ein Beispiel, für das ich die von Herrn Eddington als F bezeichnete Region wähle, soll das Verfahren näher erläutern.

Tabelle II. Bearbeitung des Gebietes F.

ϑ	J	J'	$N(\xi)$	ξ	$M(\xi)$	ϱ	σ	$\bar{J}$	$\bar{J'}$	$\bar{J}-J$	$\bar{J'}-J'$
5°	4	14	+ 0.555	+ 0.351	1.27	3.76	+ 10.7	5	16	+ 1	+ 2
15	·5	16	+ 0.523	+ 0.328	1.23	4.13	+ 12.6	6	19	+ 1	+ 3
25	6	21	+ 0.555	+ 0.351	1.27	4.60	+ 13.1	7	22	+ 1	+ 1
35	9	27	+ 0 500	+ 0.309	1.20	5.46	+ 17.7	9	25	0	— 2
45	10	29	+ 0.486	+ 0.299	1.19	5.72	+ 19.2	11	27	+ 1	— 2
55	14	26	+ 0.300	+ 0.174	1.06	6.14	+ 35.3	12	27	— 2	+ 1
65	14	19	+ 0.152	+ 0.087	1.01	5.80	+ 66.5	13	23	— 1	+ 4
75	14	17	+ 0.097	+ 0.055	1.01	5.54	+ 100.	14	18	0	+ 1
85	13	12	— 0.040	— 0.022	1.00	5.00	— 230.	13	14	0	+ 2
95	12	11	— 0.044	— 0.025	1.00	4.79	— 190.	13	10	+ 1	— 1
105	10	11	+ 0.048	+ 0.028	1.00	4.58	— 160.	12	8	+ 2	— 3
115	11	8	— 0.158	— 0.090	1,02	4.30	— 47.7	11	6	0	— 2
125	10	7	— 0.176	— 0.100	1.02	4.08	— 40.8	10	5	0	— 2
135	10	6	— 0.250	— 0.145	1.04	3.92	— 27.0	10	5	0	— 1
145	7	6	— 0.077	— 0.044	1.00	3.60	— 82.	10	4	+ 3	— 2
155	9	5	— 0.286	— 0.166	1.06	3.63	— 21.8	11	4	+ 2	— 1
165	9	5	— 0.286	— 0.166	1.06	3.63	— 21.8	12	5	+ 3	0
175	14	4	— 0.555	— 0.351	1.27	3.76	— 10.7	14	5	0	+ 1

Die ersten Spalten der Tafel II geben zu jedem Positionswinkel ϑ die von Herrn Eddington abgezählte Anzahl von Eigenbewegungen dieser Region J und daneben gleich die Anzahl J' für den Positionswinkel $\vartheta + 180^0$. Es folgen die aus den Formeln (12) und (13) mit Hülfe von Tafel I sich ergebenden Werte von $N(\xi)$, ξ, $M(\xi)$, ϱ und σ. Diese Werte ϱ und σ sind als Radien zu den Positionswinkeln ϑ in Fig. 1 aufgetragen. Die Punkte ϱ schließen sich sehr scharf der durch Probieren ermittelten, in die Figur eingezeichneten Ellipse an. Die Punkte σ liegen unregelmäßiger, was daher kommt, daß sie wesentlich von den prozentual schlechter bestimmten kleineren Differenzen $J' - J$ herrühren, während die Größen ϱ wesentlich durch die größeren Summen $J + J'$ bestimmt werden. Immerhin werden sie durch die Gerade der Figur einigermaßen wiedergegeben.

Der Positionswinkel der großen Axe der Ellipse findet sich zu 57°7. Ihre Halbaxen sind $\alpha = 6.00$ und $\beta = 3.60$. Die Abschnitte der Geraden auf diesen Halbaxen sind $p = -29.9$ und $q = +14.8$. Daraus berechnen sich nach (16) und (18) die 5 Konstanten unsrer Formel:

$$a = 0.0278, \quad b = 0.0773, \quad h = 1.49, \quad \vartheta_0 = 57^\circ\!.7, \quad \varphi_0 = 324^\circ\!.0.$$

Um zu prüfen, wie die Beobachtungen bei dieser Wahl der Konstanten dargestellt werden, wurden nun umgekehrt der eingezeichneten Ellipse und Geraden die zu jedem ϑ gehörigen theoretischen Werte σ und ϱ entnommen und aus diesen durch Umkehrung der Formeln (12) und (13) der Reihe nach F, ξ, $M(\xi)$, $N(\xi)$, $J' + J$, $J' - J$ und schließlich J und J' berechnet. Die Vergleichung der so berechneten Werte $\overline{J}$ und $\overline{J'}$ mit den beobachteten zeigt, daß ein guter Anschluß erreicht ist.

Aehnlich, wie hier, waren auch in allen andern Fällen die Ellipsen sehr exakt, die Geraden weniger gut. Stets wurde aber durch die nach Gefühl eingezeichneten Kurven eine genügende Darstellung der beobachteten Häufigkeiten erreicht. Einige Male fügte ich, um den Anschluß zu verlassen, zum Schluß noch eine kleine Drehung oder Veränderung des Maßstabs der ganzen Kurve hinzu. Ich habe nicht versucht, die Darstellung aufs äußerste zu treiben. Die geometrische Methode ist direkt hierzu nicht geeignet, da sich die Abweichungen von der Ellipse und der Geraden in den Werten J and J' etwas unübersichtlich superponieren. Zu einer endgültigen Bearbeitung würde man daher doch wohl Differentialformeln benutzen müssen.

Ergebnisse der einzelnen Gebiete.

Herr Eddington hat das vom Groombridge-Greenwich-Katalog überdeckte Areal in 7 Gebiete eingeteilt. Das Gebiet A enthält alle Sterne der Poldistanz 0°—20°, die Gebiete $B-G$ enthalten die Sterne von 20°—52° Poldistanz aus je 4 A. R. Stunden, wobei B mit den Stunden 22^h—2^h beginnt.

Die folgende Tabelle giebt für alle 7 Regionen die beobachtete Anzahl J der Eigenbewegungen von 10° zu 10° des Positionswinkels ϑ[1]), darauf die Unterschiede $B-R$ für die Zweischwarmhypothese nach Eddington und für die hier gemachte Hypothese[2]). Für das Gebiet E, welches Herr Eddington wegenseiner geringen Sternzahl nicht weiter bearbeitet, wurden die beobachteten Zahlen der von Herrn Eddington gezeichneten kleinen Kurve entnommen und sind daher etwas unsicher. Die unter Σ gegebene Summe der absoluten Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung zeigt, daß beide Hypothesen gleich guten Anschluß an die Beobachtung liefern mit Ausnahme des Gebietes C, wo die Zweischwarmhypothese mehr leistet, ohne daß die unitarische Hypothese unzulässige Abweichungen gäbe. Die Sache liegt so, daß Herr Eddington eine Unbekannte mehr hat, indem bei ihm die Verteilung der Sternanzahl zwischen beiden Schwärmen als sechste Unbekannte hinzukommt. Ist die Sternanzahl beider Schwärme sehr ungleich, so giebt das eine Unsymmetrie in der Verteilung der Eigenbewegungen, welche durch unsre Ellipsoidhypothese nicht wiedergegeben wird. Man sieht, daß die Einführung dieser sechsten Unbekannten bei den meisten Gebieten nicht mehr leistet, als unsre fünf Konstanten, und in der That findet auch Herr Eddington die Sternanzahl beider Schwärme nahezu gleich, abgesehn von dem Gebiet C. Hier herrscht eine deutliche, aber vielleicht doch nur zufällige Unsymmetrie eben von der Art, wie sie durch eine Verschiedenheit der Sternanzahl beider Schwärme wiedergegeben wird.

Man kann also sagen, daß sich die unitarische Hypothese der Verteilung der Eigenbewegungen in den einzelnen Gebieten trotz ihrer geringeren Konstantenzahl völlig befriedigend anschließt.

---

1) Für Gebiet A ist ϑ vom Stundenkreis 6^h an gerechnet.

2) Die theoretischen Werte sind ebenso, wie das Herr Eddington bei den beobachteten gethan hat, ausgeglichen, indem das Mittel aus je 3 Nachbarwerten genommen wurde.

Tabelle III.

Region	A			B			C			D			E			F			G		
ϑ	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B	B	E—B	S—B
5°	49	−2	−7	67	−2	−2	11	0	+8	4	+1	+1	5	—	0	4	+2	+1	39	−4	−2
15	39	+1	−1	65	+1	−2	15	+1	+6	5	0	0	5	—	0	5	+2	+1	39	−6	−5
25	27	+4	+4	54	+5	+7	24	−1	+4	5	+1	+1	5	—	0	6	+2	+1	34	−5	−2
35	20	+1	+5	47	0	+1	34	−2	+1	7	+1	−1	6	—	−1	9	+1	0	28	−1	+2
45	18	−3	+1	37	−2	+2	42	−1	−2	8	−2	−1	6	—	−1	10	+1	+1	27	0	+2
55	15	−3	+1	31	−4	0	43	+1	−3	9	−2	0	6	—	−1	14	−2	−2	28	−2	+1
65	14	−4	−1	30	−8	−3	38	+4	−4	12	−3	0	7	—	−2	14	−2	−1	30	−2	−1
75	12	−3	0	28	−7	−5	35	0	−4	12	0	+2	6	—	0	14	−1	0	29	0	0
85	12	−2	−2	25	−5	−4	27	+1	−1	16	0	+2	5	—	−1	13	0	0	31	0	−1
95	11	0	−2	19	+2	+1	23	−1	−1	20	+2	+2	6	—	0	12	0	+1	34	−1	−2
105	10	+1	−1	20	+3	−1	16	+2	+3	30	−2	−2	6	—	+1	10	+3	+2	33	0	0
115	10	+2	0	20	+4	−1	14	+2	+3	35	−1	−3	7	—	+2	11	+1	0	32	+2	+2
125	9	+3	+2	26	−1	−6	12	+3	+3	37	−1	−3	11	—	+1	10	+1	0	34	0	+1
135	13	0	−2	25	0	−4	13	+3	0	30	+4	+3	15	—	0	10	−1	0	35	−2	−1
145	11	+2	+1	26	−3	−5	14	0	−2	27	+2	+3	18	—	+1	7	+2	+3	33	−1	+1
155	14	−1	−1	22	0	−1	14	−1	−2	22	+2	+4	20	—	+4	9	0	+2	27	+2	+3
165	12	+1	+1	20	0	0	12	0	−1	19	−1	+3	25	—	+5	9	+2	+3	28	−1	0
175	14	−1	−1	18	0	0	11	0	0	16	−2	+2	33	—	+1	14	−2	0	27	−3	−2
185	12	0	0	18	−2	−3	10	0	0	15	−3	0	38	—	−5	14	+1	+2	24	−3	−1
195	13	−1	−2	15	−1	−2	10	−1	0	15	−5	−3	32	—	−3	16	+3	+3	22	−2	−1
205	11	0	−1	16	−4	−6	9	0	0	10	−1	0	20	—	+3	21	+1	+1	20	−1	0
215	10	0	−1	10	0	−2	8	0	0	8	+1	0	14	—	+3	27	−1	−2	20	−3	−1
225	7	+2	+1	5	+4	+2	7	0	0	6	+2	+1	10	—	+4	29	−2	−3	17	+1	+2
235	7	+1	0	7	+1	−1	6	+1	0	7	0	0	8	—	+3	26	0	+1	18	−1	+1
245	9	−1	−2	6	+2	0	6	0	0	8	−1	−2	8	—	0	19	+3	+4	19	0	+1
255	9	−2	−2	6	+1	−1	4	+2	+1	8	−1	−2	6	—	+1	17	+1	+1	20	+1	+2
265	7	0	+1	7	0	−2	4	+1	0	6	0	0	6	—	0	12	+2	+2	25	−1	−1
275	7	−1	+2	6	0	0	4	+1	0	5	+1	0	6	—	0	11	−1	−1	29	0	−2
285	9	−3	+1	8	−2	−1	5	0	−1	5	+1	0	5	—	+1	11	−3	−3	32	0	−2
295	11	−4	+1	8	−1	0	5	0	−1	5	+1	0	5	—	0	8	−2	−2	34	+4	0
305	12	−2	+2	10	0	0	6	−1	−2	5	0	0	5	—	0	7	−2	−2	38	+4	+1
315	15	−1	+3	13	0	0	7	−2	−2	5	0	0	4	—	0	6	−2	−1	46	0	−4
325	21	−1	+3	18	+2	+1	7	−1	−2	5	0	0	5	—	0	6	−1	−2	48	0	−4
335	29	+1	+2	27	+3	0	6	0	0	5	0	0	6	—	−1	5	0	−1	46	+1	−2
345	39	0	0	42	+1	−3	6	0	+2	6	−1	−1	6	—	−1	5	+1	0	40	+4	+2
355	47	0	−4	60	−3	−7	8	0	+3	5	0	0	5	—	0	4	+2	+1	37	+3	+3
Σ		54	61		74	76		32	57		45	42		—	46		53	49		61	58

Die folgende Tabelle enthält die für die 7 Regionen gefundenen Konstanten.

Tabelle IV. Konstanten der Regionen.

Region	α	β	ϑ_0	p	q	a	b	h	φ_0	$\varphi_0+\vartheta_0$
A	6.75	4.22	175°.0	+ 19.8	+ 40.0	0.0219	0.0561	2.34	11°.0	186°.0
B	7.84	4.45	176.0	+ 25.6	+ 11.9	0.0163	0.0505	2.93	34.8	210.8
C	5.67	3.81	216.5	+ 13.0	+ 11.4	0.0311	0.0688	2.79	27.3	243.8
D	4.80	3.87	302.0	+ 9.2	+ 40.4	0.0433	0.0668	2.54	8.4	310.4
E	4.84	3.39	0.0	— 8.8	+ 82.0	0.0426	0.0870	2.67	357.0	357.0
F	6.00	3.60	57.7	— 29.9	+ 14.8	0.0278	0.0773	1.49	324.0	21.7
G	8.80	6.82	139.5	+ 130.0	+ 60.0	0.0129	0.0215	1.02	52.6	192.1

Fig. 2 verdeutlicht noch das Verhalten beider Theorien zur Beobachtung, indem sie für das Gebiet F die Werte von J als Radien zu den Positionswinkeln ϑ giebt.

Zusammenfassung der Gebiete.

Der Winkel $\varphi_0 + \vartheta_0$ giebt den Positionswinkel der Richtung, in welcher sich die Eigenbewegung der Sonne auf die Sphäre projiziert. Trägt man diese Richtung in dem Centrum jedes Gebietes an und verlängert sie alle zu größten Kreisen, so müßten sich alle diese Kreise in einem Punkte schneiden, welcher den Apex der Sonnenbewegung darstellt. Das ist mit einiger Annäherung der Fall. Durch graphisches Auftragen auf einer stereographischen Projection der Kugel fanden sich als Koordinaten des Apex:

$$\delta = +41^0, \quad A.R. = 259^0.$$

Die Abstände, in welchen die größten Kreise an diesem Punkt vorbeigingen, waren für die einzelnen Regionen $A-G$ der Reihe nach 3°, 4°, 12°, 11°, 16°, 4°, 6°.

Nimmt man ferner an, daß die Rotationsaxen der Geschwindigkeitsellipsoide in allen Teilen des Raumes parallel liegen, so müssen auch die Richtungen ϑ_0 verlängert durch einen Punkt gehen. Dieser Punkt wird nahe übereinstimmen müssen mit dem Zielpunkt der Relativbewegung der beiden Kapteyn'schen Schwärme, und man wird daher auf ihn auch den Namen Vertex übertragen dürfen, den Kapteyn für letzteren Zielpunkt eingeführt hat. Die graphische Aufzeichnung ergab als Koordinaten des Vertex:

$$\delta = +3^0, \quad A.R. = 272^0.$$

Die Abstände der größten Kreise vom Vertex waren für die einzelnen Regionen:

$$2^0,\ 1^0,\ 10^0,\ 3^0,\ 1^0,\ 4^0,\ 14^0.$$

Fügt man die weitere Annahme hinzu, daß die Geschwindigkeitsellipsoide in allen Teilen des Raumes gleiche Größe haben, daß die mittlere Geschwindigkeit einer bestimmten Richtung überall dieselbe ist, so muß man einerseits verlangen, daß die Abplattung der gefundenen Ellipsen gemäß Gleichung (6) mit dem Abstand χ vom Vertex geht

$$\frac{b}{a} - 1 = \left(\frac{B}{A} - 1\right) \sin^2 \chi,$$

oder wenn man die Halbaxen α, β, A, B der Geschwindigkeitsellipse resp. des Geschwindigkeitsellipsoids einführt:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right) \sin^2 \chi}}. \tag{19}$$

Andrerseits folgt aus dieser Annahme, daß die durch die Projektion auf die Sphäre nicht veränderte kleine Axe $\beta = B$ der Ellipsen als vereinheitlichendes Maß für die Bewegungskomponente h der Sonne zu dienen hat und daß daher die Größe $\frac{h}{\beta}$ mit der Gesamtgeschwindigkeit u_0 der Sonne durch die Gleichung:

$$\frac{h}{\beta} = u_0 \sin \sigma \tag{20}$$

zusammenhängen muß, wo σ den Winkelabstand vom Apex bedeutet.

Die folgende Tabelle giebt die Rektaszension und Deklination der Centren der einzelnen Regionen nach Herrn Eddington, die Abstände σ und χ dieser Centren von Vertex und Apex, die aus der Beobachtung folgenden Werte von $\frac{\beta}{h}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ und nach (19) und (20) die mit den Konstanten $\frac{A}{B} = 0.635$ und $u_0 = 0.750$ abgeleiteten theoretischen Werte.

Region	α	δ	σ	$\frac{h}{\beta}$	$0.75 \sin\sigma$	χ	$\frac{\beta}{\alpha}$ beob.	$\frac{\beta}{\alpha}$ theor.
A	—	90°	49°	0.55	0.57	87°	0.63	0.63
B	0°	50	65	0.66	0.68	86	0.57	0.63
C	60	50	87	0.73	0.75	124	0.67	0.70
D	120	50	83	0.66	0.75	122	0.80	0.69
E	180	50	54	0.79	0.61	89	0.70	0.63
F	240	54	19	0.41	0.24	54	0.60	0.71
G	300	50	29	0.15	0.36	53	0.77	0.72

Man sieht, daß $\frac{h}{\beta}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ im großen und ganzen das von der Theorie geforderte Verhalten zeigen, daß aber im einzelnen noch starke Abweichungen bestehn. Ich habe daher versucht, Apex und Vertex noch auf eine andere Art zu bestimmen, welche von vorneweg auf den Betrag dieser Größen Rücksicht nimmt.

Sind α und δ die *A.R.* und Deklination des Centrums des betreffenden Gebietes, bedeuten A und D dieselben Größen für den Apex, so folgt aus dem Dreieck zwischen Pol, Apex und dem Centrum des Gebietes:

$$\sin\sigma\cos(\varphi_0+\vartheta_0) = \cos D \sin(A-\alpha)$$
$$\sin\sigma\sin(\varphi_0+\vartheta_0) = \cos D \sin\delta\cos(A-\alpha) - \sin D\cos\delta.$$

Multipliziert man hier mit u_0 und setzt:

$$x = u_0 \cos D\cos A, \quad Y = u_0\cos D\sin A, \quad z = u_0 \sin D, \tag{21}$$

so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} u_0\sin\sigma\cos(\varphi_0+\vartheta_0) &= \frac{h}{\beta}\cos(\varphi_0+\vartheta_0) = Y\cos\alpha - X\sin\alpha \\ u_0\sin\sigma\sin(\varphi_0+\vartheta_0) &= \frac{h}{\beta}\sin(\varphi_0+\vartheta_0) = X\sin\delta\cos\alpha \\ &\qquad + Y\sin\delta\sin\alpha - Z\cos\delta. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Aus den beobachteten Werten von $\frac{h}{\beta}$ und $\varphi_0+\vartheta_0$ entstehen so 14 Gleichungen, aus denen nach der Methode der kleinsten Quadrate X, Y, Z berechnet wurden. Er ergab sich:

$$X = -0.044, \quad Y = -0.589, \quad Z = +0.377.$$

und damit:

Koordinaten des Apex: $A = 266°$, $D = +33°$, $u_0 = 0.70$.

Eine völlig analoge Rechnung ließ sich in Bezug auf die Größe $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1}$ und den Positionswinkel ϑ_6 für den Vertex durchführen und ergab das Resultat:

Koordinaten des Vertex: $A' = 273^0$, $D' = -6^0$, $\frac{B}{A} = 0.67$.

Folgende Tabelle stellt die Werte, die sich aus diesen neuen Bestimmungsstücken von Vertex und Apex ergaben, mit ihren Differenzen gegen die beobachteten zusammen:

	Apex					Vertex				
	σ	$\varphi_0+\vartheta_0$	$B-R$	$\frac{h}{\beta}$	$B-R$	χ	ϑ_0	$B-R$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$B-R$
A	57°	184°	+ 2°	0.59	− 0.04	96°	177°	− 2°	0.63	0.00
B	68	205	+ 6	0.65	− 0.01	92	174	+ 2	0.63	− 0.06
C	94	249	− 5	0.70	+ 0.03	128	227	− 10	0.72	− 0.05
D	90	295	+ 15	0.70	− 0.04	128	303	− 1	0.72	+ 0.08
E	63	338	+ 19	0.62	+ 0.17	97	357	+ 3	0.64	+ 0.06
F	28	38	− 16	0.33	+ 0.08	66	54	+ 4	0.65	− 0.05
G	31	159	− 33	0.36	− 0.21	60	122	+ 18	0.68	+ 0.09

Abgesehen von der Region *G*, welche sich auch bei Herrn Eddington als anormal erweist, erscheint der Anschluß für den Vertex nunmehr ein befriedigender. Beim Apex zeigt außer *G* noch die Region *E* eine starke Abweichung, welche indessen auf die geringe Sternzahl und ungenaue Entnahme der Zahlen aus der Figur zu schieben sein mag. Unter den übrigen Gebieten giebt *F* die stärksten Abweichungen.

Was das Verhalten zur Zweischwarmhypothese angeht, so ist zwar kein ganz exakter Vergleich mit den analogen Zahlen Herrn Eddington's möglich, es ist aber doch deutlich, daß die Uebereinstimmung der verschiedenen Gebiete bei der Bearbeitung nach der Zweischwarmhypothese eine bessere ist, als hier.

Man muß sich daher die Frage vorlegen, ob der Anschluß der unitarischen Hypothese an die Beobachtungen, wenn auch etwas schlechter, nicht doch noch völlig ausreichend und der Zuverlässigkeit des Materials entsprechend ist. Für die Bejahung dieser Frage wird folgendes sprechen:

1) Ich habe für das Gebiet *F* mit den eben gefundenen theoretischen Werten der Konstanten die Verteilung der Eigenbewegungen zurückgerechnet und durch Zusammenfassung der Zahlen über Winkelräume von 60° folgendes erhalten:

ϑ	beob.	berechnete Anzahl
20°— 80°	67	65
80 —140	66	53
140 —200	69	69
200 —260	139	130
260 —320	55	55
320 — 20	29	42.

Die Annahme rein zufälliger Verteilung der Eigenbewegungen würde erfordern, daß die Eigenbewegungen symmetrisch zur Richtung nach dem Apex, welche hier durch den Positionswinkel 20°—200° gegeben wird, verteilt seien. Es müßten also die Gebiete 140°—200° und 200°—260° die gleiche Anzahl von Eigenbewegungen aufweisen. Man sieht, wie wenig das erfüllt ist, und wie groß der Fortschritt ist, der durch die Hypothese der ellipsoidischen Geschwindigkeitsverteilung erzielt wird, sodaß der eventuelle weitere Gewinn durch den Uebergang zur Zweischwarmhypothese dem gegenüber nicht sehr beträchtlich sein kann.

2) Unmittelbar zu übersehen ist die Bedeutung einer Verschiebung der Größe des motus parallacticus der Sterne des betreffenden Gebietes. Der Durchschnittswert von β beträgt (vgl. Eddington l. c. pag. 57) etwa 3″ im Jahrhundert. Die größte Abweichung in h zwischen Rechnung und Beobachtung ergab sich oben (für Gebiet G) zu 0.2 β. Das bedeutet also 0″.6 im Jahrhundert oder 0″.5 für die 80 Jahre Zwischenzeit, aus denen die Eigenbewegungen abgeleitet wurden. Man ist daher hier der Grenze nahe, wo restierende systematische Fehler der beiden verglichenen Kataloge trotz der sorgfältig differentiellen Reduktion wirksam geblieben sein können. Z. B. würde durch eine Aenderung des Aequinoktiums von Groombridge um 0ˢ.02 eine merkliche Verminderung der Differenzen $B-R$ für $\varphi_0+\vartheta_0$ und $\frac{h}{\beta}$ zu erzielen sein.

3) Schließlich ist daran zu denken, daß Gebiete von 60° Ausdehnung in $A.R.$ zusammengefaßt wurden und daher Eigenbewegungen beträchtlich verschiedener Richtung zu ein und demselben Positionswinkel ϑ gezählt worden sind.

Daher glaube ich, unter Einfügung der numerischen Ergebnisse das Resultat dahin zusammenfassen zu können: Die Verteilung der Eigenbewegungen des Groombridge-Greenwich-Katalogs zwingt uns, soweit sich bisher übersehen läßt, noch nicht dazu, eine Spaltung des Sternsystems in zwei verschiedene Schwärme vorzu-

nehmen, vielmehr wird eine befriedigende Darstellung der beobachteten Verteilung erreicht durch folgende unitarische Annahme: Die Häufigkeit einer Geschwindigkeit der Größe V bis $V+dV$ in einer bestimmten räumlichen Richtung hängt ab von dem Winkel χ, den diese Richtung mit der Richtung nach dem Vertex des Systemes macht, gemäß der Formel:

$$e^{-\frac{V^2}{V_0^2}(1-0.55\cos^2\chi)} V^2 dV \quad (V_0 \text{ eine Konstante}).$$

Der in der Milchstraße gelegene Vertex hat die Koordinaten:

$$A.R. = 273^0, \quad \delta = -6^0.$$

Die Bewegung der Sonne relativ zu einem Punkt, um den sich die Geschwindigkeiten der Sterne symmetrisch gruppieren, ist gerichtet nach dem Apex:

$$A.R. = 266^0, \quad \delta = +33^0$$

und hat die Geschwindigkeit: 0,70 V_0.

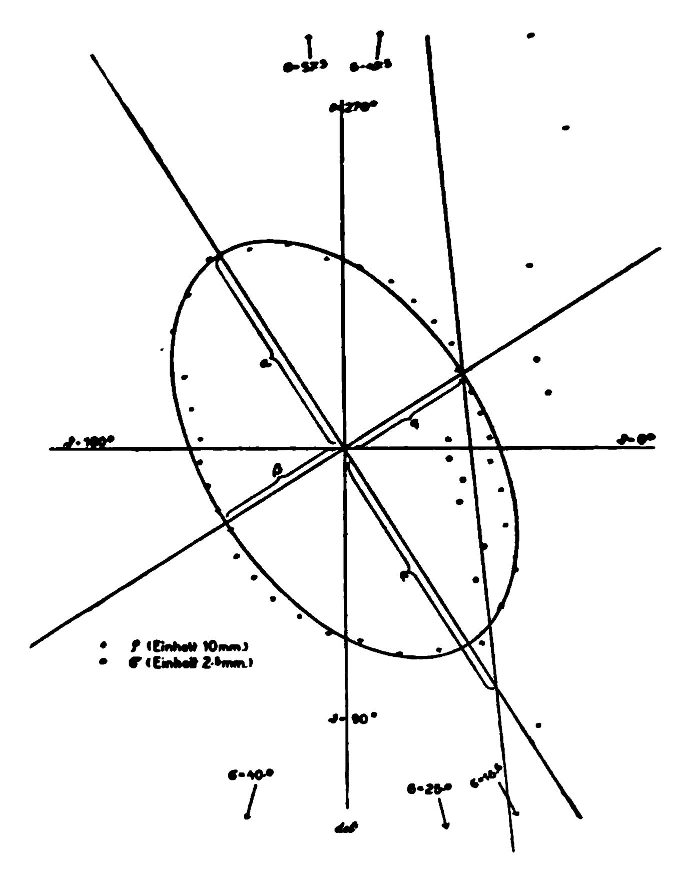


Fig. 1.

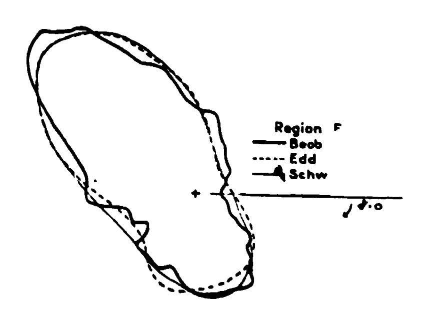


Fig. 2.

Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.

(Zweite Mitteilung).

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung am 23. Nov. 1907.

Das Problem der Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven hängt mit folgendem allgemeinen Abbildungssatze über einfach zusammenhängende Bereiche zusammen.

Ein allgemeiner Abbildungssatz. Es sei B irgend ein nach Art einer Riemannschen Fläche über der z-Ebene ausgebreiteter einfach zusammenhängender Bereich, welcher endlich- oder unendlich-vielblättrig sein kann. Der Bereich B kann in seinem Inneren endlich oder unendlich viele Windungspunkte haben; die Ordnungszahl jedes einzelnen inneren Windungspunktes ist jedoch endlich. Die Anzahl der Blätter und die Anzahl der Windungspunkte ist abzählbar. (Riemannsche Flächen mit nichtabzählbarer Blätterzahl oder nichtabzählbarer Anzahl der inneren Windungspunkte gibt es bekanntlich nicht). Hat der Bereich B in irgend einem seiner Blätter Grenzpunkte oder ganze Begrenzungslinien, so werden dieselben zum Bereiche B selbst nicht mitgerechnet.

Unter den genannten völlig allgemeinen Voraussetzungen über den Bereich B gilt die Behauptung: Es ist möglich, den einfach zusammenhängenden Bereich B in eindeutig umkehrbarer Weise konform auf einen die Kugel schlicht überdeckenden ebenfalls einfach zusammenhängenden Bereich abzubilden. Der letztere Bereich wird entweder von der ganzen Vollkugel gebildet oder

von der ganzen Vollkugel mit Ausnahme eines Punktes oder von einer Kugelkalotte, deren Begrenzungskreis nicht als zur Kalotte gehörig betrachtet wird [1]). —

Einen vollständigen Beweis dieses Satzes habe ich l. c. mitgeteilt.

Anfang November 1907 wurde von Herrn Poincaré eine Abhandlung „Sur l'uniformisation des fonctions analytiques" veröffentlicht [2]), in welcher Herr Poincaré ebenfalls (s. insbesondere pag. 46—63 der Abhandlung) einen vollständigen von dem erwähnten meinigen wesentlich verschiedenen Beweis des genannten Abbildungssatzes gibt. (Der Fall der geschlossenen Vollkugel wird dabei von Poincaré nicht besonders erwähnt). Durch die Lektüre dieser Abhandlung wurde ich veranlaßt, einen bereits früher von mir erwogenen Gedankengang wiederaufzunehmen, der mich zu einem neuen dem Poincaréschen verwandten Beweise des in Rede stehenden Abbildungssatzes führte. Dieser weiter unten mitgeteilte Beweis mag an gedanklicher Einfachheit dem von mir in meiner ersten Abhandlung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven gegebenen Beweise kaum nachstehen; gleichwohl glaube ich, daß letzterer als der naturgemäßere Beweis bezeichnet werden darf. Führt derselbe doch auch von selbst zu dem naturgemäßen Kriterium, durch welches bei dem in Rede stehenden Abbildungssatze der Fall der Kugelkalotte von dem Falle der punktierten Vollkugel (sphère pointée) unterschieden werden kann [3]).

Die Anwendung des Harnackschen Satzes über positive Potentiale und namentlich des Schwarzschen Prinzips der gürtelförmigen Verschmelzung geben dem Poincaréschen und auch dem von mir hier mitgeteilten Beweise ein charakteristisches Gepräge [4]). Während im Übrigen Poincaré die

---

1) S. die Abhandlung des Verfassers: „Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven", Gött. Nachr. 1907, pag. 191—210. Vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung am 11. Mai 1907.

2) Acta math., Bd. 31, Heft 1, pag. 1—63. Diese Abhandlung wurde bereits im März 1907 gedruckt, und ist von der erwähnten meinigen völlig unabhängig.

3) l. c. pag. 202 oben. Vgl. damit die in § 1,c und § 1,f der vorliegenden Abhandlung entwickelten Kriterien, sowie die Kriterien von Poincaré (l. c.) und Brodén, „Bemerkungen über die Uniformisierung analytischer Funktionen" Lund 1905. Auf die Brodénsche Abhandlung bin ich erst durch die Lektüre der Poincaréschen aufmerksam geworden.

4) Bei meinem ersten Beweise habe ich zwar an einer Stelle (pag. 202) ebenfalls von dem Harnackschen Satze Gebrauch gemacht; die Anwendung desselben läßt sich jedoch, was ich hier nicht näher begründen will, an der betref-

Untersuchung an seine méthode de balayage anlehnt, habe ich die bekannten einschlägigen Schwarzschen Abhandlungen überhaupt als Grundlage meiner Untersuchungen zu nennen.

In § 1 der vorliegenden Abhandlung entwickle ich den in Rede stehenden neuen Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes. Die am Schlusse dieses Paragraphen (§ 1,f) angestellten ergänzenden Betrachtungen sind für den Beweis des Abbildungssatzes selbst nicht notwendig.

In § 2 unterziehe ich den Fall eines mit analytischen Begrenzungsteilen versehenen einfach zusammenhängenden Bereichs einer besonderen Betrachtung. In diesem Falle findet die Abbildung stets auf die Fläche einer Kugelkalotte bezw. des Einheitskreises statt und die analytische Funktion, welche die Abbildung vermittelt, verhält sich längs jedes regulären analytischen Begrenzungsstückes regulär. Der Nachweis dieser Behauptungen wird nach vier Methoden geführt, von welchen die beiden ersten den allgemeinen Abbildungssatz als bewiesen voraussetzen, die beiden letzten von dieser Voraussetzung unabhängig sind.

Mit Hülfe der beiden in § 1 und 2 entwickelten Abbildungstheoreme gelingt die vollständige Begründung der vier Uniformisierungstheoreme, welche ich in meiner ersten Abhandlung formuliert habe. Während beim Beweise der beiden ersten Uniformisierungstheoreme, die sich auf beliebige reelle oder komplexe analytische Kurven beziehen, der allgemeine Abbildungssatz von § 1 zur Anwendung gelangt, tritt beim Beweise der beiden letzten Theoreme, die sich speziell auf reelle analytische Kurven beziehen, der in § 2 behandelte speziellere Abbildungssatz in Kraft. (Vgl. pag. 198—200 der ersten Mitteilung).

§ 1. Neuer Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes.

a. Die Bereiche B und B_1. Existenz der Greenschen Funktion für den Bereich B_1. In Anlehnung an unsere frühere Bezeichnungsweise möge der gegebene einfach zusammenhängende Bereich, um dessen konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises bezw. auf die ganze Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes[1]) es sich handelt, mit B be-

fenden Stelle in vorteilhafter Weise vermeiden, indem man einen neuen Hülfssatz aufstellt, welcher dem in meiner ersten Abhandlung als „zweiter Hülfssatz" bezeichneten Satze analog ist.

1) Der Fall der geschlossenen Vollkugel, der nur für geschlossene Rie-

zeichnet werden. Im Innern von B wählen wir mit Poincaré[1]) einen Punkt $0'$, der der Einfachheit halber kein Verzweigungspunkt sei, und beschreiben um $0'$ als Mittelpunkt einen Kreis K_0 mit dem Radius r_0, wobei r_0 so klein gewählt werde, daß die durch die Kreislinie K_0 auf der Fläche B abgegrenzte Umgebung des Punktes $0'$ weder im Innern noch auf der Grenze einen Verzweigungspunkt oder Grenzpunkt von B enthält. Die einfach zusammenhängende Fläche B wird auf diese Weise in zwei Flächenstücke zerlegt, nämlich in die Kreisfläche K_0 und in ein zweifach zusammenhängendes Flächenstück B_1.

Es handelt sich nun zunächst darum, für die Fläche B_1 die Existenz der Greenschen Funktion zu beweisen.

Es sei 0 derjenige Punkt im Innern von B_1, an welchem die gesuchte Greensche Funktion unendlich werden soll wie $\log \frac{1}{r}$. Wir konstruieren dann eine unendliche Folge vollständig innerhalb B_1 verlaufender geschlossener Linien $L_1, L_2, L_3, \ldots$, von welchen keine zwei einander schneiden und deren jede auf B_1 zusammen mit der Kreisperipherie K_0 einen endlich-vielblättrigen, nur endlich viele Windungspunkte in seinem Innern enthaltenden zweifach zusammenhängenden Flächenteil abgrenzt. Diese Flächenteile mögen den Linien $L_1, L_2, L_3, \ldots$ entsprechend mit $b_1, b_2, b_3, \ldots$ bezeichnet werden. Die Linien $L_1, L_2, \ldots$ seien ferner so gewählt, daß von den Bereichen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ jeder alle vorhergehenden als Teile enthält und daß der Punkt 0 im Innern von b_1 liegt; schließlich soll noch der Bedingung genügt sein, daß durch die Bereiche $b_1, b_2, b_3, \ldots$ das ganze Innere von B_1 ausgeschöpft wird, d. h.: wenn P irgend ein innerer nicht auf der Grenze liegender Punkt von B_1 ist, so soll von einem gewissen n ab P innerhalb (nicht auf der Grenze) jedes der Bereiche b_n liegen. Es würde keine prinzipielle Schwierigkeit darbieten, die Linien L_n successive durch ein wohldefiniertes Verfahren den gestellten Bedingungen gemäß zu bestimmen, wobei man leicht auch der Forderung genügen kann, daß jede einzelne der Linien L etwa aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke oder aus einer endlichen Anzahl von Kreisbögen gebildet wird.

---

mannsche Flächen vom Geschlecht $p = 0$ eintritt, ist bereits von Herrn Schwarz vollständig erledigt worden und braucht hier nicht weiter untersucht zu werden; (vgl. die entsprechenden Bemerkungen pag. 200 meiner ersten Abhandlung).

1) Vgl. Poincaré l. c. pag. 46.

Es werde nun mit u_n diejenige Greensche Funktion bezeichnet, welche innerhalb b_n definiert ist, auf der Begrenzung von b_n, d. i. auf K_0 und L_n, verschwindet und im Punkte 0 unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$. Dann verschwindet die Funktion $u_{n+1} - u_n$ längs der Linie K_0 und ist längs L_n positiv, während sie innerhalb b_n eindeutig und regulär ist. Es ist also innerhalb und auf der Begrenzung von b_n

$$u_{n+1} \geqq u_n .$$

Es fragt sich, ob diese Potentiale gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Um dies für jedes innere Teilgebiet von B_1, welches nicht bis an die Grenze von B_1 heranreicht, zu zeigen, genügt es auf Grund des Harnackschen Satzes[1]) die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty} u_n$$

für irgend einen nicht auf K_0 befindlichen Punkt im Innern von b_1 darzutun. Die Existenz eines derartigen Punktes kann nun in der Tat nach Poincaré (l. c. pag. 46—47) direkt dargetan werden. Etwas einfacher dürfte vielleicht folgender indirekte Weg sein.

Angenommen die Reihe der positiven Potentiale $u_1, u_2, \ldots$ divergiere in einem Punkte A, welcher innerhalb b_1 liege und der Begrenzungslinie K_0 nahe liegend vorgestellt werde. Dann betrachten wir die Werte von $u_1, u_2, u_3, \ldots$, auf der Peripherie des Kreises K_1, welcher $0'$ zum Mittelpunkt und $0'A = r_1$ zum Radius hat. Der Harnacksche Satz liefert für das Minimum m_n der Funktion u_n auf der Peripherie des Kreises K_1 eine untere Grenze: Zufolge dieses Satzes gibt es nämlich eine von n unabhängige Größe q, für welche die beiden Ungleichheiten

$$0 < q < 1$$

und

$$m_n > q \cdot u_n(A)$$

gelten. Mit $u_n(A)$ ist hierbei der Wert der Funktion u_n im Punkte A bezeichnet. Aus der Annahme

$$\lim_{n=\infty} u_n(A) = \infty$$

ergäbe sich also, daß

1) Siehe das Werk von Harnack: Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales, p. 67; 1887.

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty$$

ist. Wird jetzt mit P ein innerhalb des Kreisringes $K_1 - K_0$ veränderlicher Punkt, mit r sein Abstand vom Punkte $0'$ bezeichnet, so ist das Hülfspotential

$$h_n(P) = m_n \cdot \frac{\log \frac{r}{r_0}}{\log \frac{r_1}{r_0}}$$

auf K_0 gleich null, auf K_1 gleich m_n und man hat also innerhalb $K_1 - K_0$

$$h_n(P) \leqq u_n(P),$$

also

$$\frac{\partial h_n}{\partial \nu} \leqq \frac{\partial u_n}{\partial \nu}$$

wenn mit $\frac{\partial h_n}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$ die Ableitungen der Funktionen h_n und u_n an einem Punkte der Linie K_0, genommen in der Richtung der inneren Normalen des Gebietes $K_1 - K_0$, bezeichnet werden. Nun ist offenbar

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_0} \frac{dh_n}{\partial \nu} d\sigma = \infty,$$

wobei $d\sigma$ das Differential der Bogenlänge auf der Kreislinie K_0 bedeutet; also würde mit Rücksicht auf die letzte Ungleichheit folgen

$$\lim_{n=\infty} \int_{K_0} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} d\sigma = \infty.$$

Dies ist jedoch nicht möglich. Denn man hat für die Greensche Funktion u_n die Gleichung

$$\int_{K_0} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} d\sigma + \int_{L_n} \frac{\partial u_n}{\partial \nu'} d\sigma' = 2\pi,$$

folglich, weil alle Integralelemente positiv sind, für jeden Wert des Index n

$$\int_{K_0} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} < 2\pi.$$

Es ist demnach die Annahme, daß die Reihe der Potentiale u_n im Punkte A divergiere, unzutreffend. Aus der Konvergenz der Potentiale u_n im Punkte A folgt nun aber nach Harnack die gleichmäßige Konvergenz dieser Potentiale gegen ein im ganzen Bereiche B_1 existierendes überall positives Potential $u(B_1, 0)$, welches im Punkte 0 unendlich wird wie

$$\log \frac{1}{r}$$

und als Greensche Funktion für den Bereich B_1 anzusprechen ist.

Von den Potentialen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ können wir jetzt behaupten, daß sie in dem Ringgebiete $(K_1 - K_0)$ sämtlich regulär sind und auf den Begrenzungslinien desselben, K_0 und K_1, gleichmäßig konvergieren. Zufolge einem bekannten Satze über Potentialfunktionen gilt daher die Behauptung der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $u_1, u_2, \cdots$ für das ganze Gebiet $(K_1 - K_0)$ mit Einschluß der Begrenzung. Insbesondere erlangen wir so die Gewißheit, daß die Funktion $u(B_1, 0)$ bei der Annäherung an die Linie K_0 stetig in den Wert null übergeht [1]).

b. Konstruktion der zum Bereiche B_1 gehörenden einfach zusammenhängenden Ueberlagerungsfläche $B_1^{(\infty)}$ Existenz der zugehörenden Greenschen Funktion. Wir wählen auf der Linie K_0 einen Punkt P_0, auf L_1 einen Punkt P_1, auf L_2 einen Punkt P_2 u. s. w. Darauf verbinden wir P_0 mit P_1 durch eine Linie, welche ganz innerhalb $(b_1 - K_0)$ verläuft, darauf P_1 mit P_2 durch eine ganz innerhalb $(b_2 - b_1)$ verlaufende Linie, P_2 mit P_3 durch eine ganz innerhalb $(b_3 - b_2)$ verlaufende Linie u. s. w. Der Bereich B_1 erscheint dann in eine unendliche Anzahl einfach zusammenhängender Teilbereiche zerlegt:

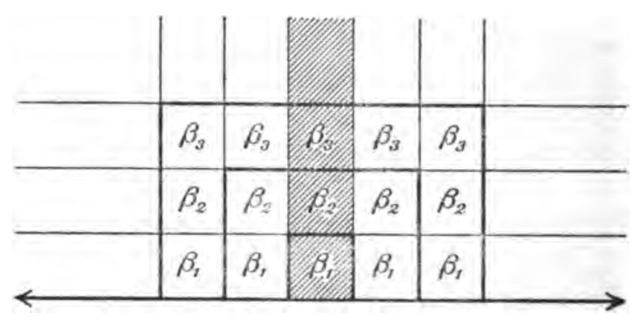
$$B_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots$$

Hierbei wird mit β_n derjenige einfach zusammenhängende Bereich bezeichnet, welcher aus dem zweifach zusammenhängenden Bereich $(b_n - b_{n-1})$ dadurch entsteht, daß man die vorhin erwähnte Verbindungslinie von P_{n-1} nach P_n zieht. Wir konstruieren nunmehr mit Hülfe der Bereiche $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots$ eine neue Folge einfach zusammenhängender Bereiche, $B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, B_1^{(3)}, \cdots$, deren jeder alle

1) Vgl. Poincaré l. c. pag. 47, 48 sowie meine Abhandlung „Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche", Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, 1907, pag. 123.

vorhergehenden in seinem Innern enthält und aus endlich vielen von den Flächenstücken β gebildet wird, übrigens aber jedes derartige Flächenstück mehrmals enthalten kann.

Als $B_1^{(1)}$ werde der Bereich β_1 selbst gewählt. Fassen wir die Begrenzung von $B_1^{(1)}$ als einen geschlossenen Linienzug auf und lassen dasjenige Stück dieses Linienzuges fort, welches mit der Kreislinie K_0 koinzidiert, so zerfällt dieser Linienzug in drei Stücke $P_0 P_1$, L_1 und $P_1 P_0$. Der Uebergang von $B_1^{(1)}$ auf $B_1^{(2)}$ werde nun dadurch ausgeführt, daß man längs des ersten und dritten Begrenzungsstückes je ein neues Exemplar β_1 an $B_1^{(1)}$ ansetzt und an den so erhaltenen Bereich noch drei Exemplare β_2 ansetzt längs der jetzt dreimal durchlaufen zu denkenden Linie L_1. Von $B_1^{(2)}$ wird der Uebergang zu $B_1^{(3)}$ analog bewerkstelligt, indem man $B_1^{(2)}$ mit einen neuen Kranz von Flächenstücken β umrahmt. Die Art und Weise, wie die Bereiche $B_1^{(1)}$, $B_1^{(2)}$, $B_1^{(3)}$ u.s.w. aus den Flächen β gebildet werden, wird durch die folgende Figur (Fig. 1) schematisch veranschaulicht.



Figur 1.

Es ist:

$$
\begin{aligned}
B_1^{(1)} &= \beta_1 \\
B_1^{(2)} &= B_1^{(1)} + 2\beta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + 3\beta_2 \\
B_1^{(3)} &= B_1^{(2)} + 2(\beta_1 + \beta_2) \qquad\qquad\quad + 5\beta_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_1^{(n)} &= B_1^{(n-1)} + 2(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}) + (2n-1)\beta_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Wir gelangen auf diese Weise zur Vorstellung einer Grenzfläche

$$
B_1^{(\infty)} = \lim_{n=\infty} B_1^{(n)},
$$

welche nichts anderes ist als die aus der zweifach zusammenhän-

genden Fläche B_1 entspringende einfach zusammenhängende Ueberlagerungsfläche.

Zu der Fläche $B_1^{(\infty)}$ gehört eine bestimmte Greensche Funktion, deren Existenz jetzt leicht bewiesen werden kann.

Zu dem Zwecke markieren wir innerhalb $B_1^{(1)}$ denjenigen Punkt, welcher, als Punkt der Fläche B_1 betrachtet, mit dem Unendlichkeitspunkte 0 der oben konstruierten Greenschen Funktion $u(B_1, 0)$ koinzidiert, und bezeichnen ihn mit $\bar{0}$. Wir dürfen offenbar annehmen, daß $\bar{0}$ nicht auf der Begrenzung von $B_1^{(1)}$ liegt. Wir bestimmen nun die Reihe der Potentiale

$$\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3,\ \ldots,$$

wobei $\bar{u}_n$ definiert ist als die zum Bereiche $B_1^{(n)}$ gehörende Greensche Funktion mit der Unendlichkeitsstelle $\bar{0}$. Diese Funktionen sind wieder lauter positive Potentiale, welche mit zunehmendem Wert des Index n wachsen, und, um ihre Konvergenz darzutun, genügt nach Harnack die Angabe einer Majorante. Als solche bietet sich hier die Funktion $u(B_1, 0)$ dar, welche, betrachtet als Funktion des Ortes auf der Fläche $B_1^{(\infty)}$, mit U bezeichnet werde. Offenbar ist die Differenz

$$U - \bar{u}_n$$

ein in dem ganzen einfach zusammenhängenden Gebiet $B_1^{(n)}$ nicht negatives Potential, da diese Funktion auf der Begrenzung von $B_1^{(n)}$ nicht negativ ist und im Innern nur endlich viele logarithmische Unstetigkeiten hat.

Es ist somit sicher, daß die Greensche Funktion des Bereiches $B_1^{(\infty)}$ als die Grenzfunktion

$$\lim_{n=\infty} \bar{u}_n = \bar{u}$$

existiert. Die Konvergenz findet sicher gleichmäßig für jeden Gebietsteil der Fläche $B_1^{(\infty)}$ statt, welcher sich nicht bis an die Grenze von $B_1^{(\infty)}$, also insbesondere nicht bis an die Kreislinie K_0 heran erstreckt. Letztere Kreislinie möge, sofern sie als Begrenzungslinie der Fläche $B_1^{(\infty)}$ betrachtet wird, mit $K_0^{(\infty)}$ bezeichnet werden. Die Linie $K_0^{(\infty)}$ ist ungeschlossen; sie entsteht aus der geschlossenen Linie K_0, indem man sich dieselbe unendlich oft vorwärts und rückwärts durchlaufen denkt.

Die Potentialfunktion $\bar{u}$ ist im ganzen Innern des Bereiches $B_1^{(\infty)}$ eindeutig und positiv und wird im Punkte $\bar{0}$ und nur in die-

sem Punkte unstetig, nämlich wie $\log \frac{1}{r}$. Nähert man sich stetig einem Punkte der Linie $K_0^{(\infty)}$, so geht $\bar{u}$ stetig in den Wert null über. Wählt man nämlich n so groß, daß der betrachtete Punkt der Begrenzung von $B_1^{(n)}$ angehört, so hat man innerhalb $B_1^{(n)}$

$$\bar{u}_{n+\nu} \leqq U,$$

(ν eine beliebige positive ganze Zahl), also ist innerhalb $B_1^{(n)}$ auch

$$\bar{u} \leqq U.$$

Da nun U bei der Annäherung an den betrachteten Punkt der Linie $K_0^{(\infty)}$ stetig in den Wert null übergeht (vgl. § 1, a), so muß das Gleiche auch bei der Funktion $\bar{u}$ stattfinden [1]).

c. Konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf das Innere des Einheitskreises. Nähere Diskussion dieser Abbildung. Wird mit $\bar{v}$ das der Greenschen Funktion $\bar{u}$ zugeordnete Potential mit dem Periodizitätsmodul 2π bezeichnet, so soll jetzt gezeigt werden, daß die Funktion

$$\bar{z} = e^{-(\bar{u}+i\bar{v})},$$

welche im Innern von $B_1^{(\infty)}$ endlich und eindeutig ist, eine konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf das Innere des Einheitskreises vermittelt derart, daß jedem inneren nicht zur Begrenzung gehörenden Punkte von $B_1^{(\infty)}$ ein und nur ein innerer nicht auf der Begrenzung befindlicher Punkt der schlicht zu denkenden Fläche des Einheitskreises entspricht und umgekehrt und daß ferner bei dieser konformen Abbildung die Linie $K_0^{(\infty)}$ in ein bestimmtes Stück der Peripherie des Einheitskreises übergeführt wird.

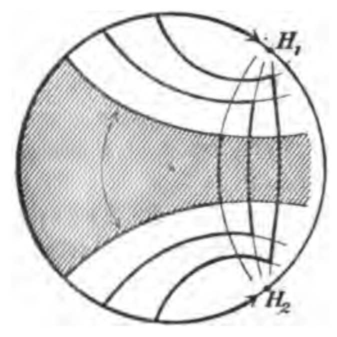
Was zunächst den Nachweis anbelangt, daß jedem inneren nicht zur Begrenzung gehörenden Punkte der Fläche $B_1^{(\infty)}$ ein innerer nicht auf der Begrenzung liegender Punkt des Einheitskreises entspricht und daß zwei verschiedenen Punkten der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auch verschiedene Punkte des Einheitskreises entsprechen, so ergibt sich derselbe leicht aus der Eigenschaft der Funktion

$$\bar{z}_n = e^{-(\bar{u}_n+i\bar{v}_n)},$$

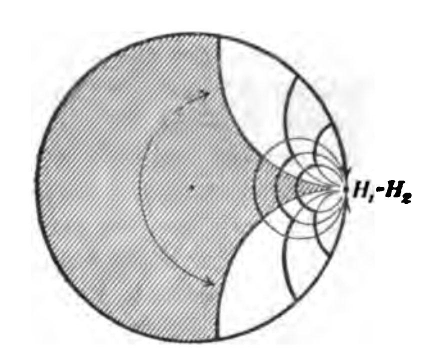
1) Die Existenz der Funktion $\bar{u}$ kann auch ohne Voraussetzung der Kenntnis der Greenschen Funktion $u(B_1, 0) = U$ bewiesen werden, indem man die Konvergenz der Reihe der Potentiale $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$ nach einer in § 2 dargelegten Methode schließt; s. insbesondere den Abschnitt: Dritter und vierter (independenter) Beweis.

eine konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die schlicht zu denkende Fläche des Einheitskreises zu vermitteln, und aus dem Umstande, daß die Potentiale $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ... gleichmäßig konvergieren. (Vgl. Poincaré, Bull. t. 11).

Wie oben gezeigt worden ist, geht das Potential $\bar{u}$ stetig in den Wert null über, wenn man sich innerhalb $B_1^{(\infty)}$ einem Punkte der Linie $K_0^{(\infty)}$ unbegrenzt stetig nähert. Hieraus folgt aber nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie, daß die Funktion $\bar{z}$ sich längs dieses Kreises regulär verhält. Bei der betrachteten konformen Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die Fläche des Einheitskreises entspricht demnach der Linie $K_0^{(\infty)}$ punktweise umkehrbar eindeutig ein bestimmtes Stück $H_1 H_2$ der Peripherie des Einheitskreises, welches von einem Punkte H_1 bis zu einem Punkte H_2 führt. Daß dieses Stück nicht größer als 2π sein kann, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst. Von einschneidender Wichtigkeit ist jedoch die Unterscheidung der beiden Fälle $H_1 H_2 < 2\pi$ und $H_1 H_2 = 2\pi$; im letzteren Falle koinzidieren die beiden Punkte H_1 und H_2. (S. Fig. 2).



a. hyperbolischer Fall.



b. parabolischer Fall.

Figur 2.

Wir wollen mit Rücksicht auf spätere Bemerkungen den ersten Fall als den hyperbolischen Fall, den zweiten als den parabolischen Fall bezeichnen. Da der Bogen $H_1 H_2$ die Länge

$$H_1 H_2 = \int\limits_{K_0^{(\infty)}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\, d\sigma$$

hat, so können wir die beiden Fälle durch folgendes Kriterium von einander unterscheiden:

$$\int\limits_{K_0^{(\infty)}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\, d\sigma \lesseqgtr 2\pi, \quad \begin{pmatrix}\text{hyperbolischer} \\ \text{parabolischer}\end{pmatrix} \text{Fall}.$$

Es ist noch zu zeigen, daß bei der durch die Funktion $\bar{z}$ vermittelten konformen Abbildung jedem Punkte innerhalb des Einheitskreises auch ein Punkt innerhalb $B_1^{(\infty)}$ entspricht.

Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit E' denjenigen Teil der Fläche des Einheitskreises, auf welchen das Innere der Fläche $B_1^{(\infty)}$ durch Vermittelung der Funktion $\bar{z}$ abgebildet wird. Das Gebiet E' ist einfach zusammenhängend und die Begrenzung desselben ist eine perfekte Punktmenge, welche den Bogen $H_1 H_2$ als Teil enthält. Es gibt einen Punkt dieser Begrenzung, welcher vom Mittelpunkte des Einheitskreises einen möglichst kleinen Abstand hat. Ist a ein derartiger Punkt, so betrachte man die Fläche F, welche aus der Riemannschen Fläche der Funktion

$$\sqrt{\bar{z}-a}$$

dadurch entsteht, daß man aus einem Blatt der letzteren das durch die Ungleichheitsbedingung $|\bar{z}| < a$ bestimmte kreisförmige Stück ausschneidet. Der Bereich E' kann als Teilbereich der Fläche F aufgefaßt werden. Die Potentiale $\bar{u}_n$ können vermöge der betrachteten konformen Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die Fläche E' als Funktionen des Ortes in der $\bar{z}$-Ebene aufgefaßt werden. Den Bereichen $B_1^{(n)}$ auf $B_1^{(\infty)}$ entsprechen nämlich bei dieser Abbildung gewisse Bereiche $E_1^{(n)}$ innerhalb E', deren jeder ein von null verschiedenes endliches Stück der Peripherie des Einheitskreises als Begrenzungsteil aufweist. (S. Fig. 2).

Betrachten wir nun die zur Fläche F gehörende Greensche Funktion, welche im Nullpunkt logarithmisch unendlich wird, so ist dieselbe eine Majorante für die Funktionen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$, also auch für $\bar{u}$ selbst, sofern auch letztere Funktion als Funktion des Ortes in der $\bar{z}$-Ebene, d. i. im Gebiete E', betrachtet wird.

Die Greensche Funktion der Fläche F geht zufolge ihrer Definition bei der Annäherung an den Punkt $\bar{z} = a$ stetig in den Wert null über. Folglich geht auch die Funktion $\bar{u}$ bei der Annäherung an diesen Punkt stetig in den Wert null über. Nun ist

$$|\bar{z}| = e^{-\bar{u}};$$

also ergibt sich

$$|a| = 1,$$

d. h.: das Gebiet E' enthält alle Punkte der $\bar{z}$-Ebene, für welche $|\bar{z}| < 1$ ist, in seinem Innern[1]).

1) Der Umstand, daß ich in dem vorstehenden Beweise keinen Gebrauch

Hiermit ist bewiesen, daß die durch die Funktion $\bar{z}$ vermittelte konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die Fläche des Einheitskreises in der Tat in der Weise stattfindet, wie die schematische Figur 2 andeutet. Die in dieser Figur ausgeführte Einteilung der Fläche des Einheitskreises entspricht der zu Grunde gelegten Auffassung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ als eines Aggregats von lauter Flächen β (s. Fig. 1) bezw. als Grenzfläche

$$B_1^{(\infty)} = \lim_{n=\infty} B_1^{(n)}.$$

Die so konstruierte konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf den Einheitskreis kann auch als eine konforme Abbildung der Fläche B_1 auf den Einheitskreis aufgefaßt werden. Bei dieser konformen Abbildung entsprechen jedoch jedem Punkte der Fläche B_1 unendlich viele von einander verschiedene Punkte innerhalb des Einheitskreises. Desgleichen entsprechen jedem Punkte auf K_0 unendlich viele verschiedene Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises, welche man der Reihe nach erhält, wenn man auf der Linie K_0 einen Umlauf nach dem andern ausführt. Diese unendlich vielen Bildpunkte nähern sich unbegrenzt zwei bestimmten Häufungspunkten, H_1 und H_2, welche mit den oben gleichbezeichneten Punkten (s. Fig. 2) identisch sind.

Wir betrachten jetzt zwei veränderliche Punkte der Fläche $B_1^{(\infty)}$, P_1 und P_2, welche, aufgefaßt als Punkte der Fläche B_1, beständig koinzidieren. Der Uebergang vom Punkte P_1 zum Punkte P_2 kann als eine konforme Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf sich selbst angesehen werden, bei welcher jedem inneren nicht zur Begrenzung gehörenden Punkte dieser Fläche ein und nur ein innerer nicht zur Begrenzung gehörender Punkt entspricht und umgekehrt. Sind $\bar{z}_1$ und $\bar{z}_2$ die den Punkten P_1 und P_2 innerhalb des Einheitskreises entsprechenden Punkte, so vermittelt die Funktion $\bar{z}_2(\bar{z}_1)$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche des Einheitskreises auf sich selbst. Jede derartige Funktion ist bekanntlich eine ganze oder gebrochene lineare Funktion. Im vorliegenden Falle besitzt diese lineare Funktion die Eigenschaft, jeden inneren nicht auf der Peripherie befindlichen Punkt der Fläche des Einheitskreises in einen von ihm selbst verschiedenen

von der elliptischen Modulfunktion mache, erscheint mir als beachtenswerte Vereinfachung gegenüber Osgood, Johansson, Poincaré. Übrigens teilt Herr Poincaré (Acta math. 31, pag. 35—38) auch einen Beweis mit, bei welchem von der Modulfunktion kein Gebrauch gemacht wird.

Punkt überzuführen. Die betrachtete lineare Substitution ist mithin entweder eine **hyperbolische** oder eine **parabolische** Substitution.

Bei der erwähnten konformen Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf sich selbst werden die Punkte der Linie $K_0^{(\infty)}$ umkehrbar eindeutig in sich selbst transformiert, und zwar entspricht dabei kein Punkt sich selbst. Nun geht, wie uns bereits bekannt ist, die erwähnte Linie bei der konformen Abbildung der Fläche $B_1^{(\infty)}$ auf die Fläche des Einheitskreises in den Kreisbogen $H_1 H_2$ über, wobei die beiden Punkte H_1 und H_2 selbst auszuschließen sind. Die lineare Funktion $\bar{z}_2(\bar{z}_1)$ muß daher so beschaffen sein, daß durch sie der Kreisbogen $H_1 H_2$ unter Beibehaltung des Durchlaufungssinnes in sich transformiert wird, wobei kein Punkt sich selbst entspricht. Hieraus kann der Schluß gezogen werden, daß durch die lineare Funktion $\bar{z}_2(\bar{z}_1)$ die Endpunkte H_1 und H_2 des Bogens $H_1 H_2$ in sich transformiert werden.

Die Substitution $\bar{z}_2 = \bar{z}_2(\bar{z}_1)$ ist demnach eine **hyperbolische** oder **parabolische Substitution**, jenachdem H_1 und H_2 **zwei von einander verschiedene** oder **zwei koinzidierende Punkte** sind, jenachdem wir es also mit dem **hyperbolischen** oder **parabolischen** Falle zu tun haben.

Die hier vorliegenden Verhältnisse stellen sich besonders anschaulich dar, wenn wir uns die Fläche B_1 längs der Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots$ aufgeschnitten und die Fläche $B_1^{(\infty)}$ durch Aneinanderheftung von unendlich vielen Exemplaren der aufgeschnittenen Fläche B_1 entstanden denken. Ein Exemplar der aufgeschnittenen Fläche B_1 ist in der schematischen Figur 1 durch die Schraffierung angedeutet. Die anderen Exemplare gehen in Fig. 1 durch Parallelverschiebungen aus dem schraffierten Exemplar hervor. Durch Vermittelung der Funktion $\bar{z}$ wird die aufgeschnittene Fläche B_1 konform auf ein die Ebene **einfach** bedeckendes Gebiet abgebildet, wobei je zwei an der Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots$ einander gegenüber liegende Punkte der Fläche B_1 in zwei getrennte durch eine hyperbolische bezw. parabolische Substitution auf einander bezogene Punkte übergehen. (S. die schraffierten Gebiete in Fig. 2, a und b; die Beziehung der Randpunkte auf einander ist durch Pfeile angedeutet). Das Verhalten der Bildkurven, welche der Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots$ in der $\bar{z}$-Ebene (Fig. 2) entsprechen, wird durch folgende Bemerkungen näher charakterisiert. Die Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots$, betrachtet als Linie auf $B_1^{(\infty)}$, hat die Eigenschaft, daß für jeden Wert des Index n das Stück $P_n P_{n+1} P_{n+2} \ldots$ außerhalb des Gebietes $B_1^{(n)}$

liegt. Das Bild des Stückes $P_n P_{n+1} P_{n+2} \ldots$ in der $\bar{z}$-Ebene muß folglich außerhalb E'_n liegen. Ueber die auf einander bezogenen Begrenzungslinien der in Fig. 2 schraffierten Gebiete ergibt sich hieraus, daß im parabolischen Falle jede derselben sich dem Punkte $H_1 = H_2$ asymptotisch nähert (Fig. 1, b), im hyperbolischen Falle jede sich unbegrenzt demjenigen Teile der Kreisperipherie nähert, welcher den Bogen $H_1 H_2$ zur vollen Kreislinie ergänzt; im letzteren Falle brauchen jedoch keine asymptotischen Punkte vorhanden zu sein.

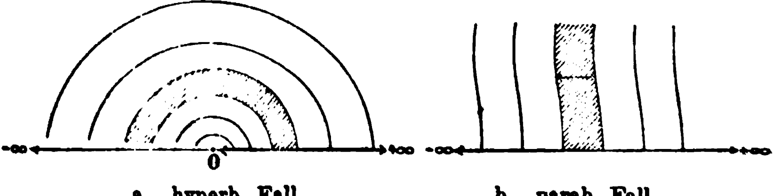
Um zu einer noch präziseren Auffassung der vorliegenden Verhältnisse zu gelangen, denken wir uns im hyperbolischen Falle von H_1 nach H_2 unendlich viele Hülfskreisbögen gezogen (— in der Figur sind dieselben nicht angedeutet —), welche durch das Innere des Einheitskreises führen. Der n-te Hülfsbogen werde so gewählt, daß er mit dem Peripheriebogen $H_1 H_2$ ein Kreisbogenzweieck mit dem Winkel $\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$ bildet. Läßt man die positive ganze Zahl n ins Unendliche wachsen, so wird das Kreisbogenzweieck schließlich das ganze Innere des Einheitskreises ausschöpfen. Da jeder der genannten Hülfsbögen durch die hyperbolische Substitution in sich transformiert wird, so entspricht dem System der Hülfsbögen auf der Fläche B_1 ein System geschlossener Linien, $l_1, l_2, l_3, \ldots$, welche alle Eigenschaften haben, die bei der Konstruktion der Linien $L_1, L_2, \ldots$ von letzteren verlangt wurden. Es wird daher nach Angabe eines beliebigen Index n stets zwei positive ganze Zahlen p und q geben, sodaß der von den Linien K_0 und L_n begrenzte zweifach zusammenhängende Bereich vollständig im Innern des von den Linien K_0 und l_p begrenzten Bereiches liegt und daß der von den Linien K_0 und l_n begrenzte Bereich vollständig im Innern des von den Linien K_0 und L_q begrenzten Bereiches liegt.

Im parabolischen Falle können wir uns analog ein System von Hülfskreisen konstruiert denken, wobei als n-ter Hülfskreis derjenige Kreis erklärt wird, welcher den Einheitskreis im Punkte $H_1 = H_2$ von innen berührt und den Durchmesser $\frac{1}{n}$ hat. Jeder dieser Hülfskreise begrenzt zusammen mit dem Einheitskreise ein Kreisbogenzweieck mit dem Winkel null. Da die Hülfskreise durch die parabolische Substitution einzeln in sich transformiert werden, so erhalten wir als Bildkurven derselben auf der Fläche B, wie im hyperbolischen Falle, ein System geschlossener Linien $l_1, l_2, \ldots$ von den angegebenen Eigenschaften.

Betrachten wir jetzt wieder die Linie $P_0 P_1 P_2 \ldots$ auf der Fläche B_1, so bemerken wir folgendes: Der Linienzug $P_q P_{q+1} P_{q+2} \ldots$ liegt vollständig außerhalb l_n, wenn mit q die oben erklärte positive ganze Zahl bezeichnet wird. Also: Wenn die positive ganze Zahl n beliebig groß gegeben wird, so gibt es eine positive ganze Zahl q, sodaß die Bildkurven des Linienzuges $P_q P_{q+1} P_{q+2} \ldots$ in der $\bar{z}$-Ebene alle außerhalb des n-ten Kreisbogenzweiecks liegen, eine Bemerkung, welche sowohl im hyperbolischen als auch im parabolischen Falle gilt. Die in dieser Bemerkung enthaltene Präzision unserer früheren Aussage über das Verhalten der einander zugeordneten Begrenzungslinien der schraffierten Bereiche in Fig. 2 wird weiterhin nicht ohne Wichtigkeit sein.

Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu, welche das Verhalten derjenigen Linien innerhalb des $\bar{z}$-Einheitskreises betreffen, die den Linien $L_1, L_2 \ldots$ entsprechen. Aus dem Umstande, daß einer vollständigen Durchlaufung der Linie L_n die Ausübung der hyperbolischen bezw. parabolischen Substitution entspricht, und aus unseren obigen Bemerkungen über die Beziehung der Linien L und l zu einander ergibt sich, daß sich die Bildkurve der Linie L_n den Punkten H_1 bezw. H_2 asymptotisch nähert, jenachdem man sie im einen oder andern Sinne durchläuft; und zwar befindet sie sich vollständig innerhalb des p-ten Kreisbogenzweiecks, wenn p die oben angegebene Bedeutung hat. Auch diese Bemerkungen gelten gleichlautend für den hyperbolischen und parabolischen Fall. (Vgl. Fig. 2).

d. Konforme Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche eines Kreisrings bezw. Kreises. Von der $\bar{z}$-Ebene können wir durch lineare Transformation zu einer ζ-Ebene übergehen derart, daß dem Bogen $H_1 H_2$ der Fig. 2 im Falle getrennter Punkte H_1, H_2 das durch die Ungleichheitsbedingung $\zeta > 0$ bestimmte Stück der Achse des Reellen, im Falle koinzidierender Punkte H_1, H_2 die ganze Achse des Reellen entspricht, wobei im ersten Falle den Punkten H_1, H_2 bezw. die Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$, im zweiten Falle dem Punkte $H_1 = H_2$ der Punkt $\zeta = \infty$ zugeordnet sein soll. Wir bekommen



a. hyperb. Fall. b. parab. Fall.

Figur 3.

so das Bild, welches Fig. 3 darbietet. Die Zuordnung der Randpunkte der schraffierten Gebiete wird jetzt durch Substitutionen

$$\zeta' = c \cdot \zeta \text{ (hyp. Fall)} \quad \text{bezw.} \quad \zeta' = \zeta + C \text{ (parab. Fall)}$$

vermittelt, wobei mit c und C reelle positive Größen bezeichnet werden.

Ueber das Verhalten der einander zugeordneten Begrenzungslinien dieser schraffierten Bereiche können ähnliche Bemerkungen wie im Anschluß an Fig. 2 gemacht werden. Um den Inhalt dieser Bemerkungen zu charakterisieren, genügt es darauf hinzuweisen, daß das n-te Hülfskreisbogenzweieck, welches wir uns in Fig. 2, a bezw. 2, b konstruiert dachten, sich in Fig. 3, a als ein von zwei unendlichen Halbstrahlen begrenzter Sektor mit dem Nullpunkt als Eckpunkt und der Winkelöffnung $\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)$ abbildet, in Fig. 3, b hingegen als ein von zwei unendlichen einander parallelen Geraden begrenzter Parallelstreifen, dessen Breite mit unendlich wachsendem Werte des Index n unendlich groß wird. Von den beiden begrenzenden Halbstrahlen des Sektors ist für jedes n der eine mit der positiven Hälfte der Achse des Reellen, von den begrenzenden Geraden des Parallelstreifens jedesmal die eine mit der Achse des Reellen identisch.

Bilden wir im ersten Falle die Funktion

$$Z = \zeta^{\frac{2\pi i}{\log c}}, \qquad (\log c \text{ reell}),$$

im zweiten Falle die Funktion

$$Z^* = e^{\frac{2\pi i \zeta}{C}},$$

so vermitteln diese Funktionen, wie wir jetzt zeigen wollen, die gewünschte konforme Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche eines die Ebene einfach bedeckenden Kreisrings bezw. Kreises (excl. Mittelpunkt); und zwar wird in beiden Fällen die äußere Begrenzung von der Peripherie des Einheitskreises gebildet.

Daß im parabolischen Falle die Funktion Z^* eine konforme Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche des Einheitskreises (exkl. Nullpunkt) vermittelt, ist ohne weiteres ersichtlich. Als Bild der Linie $P_0\,P_1\,P_2\,\ldots$ erscheint in der Z^*-Ebene eine von einem Punkte der Peripherie des Einheitskreises ausgehende Linie, welche sich dem Mittelpunkte asymptotisch nähert. (Fig. 5, b).

Um zu erkennen, daß im hyperbolischen Falle die Funktion Z eine konforme Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche eines Kreisrings vermittelt, zerlegen wir diese Abbildung in zwei nach einander auszuführende. Es ist

$$Z = \zeta^{\frac{2\pi i}{\log c}} = e^{\frac{2\pi i}{\log c} \log \zeta},$$

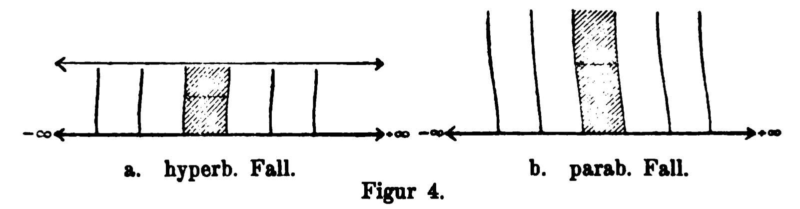
also, wenn wir setzen

$$\bar{\zeta} = \log \zeta, \tag{1}$$

so wird

$$Z = e^{\frac{2\pi i}{\log c} \bar{\zeta}}, \tag{2}$$

Die durch die Funktion $\bar{\zeta}$ vermittelte konforme Abbildung entspricht dem Uebergange von Fig. 3, a zu Fig. 4, a. Dem in Fig. 3, a schraffierten Bereich entspricht der in Fig. 4, a schraffierte Bereich [1]).



Figur 4.

Der oberen ζ-Halbebene entspricht in der $\bar{\zeta}$-Ebene die Fläche eines Parallelstreifens, dessen eine begrenzende Gerade die Achse des Reellen ist, während die andere von ihr den Abstand π hat. Erstere Gerade entspricht der positiven Hälfte der Achse der reellen ζ-Werte, letztere der negativen. Den Punkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ der oberen ζ-Halbebene entsprechen beziehlich der negativ und positiv unendlich ferne Punkt des Parallelstreifens. Was den schraffierten Bereich innerhalb des $\bar{\zeta}$-Parallelstreifens anbetrifft, so wird bei diesem die Zuordnung einander entsprechender Randpunkte durch die Substitution

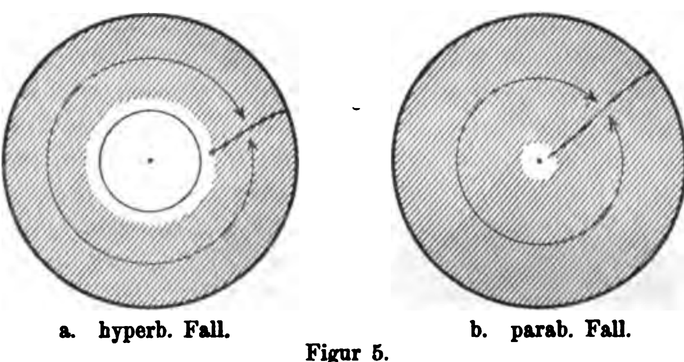
$$\bar{\zeta}' = \bar{\zeta} + \log c$$

vermittelt. Fassen wir eine der einander zugeordneten Begrenzungslinien dieses schraffierten Bereiches ins Auge, so können wir

1) Fig. 4, b ist eine Reproduktion von Fig. 3, b, welche zum Vergleiche mit Fig. 4, a neben letztere gesetzt ist.

über das Verhalten derselben mit Sicherheit soviel behaupten, daß sich dieselbe, ausgehend von einem bestimmten im Endlichen befindlichen Punkte der Achse des Reellen, allmählich der anderen Begrenzungsgeraden unbegrenzt nähert, ohne jedoch notwendig einem bestimmten Punkte der letzteren zuzustreben.

Nunmehr ist sofort zu sehen, daß die durch (2) dargestellte Funktion Z eine konforme Abbildung des $\bar{\zeta}$-Parallelstreifens auf die Fläche eines Kreisrings mit dem Einheitskreise als äußerem Begrenzungskreise vermittelt und daß bei dieser Abbildung der schraffierte $\bar{\zeta}$-Bereich derart in die einfach überdeckt zu denkende volle Fläche dieses Kreisrings übergeführt wird, daß je zwei einander entsprechende Randpunkte in der Abbildung koinzidierende Punkte werden; s. Fig. 5, a.



a. hyperb. Fall. b. parab. Fall.

Figur 5.

Die Fläche B_1 ist mithin umkehrbar eindeutig auf die Fläche des Z-Kreisrings bezogen, wobei der Kreislinie K_0 die Peripherie des Einheitskreises und der Linie $P_0\, P_1\, P_2 \ldots$ eine von einem bestimmten Punkte der Peripherie des Einheitskreises ausgehende, durch das Innere des Kreisrings hindurchgehende, dem inneren Begrenzungskreise sich allmählich asymptotisch nähernde Linie entspricht; s. Fig. 5, a.

e. Gürtelförmige Verschmelzung. Wir wenden nunmehr, um den Beweis des zu Anfang zitierten allgemeinen Abbildungssatzes zu Ende zu führen, wie Poincaré, das Schwarzsche Verfahren der „gürtelförmigen Verschmelzung" an.

Bezüglich der Beweiseinzelheiten des Verfahrens verweisen wir auf die Abhandlung des Herrn H. A. Schwarz: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen" [1]).

1) Berliner Monatsberichte 1870, pag. 767—795. S. auch Ges. Abh. Bd. II pag. 144—171.

(S. insbesondere No. 16, 17 der genannten Abhandlung). Wir begnügen uns hier damit, die unserem Falle entsprechenden Verhältnisse im Hinblick auf die Anwendung der erwähnten Schwarzschen Methode näher zu präzisieren.

Die ursprünglich gegebene einfach zusammenhängende Fläche B war zerlegt in die Kreisfläche K_0 und die zweifach zusammenhängende Fläche B_1. Letztere haben wir umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines die Ebene einfach bedeckenden von konzentrischen Kreisen begrenzten Kreisrings abgebildet, wobei der äußere Begrenzungskreis, der mit K_a bezeichnet werde, dem Kreise K_0 entspricht. Der innere Begrenzungskreis werde, sofern nicht der parabolische Fall betrachtet wird, mit K_i bezeichnet.

In der Ebene des Kreisrings konstruieren wir einen mit K_a konzentrischen Kreis K, welcher ganz im Innern des Kreisrings liegt. Die Linie, welche auf B_1 das Bild des Kreises K darstellt, werde mit L bezeichnet. Ferner werde das von den Kreisen K und K_a begrenzte Gebiet mit G (Gürtel), das dem Gebiete G auf B_1 entsprechende Gebiet mit G' bezeichnet.

Der Beweis dafür, daß es möglich ist, die Fläche B konform auf das Innere des Einheitskreises bezw. die ganze Ebene abzubilden, läuft darauf hinaus, folgendes zu zeigen:

Erstens: Im hyperbolischen Falle gibt es zwei Potentiale, u_1 und u_2, von welchen das erste innerhalb des von K_a und K_i begrenzten Kreisrings eindeutig und regulär ist und auf K_i verschwindet, das zweite in dem Gebiete $(K_0 + G')$ eindeutig ist, im Punkte O' unendlich wird wie $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ und in jedem Punkte von G' denselben Wert annimmt, den das erste in dem entsprechenden Punkte von G annimmt.

Zweitens: Im parabolischen Falle gibt es zwei Potentiale, u_1 und u_2, von welchen das erste innerhalb der ganzen Kreisfläche K_a eindeutig und regulär ist, das zweite im Gebiete $(K_0 + G')$ eindeutig ist, im Punkte O' unendlich wird wie $r^{-1}\cos\varphi$ und in jedem Punkte von G' denselben Wert annimmt, den das erste in dem entsprechenden Punkte von G annimmt.

Damit die Funktionen u_1 und u_2 in dem Gebiet G die genannte (Verschmelzungs-)Bedingung erfüllen, genügt es, das Erfülltsein dieser Bedingung für die Randpunkte von G zu verlangen. Gerade diese Uebereinstimmung der Werte von u_1 und u_2 wird aber durch den ins Unendliche fortgesetzt zu denkenden alternierenden Prozeß der gürtelförmigen Verschmelzung erzielt.

Faßt man die Funktion u_1 vermöge der zwischen ihrem Definitionsbereich und der Fläche B_1 bestehenden Abbildungsbeziehung als Funktion des Ortes auf letzterer Fläche auf, so erscheinen die beiden Potentiale u_1 und u_2 auf Grund des Erfülltseins der Verschmelzungsbedingung als Ausschnitte einer und derselben auf der ganzen Fläche B existierenden eindeutigen Potentialfunktion u_B, welche im Punkte O' unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$ bezw. $r^{-1} \cos \varphi$ und an der Grenze von B verschwindet; letzteres soll besagen: wenn ε eine beliebig klein gegebene positive von null verschiedene Größe ist, so gibt es eine positive ganze Zahl n, so, daß die genannte Potentialfunktion für das ganze außerhalb L_n (s. § 1) befindliche Gebiet von B ihrem Werte bezw. ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ε ist.

Wird mit v_B das der Potentialfunktion u_B zugeordnete Potential bezeichnet, so vermittelt im hyperbolischen Falle die Funktion $e^{-(u_B + iv_B)}$, im parabolischen Falle die Funktion $\frac{1}{u_B + iv_B}$ die gewünschte konforme Abbildung der Fläche B auf das Innere des Einheitskreises bezw. auf die ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes. Im letzteren Falle müssen die Potentiale u_B und v_B, die ja zunächst nur je bis auf eine reelle additive Konstante bestimmt sind, vorher so normiert sein, daß beide bei der Annäherung an die Grenze von B verschwinden.

Hiermit ist der zu Anfang dieser Abhandlung zitierte allgemeine Abbildungssatz aufs neue vollständig bewiesen.

f. Ergänzende Bemerkungen über die Greensche Funktion $u(B_1, 0)$. Wir lassen dem Beweise des Abbildungssatzes noch einige Bemerkungen folgen, durch welche das Verhalten der Greenschen Funktion $u(B_1, 0)$, deren Existenz in § 1, a bewiesen worden ist, näher charakterisiert wird. Wir setzen dabei die in § 1, d bewiesene Möglichkeit der konformen Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche eines Kreisrings bezw. eines Kreises (excl. Mittelpunkt) als bekannt voraus. U. a. wird sich ergeben, daß, falls mit $v(B_1, 0)$ das dem Potentiale $u(B_1, 0)$ zugeordnete Potential bezeichnet wird, die Funktion $e^{-(u(B_1,0) + iv(B_1,0))}$ im parabolischen Falle unmittelbar die gewünschte konforme Abbildung der Fläche B_1 auf die Fläche des Einheitskreises (excl. eines Punktes) vermittelt, eine Tatsache, deren direkter Nach-

weis den Gegenstand einer von Poincaré l. c. § 15 mitgeteilten Entwickelung bildet.

Die Greensche Funktion $u(B_1, 0)$ hat nach § 1, a folgende Eigenschaften: sie ist ein im ganzen Innern von B_1 eindeutiges und positives Potential, welches im Punkte 0 unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$ und bei der Annäherung an die Begrenzungslinie K_0 stetig in den Wert null übergeht. Wir werden nunmehr auch das Verhalten dieser Greenschen Funktion bei der Annäherung an die zweite Grenze des zweifach zusammenhängenden Bereichs B_1 beurteilen können, d. h. das Verhalten dieser Funktion in dem Gebiete $(B_1 - b_n)$ (s. § 1, a), wenn man die positive ganze Zahl n unendlich groß werden läßt. Hierbei zeigt die Funktion $u(B_1, 0)$ ein verschiedenartiges Verhalten, jenachdem man den hyperbolischen oder parabolischen Fall betrachtet.

Um zunächst den hyperbolischen Fall zu untersuchen, nehmen wir die konforme Abbildung der Fläche B_1 auf den Kreisring mit den Begrenzungskreisen K_a und K_i zu Hülfe. Bei dieser Abbildung entspricht dem System der Linien L_1, L_2, L_3, ... ein System von Linien λ_1, λ_2, λ_3, ... innerhalb des Kreisrings, deren jede den Kreis K_i einfach umschlingt. Es ist klar, daß die Linien λ_n, wenn man n ins Unendliche wachsen läßt, gleichmäßig gegen die Kreislinie K_i vordringen. D. h.: Wenn ε eine beliebig klein gegebene positive von null verschiedene Größe ist, so gibt es eine positive ganze Zahl N, sodaß für $n > N$ jeder Punkt auf λ_n von K_i einen kürzesten Abstand hat, dessen Größe kleiner ist als ε.

Es sei ω derjenige Punkt innerhalb des Kreisrings, welcher dem Punkte 0 der Fläche B_1 entspricht. Dann gehört zu dem Kreisring eine bestimmte Greensche Funktion $u(\omega)$, welche auf K_a und K_i verschwindet und im Punkte ω unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$. Wir behaupten, daß die Funktion $u(B_1, 0)$, aufgefaßt als Funktion des Ortes innerhalb des Kreisrings, mit $u(\omega)$ identisch ist. Um dies einzusehen, beachten wir, daß die Funktion $u(B_1, 0)$ in § 1, a als Grenze der zu den Gebieten b_1, b_2, b_3, ... gehörenden Greenschen Funktionen u_1, u_2, u_3, ... mit der Unendlichkeitsstelle 0 erklärt worden ist. Den entsprechenden Grenzübergang können wir nun in der Kreisringebene vollziehen, in welcher dem Gebiete b_n das von K_a und λ_n begrenzte zweifach zusammenhängende Flächenstück entspricht. Fassen wir u_n als Funktion des Ortes innerhalb des letztgenannten Gebiets auf, so

stellt $u(\omega) - u_n$ ein in diesem Gebiete eindeutiges und reguläres Potential dar, welches auf K_a verschwindet und auf λ_n mit $u(\omega)$ übereinstimmt. Da nun das Maximum von $u(\omega)$ auf λ_n eine mit unendlich wachsendem n unendlich klein werdende Größe ist, so ergibt sich, daß

$$\lim_{n=\infty} u_n = u(\omega)$$

ist, d. h. aber: die Funktion $u(B_1, 0)$, aufgefaßt als Funktion des Ortes innerhalb des von K_a und K_t begrenzten Kreisrings, ist mit $u(\omega)$ identisch. Daraus schließen wir:

Satz: Die Funktion $u(B_1, 0)$ nähert sich im hyperbolischen Falle dem Werte null, wenn man sich innerhalb B_1 der zweiten Grenze von B_1 nähert[1]).

Wir betrachten nunmehr den parabolischen Fall, in welchem es möglich ist, die Fläche B_1 umkehrbar eindeutig und konform auf die ganze Fläche des Einheitskreises (excl. Nullpunkt) abzubilden. In diesem Falle werden sich die Linien λ_n auf den Nullpunkt zusammenziehen in der Weise, daß, wenn n hinreichend groß gewählt wird, der vom Nullpunkt am weitesten entfernte Punkt von λ_n eine Entfernung vom Nullpunkte hat, welche kleiner ist als eine beliebig klein gegebene positive von null verschiedene Größe ε. Mit $u(\omega)$ wollen wir jetzt diejenige Potentialfunktion bezeichnen, welche im ganzen Innern des Einheitskreises (incl. Nullpunkt und excl. ω) eindeutig und regulär ist, auf dem Einheitskreise (K_a) verschwindet und im Punkte ω unendlich wird wie $\log \frac{1}{r}$. Wir behaupten dann, daß, wie vorhin, die Funktion $u(B_1, 0)$, aufgefaßt als Funktion des Ortes innerhalb der Kreisfläche K_a, mit der Funktion $u(\omega)$ identisch ist. Um dies einzusehen, konstruieren wir um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei mit K_a konzentrische Kreise, $K_{(\varrho)}$ und $K_{(q\cdot\varrho)}$, deren Radien die Längen ϱ bezw. $q \cdot \varrho$ haben. Hierbei soll ϱ so klein gewählt werden, daß der Punkt ω außerhalb K_ϱ liegt; ferner soll q der Bedingung $0 < q < 1$ genügen. Nachdem ϱ und q gewählt sind, kann die Zahl n so groß angenommen werden, daß λ_n innerhalb $K_{(q\cdot\varrho)}$ liegt. Die Differenz $u(\omega) - u_n$ stellt dann eine in dem von λ_n und K_a begrenzten Gebiet eindeutige und reguläre Potentialfunktion dar, welche auf K_a verschwindet und auf λ_n dieselben Werte wie $u(\omega)$ annimmt. Diese Potentialfunktion ist also, wenn mit M_n das

1) Der präzise Sinn dieses Ausdrucks ist aus dem Vorhergehenden klar.

Maximum der Werte der Funktion $u(\omega)$ auf λ_n bezeichnet wird, in dem ganzen Gebiet zwischen λ_n und K_a, also insbesondere auf der Kreislinie $K_{(q \cdot \varrho)}$, kleiner als M_n und verschwindet auf K_a. In dem von $K_{(q \cdot \varrho)}$ und K_a begrenzten Ring liegen daher die Werte der Potentialfunktion $u(\omega) - u_n$ unterhalb der Werte der Funktion

$$M_n \frac{\log r}{\log (q \cdot \varrho)},$$

wobei mit r der Abstand eines innerhalb des von K_a und $K_{(q \cdot \varrho)}$ begrenzten Ringes veränderlich zu denkenden Punktes vom Nullpunkte bezeichnet wird. Daraus schließen wir weiter, daß das Potential $u(\omega) - u_n$ in dem von K_ϱ und K_a begrenzten Ringgebiete nur Werte unterhalb

$$M_n \frac{\log \varrho}{\log (q \cdot \varrho)}$$

annimmt. Halten wir nun ϱ fest und lassen q gegen Null konvergieren, so muß gleichzeitig n gegen unendlich konvergierend gedacht werden, da die Linie λ_n ja innerhalb $K_{(q \cdot \varrho)}$ liegen soll. Für $n = \infty$ konvergiert die Größe M_n gegen einen endlichen Wert, nämlich den Wert der Funktion $u(\omega)$ im Nullpunkte. Wir sind also in der Lage, die durch den aufgestellten Ausdruck dargestellte Größe beliebig klein werden zu lassen, ohne ϱ ändern zu müssen, allein durch Vergrößerung von n und gleichzeitige Verkleinerung von q. Die Funktion

$$\lim_{n = \infty} u_n,$$

welche ja nach Erklärung mit der Funktion $u(B_1, 0)$ übereinstimmt, ist mithin innerhalb des von K_ϱ und K_a begrenzten Kreisrings mit $u(\omega)$ identisch. Da nun auch ϱ beliebig klein gewählt werden kann, so findet die genannte Uebereinstimmung der Funktionen $u(B_1, 0)$ und $u(\omega)$ für die ganze Kreisfläche K_a (excl. Nullpunkt, an welchem ja die Funktion $u(B_1, 0)$ bisher nicht erklärt ist) statt.

Sehr einfach läßt sich die Tatsache der Uebereinstimmung der Funktionen $u(\omega)$ und $u(B_1, 0)$ auch mit Hülfe des folgenden Satzes der Potentialtheorie beweisen: Eine in der Umgebung des Nullpunktes (excl. Nullpunkt) eindeutig und regulär erklärte Potentialfunktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze liegen, verhält sich auch im Nullpunkte regulär.

In der Tat ist, weil jedes der Potentiale u_n, als Funktion des

Ortes innerhalb K_a betrachtet, kleiner ist als das Potential $u(\omega)$, auch die Grenzfunktion $u(B_1, 0)$ kleiner als $u(\omega)$. Da die Funktion $u(B_1, 0)$ außerdem überall positiv ist, so kann auf dieselbe der erwähnte Satz der Potentialtheorie angewandt werden, und es ergibt sich, daß sie im Nullpunkte regulär ist. Die Differenz $u(\omega) - u(B_1, 0)$ stellt also eine innerhalb der ganzen Kreisfläche K_a reguläre Potentialfunktion dar, welche auf der Begrenzung dieser Kreisfläche verschwindet, also identisch verschwindet. q. e. d.

Aus der Tatsache der Uebereinstimmung der beiden Potentiale $u(\omega)$ und $u(B_1, 0)$ entnehmen wir jetzt folgendes:

Satz. Die Greensche Funktion $u(B_1, 0)$ der Fläche B_1 nähert sich im parabolischen Falle bei der Annäherung an die zweite Grenze der Fläche B_1 einem ganz bestimmten positiven von null verschiedenen Werte, nämlich dem Werte der Funktion $u(\omega)$ im Nullpunkt.

Ferner: Wird mit v das der Funktion $u(B_1, 0)$ zugeordnete Potential bezeichnet, so vermittelt die Funktion $w = e^{-(u+iv)}$ eine konforme Abbildung der Fläche B_1 auf das Innere des Einheitskreises (excl. eines Punktes)[1]). Die Funktion w ist demnach eine lineare Funktion der Funktion Z^* (s. § 2, e dieser Abhandlung).

§ 2. Das Abbildungstheorem für Bereiche mit analytischen Begrenzungsstücken.

Das zu Anfang dieser Abhandlung zitierte allgemeine Abbildungstheorem enthält nur solche Behauptungen, welche die konforme Abbildung des Innern einer beliebig gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche B betreffen. Wir wollen jetzt die Annahme machen, daß die Fläche B analytische Begrenzungslinien hat[2]). Bei dieser Annahme wird es wichtig sein zu wissen, ob und in welcher Weise die durch den allgemeinen Abbildungssatz gewährleistete Abbildungsbeziehung auch auf die Begrenzungslinien ausgedehnt werden kann. Hierüber gibt der folgende Satz Aufschluß.

Theorem. Besitzt der gegebene einfach zusammenhängende Bereich B analytische Begrenzungsstücke, so läßt sich dieser Bereich stets umkehrbar ein-

1) Vgl. eine zu Anfang von § 1, f gemachte Bemerkung.

2) Die Anzahl der wesentlich verschiedenen regulären analytischen Linienzüge der Begrenzung kann endlich oder unendlich groß sein.

deutig auf das Innere des Einheitskreises abbilden — der Fall der ganzen Ebene (excl. unendlich ferner Punkt) und der Fall der geschlossenen Vollkugel sind also auszuschließen —, und zwar entspricht jedem regulären analytischen Begrenzungsstück ein bestimmtes Stück der Peripherie des Einheitskreises derart, daß die genannte Abbildungsbeziehung des Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises in regulär-analytischer Weise auf die genannten Begrenzungsstücke ausgedehnt werden kann.

Zusatz: Weist die Begrenzung des Bereichs B Ecken oder Spitzen auf, die von analytischen Kurvenstücken gebildet werden, so verhält sich die Abbildungsbeziehung für jede dieser Ecken und Spitzen an dem Punkte $\mathfrak{p}$, in welchem die beiden die Ecke bezw. Spitze bildenden Kurvenstücke zusammentreffen, jedenfalls dann stetig, wenn die betrachteten beiden Kurvenstücke im Punkte $\mathfrak{p}$ den Charakter algebraischer Kurven haben oder wenigstens je mit einer bestimmten Tangentenrichtung im Punkte $\mathfrak{p}$ einlaufen, wobei dann die Kurvenstücke im Punkte $\mathfrak{p}$ selbst aufhören können, den Charakter algebraischer Kurven zu besitzen.

Wir teilen im folgenden vier Beweise dieses Theorems mit, von welchen die beiden ersten den allgemeinen Abbildungssatz als bewiesen voraussetzen, während der dritte und vierte von dieser Voraussetzung keinen Gebrauch macht und auch von größerer Tragweite ist. Es ergibt sich auf diese Weise die Möglichkeit, den in § 1 mitgeteilten Beweis des allgemeinen Abbildungstheorems zu modifizieren, insofern als der Gedankengang des dritten und vierten Beweises direkt auf die aus B_1 entspringende Ueberlagerungsfläche $B_1^{(\infty)}$ angewandt werden kann, ohne daß es nötig ist, die Existenz der Greenschen Funktion $u(B_1, 0)$ zu kennen.

Wir fassen ein reguläres analytisches Linienstück b ins Auge, welches den Bereich B in einem seiner Blätter begrenze, sodaß also der Bereich B in dem betreffenden Blatte sich von der einen Seite mit einem Flächenteile β an das Linienstück b heranerstreckt. Ohne den Grad der Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, dürfen wir annehmen, daß das Linienstück b ganz im Endlichen liegt. Nach dem Begriffe der regulären analytischen Linie, wie derselbe von Herrn Schwarz formuliert worden ist, gibt es zwei an der Stelle $t = 0$ reguläre nach ganzen positiven

Potenzen von t aufsteigende Potenzreihen $\xi(t)$ und $\psi(t)$ von der Beschaffenheit, daß die analytische Funktion $x(t) = \xi(t) + i\psi(t)$ eine konforme Abbildung der Umgebung des Punktes $t = 0$ (incl. des Nullpunktes selbst) vermittelt, bei welcher das dieser Umgebung angehörende Stück der Achse des Reellen, $\bar{b}$, in das Linienstück b übergeht, während der an $\bar{b}$ angrenzende Teil $\bar{\beta}$ der oberen t-Halbebene in β transformiert wird. Uebrigens lassen wir im folgenden zu, daß die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t an einer oder mehreren Stellen der Strecke $\bar{b}$ verschwindet, sodaß also, wenn man das reguläre Linienstück b durchläuft, die Fortschreitungsrichtung sich sprungweise um Multipla von π ändern kann. Gemäß dem Charakter der folgenden Untersuchung genügt es, sich bei der Untersuchung auf die Nachbarschaft eines Punktes P der Linie b zu beschränken, wobei dann höchstens ein kritischer Punkt in Betracht gezogen zu werden braucht, der eventuell mit P zusammenfallend gedacht werden kann.

Erster Beweis des Theorems (unter Zuhülfenahme des allgemeinen Abbildungssatzes). Daß es unter den Voraussetzungen des zu beweisenden Theorems nicht möglich ist, den Bereich B (excl. Grenzpunkte) umkehrbar eindeutig und konform auf die geschlossene Vollkugel abzubilden, versteht sich von selbst. Es ist aber auch nicht möglich, den Bereich B (excl. Grenzpunkte) umkehrbar eindeutig und konform auf die einfach zu denkende ganze Ebene (excl. unendlich ferner Punkt) abzubilden. Denn gesetzt, dies wäre möglich; dann würden wir in der letzteren Ebene eine unendliche Folge von Kreisen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ konstruieren können, die sämtlich den Nullpunkt als Mittelpunkt haben und deren Radien mit wachsendem Index zunehmen und schließlich unendlich groß werden. Diesen Kreislinien würden auf der Fläche B unendlich viele Linien $q_1, q_2, q_3, \ldots$ entsprechen. Betrachten wir die Ebene, über welcher der Bereich B ausgebreitet ist, wie vorhin, als Ebene einer komplexen Variablen x, so würde die analytische Funktion $\varphi(x)$, durch deren Vermittelung die Fläche B auf die erwähnte unendliche Ebene abgebildet wird eine auf der ganzen Fläche B eindeutige analytische Funktion sein, deren Werte, sofern man sich außerhalb einer Linie q_n mit hinreichend großem Index n bewegt, dem absoluten Betrage nach oberhalb einer beliebig großen positiven Größe liegen. Die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$ würde daher bei der Annäherung an einen beliebigen Punkt der regulären analytischen Linie b stetig in den Wert null übergehen,

also nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie identisch verschwinden. Das letztere kann jedoch offenbar nicht der Fall sein.

Nachdem wir das Eintreten des Falles der geschlossenen Vollkugel und des Falles der ganzen Ebene (excl. unendlich ferner Punkt) als unmöglich erkannt haben, schließen wir aus dem allgemeinen Abbildungstheorem, daß es eine im ganzen Innern des Bereichs B (excl. Grenzpunkte) eindeutige analytische Funktion $\psi(x)$ gibt, durch deren Vermittelung das Innere des Bereichs B umkehrbar eindeutig und konform auf die schlicht zu denkende Fläche des Einheitskreises (excl. Peripherie) abgebildet wird.

Innerhalb des Einheitskreises der ψ-Ebene konstruieren wir jetzt eine unendliche Folge von Kreisen $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, . . . mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit Radien ϱ_1, ϱ_2, . . ., deren Größe mit zunehmendem Wert des Index wächst und schließlich gegen eins konvergiert. Diesen Kreisen entsprechen auf der Fläche B gewisse Linien $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, . . ., deren jede alle vorhergehenden umschließt. Die Funktion $-\log|\psi(x)|$ ist nun offenbar eine auf der ganzen Fläche B (excl. Grenzpunkte) eindeutige und positive Potentialfunktion, welche außerhalb $q^{(n)}$ nur Werte unterhalb $-\log\varrho_n$ annimmt. Hieraus folgt aber wegen $\lim\limits_{n=\infty}\varrho_n = 1$, daß die genannte Potentialfunktion stetig in den Wert null übergeht, wenn man sich auf der Fläche B einem beliebigen Punkte P der analytischen Linie b nähert. Mithin verhält sich die Funktion $\psi(x)$ auch im Punkte P regulär, sofern letzterer kein kritischer Punkt des regulären Linienstücks ist. Ist aber P ein kritischer Punkt, so verhält sich jedenfalls ψ als Funktion der oben erwähnten Hülfsgröße t regulär. In beiden Fällen verhält sich x als Funktion von $\psi(x)$ regulär. Denn, wenn man das Linienstück b im einen Sinne durchläuft, so muß sich dabei die Größe $\psi(x)$ auf der Peripherie des Einheitskreises notwendig beständig in einem und demselben Sinne bewegen, da anderenfalls der Flächenteil β, welcher an b angrenzt, sich teilweise auf das Aeußere des Einheitskreises abbilden müßte, während doch $|\psi(x)|$ im ganzen Innern von B, also auch von β, kleiner als eins ist.

Hiermit ist das obige Theorem (excl. Zusatz) bewiesen.

Zweiter Beweis des Theorems (unter Zuhülfenahme des allgemeinen Abbildungssatzes). Es ist offenbar möglich, den Bereich B über die Linie b hinaus ein Stück fortzusetzen und ihn als Teilbereich eines Bereichs B' aufzufassen, für welch letzteren die Linie b im Innern liegt. Um das etwaige

Vorhandensein eines kritischen Punktes auf der Linie b gleichmäßig mitzuberücksichtigen, denken wir uns den Uebergang vom Bereiche B zum Bereiche B' dadurch ausgeführt, daß wir an B längs b das Flächenstück β' anheften, auf welches das in der t-Ebene (s. oben) befindliche zu $\bar{\beta}$ inbezug auf die Achse des Reellen spiegelbildlich symmetrische Flächenstück $\bar{\beta}'$ durch Vermittelung der oben erwähnten Funktion $x(t)$ abgebildet wird. Die Flächenstücke β und β' sind dann nach Schwarz inbezug auf die Linie b im analytischen Sinne Spiegelbilder von einander; ein kritischer Punkt auf der Linie b erscheint als innerer Windungspunkt der Fläche B'.

Bildet man jetzt die Fläche B' (excl. Grenzpunkte) konform auf einen die Ebene einfach bedeckenden Bereich B'_* ab, was ja nach dem allgemeinen Abbildungssatze sicher möglich ist, so geht der Bereich B in einen die Ebene ebenfalls nirgends mehrfach bedeckenden Bereich B_* über, welcher ein gewisses zweidimensionales Stück der Ebene unbedeckt läßt und ein reguläres analytisches Begrenzungsstück b_* mit durchweg regulärer Aenderung der Tangentenrichtung aufweist, das der Linie b in regulärer Weise entspricht. Die Aufgabe der konformen Abbildung des Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises reduziert sich demnach auf die entsprechende Aufgabe für den Bereich B_*, wobei insbesondere auch zu zeigen ist, daß bei der letzteren Abbildung der Linie b_* ein bestimmtes Stück der Peripherie des Einheitskreises in regulärer Weise entspricht.

Wir wählen zu dem Zwecke in der üblichen Weise im Innern von B_* einen Punkt O_* als Unendlichkeitsstelle für eine Folge von Greenschen Funktionen, die zu immer größer werdenden Teilbereichen von B_* gehören und zu denen die Greensche Funktion u_* des Bereichs B_* selbst als Grenzfunktion gehört. Als Majorante bietet sich im vorliegenden Falle jede im Punkte O_* logarithmisch unendlich werdende Potentialfunktion dar, welche man erhält, wenn man in dem von B_* frei gelassenenen Teile der Ebene, etwa im Gebiete $(B'_* - B_*)$ einen Kreis k konstruiert und die zum Aeußeren dieses Kreises gehörende Greensche Funktion mit der Unendlichkeitsstelle O_* bildet. Es kommt nur noch darauf an zu zeigen, daß das Potential u_* stetig in den Wert null übergeht, wenn man sich innerhalb B_* einem beliebigen Punkte P_* auf b_* stetig nähert, der nicht ein Endpunkt von b_* ist. Um dies einzusehen, hat man nur nötig, den zur Bildung der Majorante benützten Kreis k so zu wählen, daß er die Linie b_* im Punkte P_* berührt und außerdem, wie vorhin, ganz außerhalb B_* liegt. Denn die

bei dieser Wahl des Kreises k sich ergebende Majorante für die Funktion u_* verschwindet im Punkte P_*, sodaß auch u_* im Punkte P_* verschwinden muß und also, weil P_* ein beliebiger Punkt der regulären Linie b_* ist, längs der ganzen Linie b_* regulär ist.

Dritter und vierter (independenter) Beweis des Theorems. Wir wählen auf der Fläche B einen inneren Punkt 0 und ziehen um 0 in der üblichen Weise unendlich viele geschlossene aus lauter analytischen Stücken gebildete Linien $L_1, L_2, \ldots$, von welchen jede die vorhergehende vollständig umschließt und ganz im Innern von B verläuft, ohne die Grenze von B zu treffen. Die Linien sind außerdem so zu wählen, daß die von ihnen umschlossenen einfach zusammenhängenden Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ schließlich das ganze Innere der Fläche B ausschöpfen. Es ist zu zeigen, daß die Reihe der zu den Bereichen $B_1, B_2, \ldots$ gehörenden Greenschen Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ konvergiert.

Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir an, die Reihe der Werte, welche diese Funktionen annehmen, divergiere in einem Punkt A, den wir uns im Innern von B_1 liegend vorstellen dürfen. Wir werden jetzt aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten.

Zu dem Zwecke wählen wir auf der Linie b zwei Punkte P_1 und P_2, aus und konstruieren unendlich viele durch das Innere von B führende Verbindungslinien $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \ldots$ zwischen diesen beiden Punkten. Von diesen Linien darf keine sich selbst schneiden. Ferner ist die Wahl der Linien so zu treffen, daß, wenn mit $\overline{B}_n$ das von $\overline{L}_n$ und dem zwischen P_1 und P_2 befindlichen Stück der Linie b begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet bezeichnet wird, B_n und $\overline{B}_{n-1}$ im Innern von $\overline{B}_n$ liegt, eine Bemerkung, die für jeden Wert des Index n gelten soll. Bezeichnen wir mit $\bar{u}_n$ die zum Bereiche $\overline{B}_n$ gehörende im Punkte 0 logarithmisch unendlich werdende Greensche Funktion, so gilt im Gebiete B_n die Ungleichheit

$$\bar{u}_n \geqq u_n.$$

Aus der Annahme der Divergenz der von den Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ im Punkte A gelieferten Reihe von Werten würde mithin folgen, daß auch die Reihe der Werte, welche die Potentiale $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$ im Punkte A annehmen, divergiert.

Wir greifen jetzt auf der Linie $\overline{L}_1$ zwei von P_1 und P_2 verschiedene Punkte P_3 und P_4 heraus und verbinden P_3 mit P_4 durch eine Linie l, welche durch das Innere von $\overline{B}_1$ läuft und weder den Punkt 0 noch die Linie b trifft. Der Bereich $\overline{B}_1$ wird durch die

Linie l in zwei Teilstücke zerlegt. Wir nehmen an, was durch passende Wahl der Linie l stets erreicht werden kann, daß der an b angrenzende Flächenteil, f, den Punkt 0 weder in seinem Innern noch auf seiner Begrenzung enthält. Es existiert dann eine in diesem Flächenteile eindeutige und endliche Potentialfunktion V, welche auf der Linie l den konstanten Wert eins und auf der ganzen übrigen Begrenzung von f den Wert null annimmt. Diese in den Punkten P_3 und P_4 mit je einer endlichen Discontinuität behaftete Funktion soll uns jetzt als Vergleichsfunktion dienen. Das längs der Linie b von P_1 bis P_2 erstreckte Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial V}{\partial \nu}\, db,$$

in welchem mit $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die Ableitung in Richtung der inneren Normalen zu db bezeichnet ist, hat einen von null verschiedenen endlichen positiven Wert p.

Aus dem Umstande, daß die positiven Potentiale $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$ im Punkte A eine divergierende Reihe von Werten annehmen, können wir mit Hülfe des Harnackschen Satzes folgern, daß, wenn mit m_n der kleinste Wert des Potentials $\bar{u}_n$ auf l bezeichnet wird,

$$\lim_{n=\infty} m_n = \infty$$

ist. Aus der Vergleichung der Werte der Funktion $\bar{u}_n$ und V auf der Grenze des Gebiets f ergibt sich, daß in diesem Gebiete überall die Ungleichheit

$$\bar{u}_n \geqq m_n V$$

erfüllt ist. Mithin ist auch

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu}\, db \geqq m_n \cdot p.$$

Der Wert des auf der linken Seite dieser Ungleichheit stehenden Integrales würde also mit wachsendem Wert des Index n über alle Grenzen zunehmen. Letzteres ist jedoch nicht möglich, weil das über die vollständige Begrenzung von $\overline{B}_n$ erstreckte Integral $\int \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu}\, d\sigma$ für jeden Wert des Index n den Wert 2π, mithin

das von P_1 bis P_2 erstreckte Integral einen kleineren Wert hat wegen des positiven Vorzeichens aller Integralelemente.

Der Beweis dafür, daß mit $\lim_{n=\infty} m_n$ auch $\lim_{n=\infty} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \nu} db$ unendlich groß würde, kann leicht auch ohne Zuhülfenahme des Potentials V geführt werden, indem man sich den Bereich f, für welchen dieses Potential erklärt wurde, umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche des Einheitskreises abgebildet und die Funktion $\bar{u}_n$ durch das Poissonsche Integral dargestellt denkt. Der zu untersuchende Integralausdruck ist gegenüber der erwähnten Hülfsabbildung formal invariant.

Die Annahme, daß die Reihe der Potentiale $u_1, u_2, \ldots$ im Punkte A eine divergierende Reihe von Werten liefert, ist durch die vorhergehende Betrachtung als unzutreffend erkannt. Sind wir aber sicher, daß im Punkte A Konvergenz stattfindet, so findet nach dem Harnackschen Satze gleichmäßige Konvergenz statt und es ergibt sich ein Grenzpotential u, so beschaffen, daß, wenn mit v das konjugierte Potential bezeichnet wird, durch Vermittelung der Funktion $e^{-(u+iv)}$ das Innere der Fläche B (excl. Grenzpunkte) auf das ganze Innere des Einheitskreises (excl. Peripherie) abgebildet wird. Aber auch über das Verhalten der die Abbildung vermittelnden analytischen Funktion längs den regulären analytischen Begrenzungsstücken des Bereichs B können wir jetzt sofort den gewünschten Aufschluß erhalten, indem wir etwa die darauf sich beziehende Betrachtung des ersten Beweises wiederholen.

Hiermit ist aufs neue das zu Anfang dieses Paragraphen behauptete Theorem (excl. Zusatz) bewiesen.

Während die Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ alle so gewählt waren, daß keiner derselben mit der Begrenzung von B einen Punkt gemein hat, haben die Bereiche $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$ je ein Stück der Begrenzung mit B gemeinschaftlich. Daß dieses Stück für alle Bereiche ein und dasselbe ist, wie bei dem vorangehenden Beweise angenommen worden ist, kommt offenbar für den Beweisgang selbst nicht wesentlich in Betracht. Vielmehr können wir, ohne unseren Beweis ändern zu müssen, zulassen, daß Anzahl und Größe der analytischen Begrenzungsstücke, welche der Bereich $\overline{B}_n$ mit B gemeinsam hat, mit wachsendem Wert des Index n beliebig wächst. Übrigens erkennt man sofort, daß das Grenzpotential, gegen welches die für die Bereiche $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$ erklärten Potentiale $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$ konvergieren, kein anderes ist als das Grenzpotential, gegen welches die

für die Bereiche B_1, B_2, . . . erklärten Potentiale u_1, u_2, . . . konvergieren.

Man bemerke, daß die Tragweite des letzten Beweises für die Existenz der Greenschen Funktion des Bereichs B eine wesentlich weiter reichende ist, insofern als die Methode dieses Beweises sich offenbar bei jedem endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich anwenden läßt, sofern derselbe nur mindestens ein analytisches Begrenzungsstück aufweist. Hat der Bereich B zwar keine analytische Begrenzungslinie, aber doch mindestens eine Begrenzungslinie, über welche hinaus man sich die Fläche B ein Stück fortgesetzt denken kann, so bietet der Nachweis der Existenz der Greenschen Funktion für diese Fläche ebenfalls keine wesentlich neue Schwierigkeit dar. Denn man kann dann den Bereich B als Teilbereich eines Bereichs B' auffassen, welcher ein analytisches Begrenzungsstück aufweist. Die zum Bereiche B' gehörende Greensche Funktion kann bei der Bildung der zum Bereiche B gehörenden Greenschen Funktion als Majorante dienen.

Die letzte Bemerkung kann zu einem neuen (independenten) Beweise des zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Abbildungstheorems dienen.

Denkt man sich nämlich den einfach zusammenhängenden Bereich B, um dessen konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises es sich in diesem Theorem handelt, wie beim zweiten Beweise, über die analytische Linie b hinweg ein Stück fortgesetzt, indem man etwa das oben erwähnte Stück $\bar{\beta}'$ ansetzt, so kann man aus dem Innern des Gebiets $\bar{\beta}'$ eine kleine Kreisscheibe, K_0, ausschneiden. Die Fläche $B + \bar{\beta}' - K_0$ ist dann ein zweifach zusammenhängender Bereich, für welchen die Existenz der im Punkte 0 unendlich werdenden Greenschen Funktion durch die in § 1, a gegebene Entwickelung gewährleistet wird. Diese Greensche Funktion kann als Majorante bei der Bildung der Greenschen Funktion des Bereichs B benützt werden. Wählt man den Kreis K so, daß er die Fläche B in einem Punkte der Linie b von außen berührt, so erkennt man weiter, daß die Greensche Funktion des Bereichs B stetig in den Wert null übergeht, wenn man sich dem betrachteten Punkte der Linie b aus dem Innern des Bereichs B stetig nähert. q. e. d.

Auch die soeben mitgeteilte Methode kann dazu dienen, die Existenz der Greenschen Funktion für beliebige Bereiche von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhang darzutun, sofern

nur mindestens ein analytisches Begrenzungsstück vorhanden ist oder doch wenigstens ein Begrenzungsstück, über welches hinaus man sich die Fläche ein Stück fortgesetzt denken kann. Denn die in § 1, a gegebene Entwickelung läßt sich, wie auch Herr Poincaré bezüglich seiner analogen Entwickelung bemerkt, ohne weiteres auf jeden endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich anwenden, welcher mindestens eine geschlossene Kreislinie als Begrenzungslinie aufweist.

Beweis des Zusatzes, (betreffend das stetige Verhalten der Abbildungsbeziehung in Ecken und Spitzen). Wir betrachten auf der Begrenzung des Bereichs B eine beliebige von zwei analytischen Linien, l_1 und l_2, gebildete Ecke oder Spitze, welche den oben näher angegebenen Bedingungen genügt. Den äußersten Punkt derselben wollen wir, wie oben, mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Vermöge der betrachteten konformen Abbildung des einfach zusammenhängenden Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises entsprechen nach dem Vorhergehenden den Linien l_1 und l_2 zwei bestimmte Bögen λ_1 und λ_2 der Peripherie des Einheitskreises in regulärer Weise, wenn man zunächst den Punkt $\mathfrak{p}$ ausnimmt. Es fragt sich nun, ob die Bögen λ_1 und λ_2 auf einen und denselben Punkt π der Peripherie zustreben, welcher als Bild des Punktes $\mathfrak{p}$ anzusprechen wäre.

Wir heben nochmals hervor, was wir bereits über die Abbildungsbeziehung festgestellt haben, nämlich, daß der Bereich B (exkl. Grenzpunkte) + alle regulären analytischen Begrenzungsstücke (exkl. deren Endpunkte) durch die betrachtete Abbildung umkehrbar eindeutig und konform bezogen wird auf die Fläche des Einheitskreises (exkl. Peripherie) + gewisse Peripheriebögen (exkl. deren Endpunkte).

Nehmen wir nun an, die Linien λ_1 und λ_2 strebten nicht einem und demselben Punkte π, sondern zwei verschiedenen Punkten, π_1 und π_2, der Peripherie zu, jenachdem man sich auf der Linie l_1 oder l_2 dem Punkte $\mathfrak{p}$ nähert. Dann bestimmen wir auf λ_1 einen Punkt P_1, welcher von π_1 die Entfernung ε hat, auf λ_2 einen Punkt P_2, welcher von π_2 die Entfernung ε hat. Wir ziehen ferner von P_1 und P_2 aus die Radien nach dem Mittelpunkte M des Einheitskreises, wodurch ein bestimmter Kreissektor definiert wird, welcher die Punkte π_1 und π_2 auf seiner Begrenzung hat. Dieser Sektor wird durch den Kreis mit dem Radius $(1-\varepsilon)$ und dem Mittelpunkte M in zwei Stücke zerlegt, nämlich in ein Kreisbogendreieck und ein Kreisbogenviereck, welch letzteres wir mit

V_ε bezeichnen wollen. Dieses Viereck zieht sich, wenn man ε unendlich klein werden läßt, auf den Peripheriebogen $\pi_1 \pi_2$ zusammen. Dem Viereck V_ε entspricht vermöge der betrachteten konformen Abbildung ein analytisch begrenztes Fünfeck Φ_η, wobei mit η die Entfernung des vom Punkte $\mathfrak{p}$ am weitesten abliegenden Punktes dieses Fünfecks bezeichnet ist. Läßt man ε gegen null konvergieren, so muß gleichzeitig auch η gegen null konvergieren. Denn anderenfalls würden bei diesem Grenzübergang, dem eine stetige Zusammenschnürung der beiden Figuren V_ε und Φ_η entspricht, unendlich viele innere Punkte der Fläche B, die in der Nähe des Punktes $\mathfrak{p}$ liegen, ausgeschlossen werden, insofern als ihnen keine inneren Punkte des Einheitskreises entsprechen könnten.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$\lim \varepsilon = 0, \qquad \lim \eta = 0$$

hat zur Folge, daß die für das ganze Innere des Einheitskreises eindeutig erklärte analytische Funktion, welche die betrachtete konforme Abbildung der Fläche des Einheitskreises auf die über der x-Ebene ausgebreitete Fläche B vermittelt, längs des Peripheriebogens $\pi_1 \pi_2$ stetig in einen konstanten Wert übergeht, nämlich in denjenigen komplexen x-Wert, welcher dem Punkte $\mathfrak{p}$ zugeordnet ist. Die analytische Funktion würde sich also überhaupt auf eine Konstante reduzieren.

Die Annahme, daß π_1 und π_2 zwei von einander verschiedene Punkte der Peripherie des Einheitskreises sind, ist mithin unzutreffend.

Hat man aber die Identität der Punkte π_1 und π_2 erkannt, so sagen die Gleichungen

$$\lim \varepsilon = 0, \qquad \lim \eta = 0$$

das zu Beweisende aus, nämlich die Stetigkeit der Abbildung an dem Punkte $\mathfrak{p}$[1]).

Ist der Bereich B mehrfach zusammenhängend, gleichgültig ob endlich- oder unendlich-vielfach, so kann man fragen, ob die

---

1) Vgl. mit dem vorstehenden Beweise Picard, traité d'analyse, t. II, p. 303—305.

Die Kenntnis eines anderen von dem hier mitgeteilten wesentlich verschiedenen sehr interessanten Beweises für das stetige Verhalten der Abbildungsfunktion an dem äußersten Punkte einer Ecke oder Spitze verdanke ich einer freundlichen mündlichen Mitteilung des Herrn H. A. Schwarz. Bei diesem Beweise wird vorausgesetzt, daß die betreffenden die Ecke bezw. Spitze bildenden Kurvenstücke l_1 und l_2 im Punkte $\mathfrak{p}$ den Charakter algebraischer Kurven haben.

zu einem solchen Bereiche gehörende Greensche Funktion, deren Existenz kurz vorher unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen worden ist, auch an dem äußersten Punkte $\mathfrak{p}$ einer Ecke oder Spitze der Begrenzung stetig in den Wert null übergeht. Das dies in der Tat der Fall ist, kann folgendermaßen geschlossen werden.

Es sei $2\mu\pi$ der im Punkte $\mathfrak{p}$ von den zusammenstoßenden Linien l_1, l_2, die übrigens für den folgenden Nachweis nicht notwendig analytisch zu sein brauchen, gebildete Winkel. Dann können wir längs l_1 und l_2 ein einfach zusammenhängendes Flächenstück γ an die Fläche B so anfügen, daß der Punkt $\mathfrak{p}$ als innerer Windungspunkt der Ordnung $2([\mu]+1)$ für die Fläche $B+\gamma$ erscheint; mit $[\mu]$ ist hierbei die größte in μ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Innerhalb γ kann man jetzt eine geschlossene reguläre analytische Linie γ_0 konstruieren, welche durch $\mathfrak{p}$ hindurchgeht und auf γ ein einfach zusammenhängendes Flächenstück γ_0 abgrenzt. Die Greensche Funktion der Fläche $B+\gamma-\gamma_0$, welche im Punkte 0, dem Unendlichkeitspunkte der zur Fläche B gehörenden Greenschen Funktion, unendlich wird, existiert und geht längs der ganzen Linie γ_0 sicher stetig in den Wert null über. Indem man diese Greensche Funktion als Majorante für die andere benützt, erhält man das gewünschte Resultat.

Schlussbemerkungen.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt worden ist, ergeben sich die Beweise der vier in meiner ersten Mitteilung „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" formulierten Uniformisierungstheoreme als Anwendungen unserer beiden Abbildungstheoreme [1]). Insbesondere tritt bei den beiden ersten auf beliebige

1) Ich benutze die Gelegenheit, um auf einige Druckfehler in der ersten Mitteilung aufmerksam zu machen.

Auf Seite 194 lies statt „daß alle im Innern des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ etwa vorhandenen Häufungspunkte der definierten Punktmenge nicht zur Menge selbst gehören" folgendes: daß keiner der etwa vorhandenen Häufungspunkte der definierten Punktmenge dem Innern des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ angehört.

Auf Seite 194 ist Fußnote 2) fortzulassen.

(Der gedruckte Text der pag. 194 stammt aus einem ursprünglich von mir angegebenen Wortlaute des zweiten Theorems, bei welchem die Existenz innerer Punkte des Gebildes zugelassen wird, welche Häufungspunkte für die Menge der markierten Punkte sind. Der Beweis des zweiten Theorems in dieser weiteren Auffassung ist im wesentlichen genau derselbe wie der Beweis dieses Theorems in der erläuterten

komplexe Gebilde sich beziehenden Uniformisierungstheoremen der allgemeine Abbildungssatz, bei den beiden letzten speziell auf reelle Kurven sich beziehenden Uniformisierungstheoremen der speziellere für Bereiche mit analytischen Begrenzungsteilen geltende Abbildungssatz in Kraft. Es ist jedoch, wie mir scheint, die Bemerkung beachtenswert, daß für reelle analytische Kurven alle vier Uniformierungstheoreme aus dem dritten gefolgert werden können, wenn man einen Gedanken benützt, welchen ich in der Arbeit „Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven"[1]) u. a angegeben habe, um für reelle algebraische Kurven das Klein-Poincarésche Grenzkreistheorem zu beweisen.

Alle von mir in meinen bisherigen Abhandlungen über Uniformisierung betrachteten Theoreme führen, wenn man von den endlichen Gruppen und den bei den elliptischen Funktionen auftretenden Gruppen absieht, auf reelle Substitutionsgruppen, wobei die Determinante jeder einzelnen Substitution positiv oder negativ sein kann. Am Schlusse meiner ersten Mitteilung „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven" habe ich die Behauptung ausgesprochen, daß durch meine Untersuchungen überhaupt alle Uniformisierungsprobleme erledigt würden, welche im Rahmen der reellen linearen Substitutionsgruppen mit endlich oder unendlich vielen Gruppenerzeugenden möglich sind.

Inwiefern diese Behauptung zu Recht besteht, werde ich an anderer Stelle näher begründen.

---

engeren Auffassung, deren besondere Wichtigkeit darauf beruht, daß bei Zugrundelegung derselben die durch den Schwarzschen Differentialausdruck $D_{x_1}(t)$ definierte Funktion $\tau(x_1, x_2, \ldots x_n)$ (s. p. 193) an jedem inneren Punkte des Gebildes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den Charakter einer rationalen Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat.)

Auf Seite 193, Zeile 16 von unten, und Seite 196, Mitte, ist „linearen" fortzulassen.

1) Gött. Nachr. 1907, vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 6. Juli 1907.

Ueber eine Anwendung der Invariantentheorie auf die Entwickelung von Integralen, insbesondere rationaler, elliptischer und hyperelliptischer, in Reihen.

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Dezember 1907 durch Herrn F. Klein.

Herr F. Klein hat betont, daß das elliptische Integral erster Gattung $J(x_1, x_2)$ eine Kovariante der zugehörigen biquadratischen binären Form $f(x_1, x_2) = a_0 x_2^4 + a_1 x_2^3 x_1 + a_2 x_2^2 x_1^2 + a_3 x_2 x_1^3 + a_4 x_1^4$ ist, und zwar in x_1, x_2 von der Dimension Null, in den a von der Dimension $-\frac{1}{2}$ und vom Gewichte -1. Auf Grund dieser Tatsache läßt sich, wie sich zeigen wird, das, wieder nicht homogen geschriebene Integral $J(x)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickeln, deren Koeffizienten in algebraischer wie arithmetischer Hinsicht ein einfaches Gesetz befolgen.

Will man indessen dieses Gesetz auf beliebige elliptische und hyperelliptische, sowie rückwärts auf rationale Integrale übertragen, so löse man vorerst die Aufgabe, den Integranden in eine Reihe zu entwickeln. Dieser Integrand hat die Gestalt:

$$\text{(I)} \qquad F(x) = f_n^{\mu}(x)\, g_p^{\nu}(x)\, h_q^{\pi}(x) \ldots,$$

wo $f_n(x), g_p(x), h_q(x), \ldots$ eine endliche Anzahl binärer Urformen der Ordnungen $n, p, q \ldots$ sind:

---

1) Math. Annalen 14 (1879), p. 112 f.; man vgl. auch Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen, Bd. I (1890), Kapitel I.

$$
(1) \qquad \begin{cases} f_\mu(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_\mu x^\mu, \\ g_\nu(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_\nu x^\nu, \\ h_\varkappa(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{cases}
$$

und $\mu, \nu, \varkappa \ldots$ beliebig gegebene Exponenten bedeuten. Dabei dürfen sämtliche auftretenden Größen ebensowohl reell wie komplex sein.

Dann läßt sich die in Rede stehende Reihenentwickelung von $F(x)$ lediglich auf der einfachen Tatsache aufbauen, daß $F(x)$ eine simultane Kovariante der Urformen $f, g, h, \ldots$ ist.

Denn, versteht man unter ∇ den Prozeß:

$$
(\mathrm{II}) \qquad \nabla = \sum_{i=1}^{\mu} i a_i \frac{\partial}{\partial a_{i-1}} + \sum_{k=1}^{\nu} k b_k \frac{\partial}{\partial b_{k-1}} + \cdots,
$$

so genügt die Kovariante $F(x)$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$
(\mathrm{III}) \qquad \nabla F(x) = F'(x).
$$

Denkt man sich andererseits $F(x)$ in die Maclaurinsche Reihe entwickelt[1]):

$$
(\mathrm{IV}) \qquad F(x) = D_0 + D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + D_i \frac{x^i}{i!} + \cdots,
$$

so führt die Anwendung von (III) auf (IV) zu der Rekursionsformel[2]):

$$
(\mathrm{V}) \qquad \nabla D_i = D_{i+1} (i = 0, 1, 2 \ldots).
$$

Setzt man:

$$
(\mathrm{VI}) \qquad D_i a_0^{i-\mu} b_0^{i-\nu} \cdots = Z_i (i = 0, 1, 2 \ldots),
$$

so geht Formel (V) über in die Rekursionsformel für die Z:

$$
(\mathrm{VII}) \quad Z_{i+1} = Z_i \{ (\mu - i) a_1 b_0 c_0 \cdots + (\nu - i) b_1 a_0 c_0 \cdots + \cdots \} + a_0 b_0 c_0 \ldots \nabla Z_i.
$$

Hieraus folgt, daß Z_i in den $a, b, c, \ldots$ ganz rational ist, in diesen Koeffizientenreihen einzeln homogen von der Dimension i,

---

1) Diese Reihe konvergiert jedenfalls innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, der durch die nächstgelegene Wurzel der Gleichung $fgh \ldots = 0$ hindurchgeht. Es sind daher die Koeffizienten $a_0, b_0, c_0, \ldots$ als von Null verschieden anzunehmen.

2) Für endliche Kovarianten deckt sich (V) mit dem bekannten Cayleyschen Quellengesetz.

und in allen zusammen isobar vom Gesamtgewicht i. Demnach ist Z_i ein Aggregat von der Gestalt:

$$\text{(VIII)}\quad Z_i = \sum_{\varepsilon, \eta, \ldots} A^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n, \eta_0 \eta_1 \ldots \eta_p, \ldots}\; a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n} \cdot b_0^{\eta_0} b_1^{\eta_1} \ldots b_p^{\eta_p} \ldots,$$

wo die $A^{(i)}$ numerische Faktoren sind, und die Summierung über alle nichtnegativen ganzen Zahlen $\varepsilon, \eta, \ldots$ zu erstrecken ist, die den Relationen genügen:

$$\text{(IX)}\qquad \sum \varepsilon = i,\ \sum \eta = i, \ldots;\ \sum_{r=1}^{n} r\varepsilon_r + \sum_{s=1}^{p} s\eta_s + \cdots = i.$$

Für die $A^{(i)}$ in (VIII) gelangt man auf etwas mühsamen Wege durch unvollständige Induktion zu dem Gesetze:

$$\text{(X)}\qquad A^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n, \eta_0 \eta_1 \ldots \eta_p, \ldots} = i!\, \frac{\mu(\mu-1)\cdots\{\mu-(i-\varepsilon_0-1)\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_n!} \cdot \frac{\nu(\nu-1)\cdots\{\nu-(i-\eta_0-1)\}}{\eta_1!\,\eta_2!\ldots\eta_p!} \cdots.$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Jeder der auf der rechten Seite von (VII) auftretenden Teilprozesse läßt aus einem bestimmten Gliede von Z_i jeweils ein gewisses Glied von Z_{i+1} erwachsen. Umgekehrt, denkt man sich aus Z_{i+1} ein bestimmtes Glied G herausgegriffen, so lassen sich sämtliche Glieder von Z_i angeben, die vermöge wenigstens eines der Teilprozesse (VIII) das zu G gehörige Potenzprodukt der $a, b, c \ldots$ erzeugen. Da das Gesetz (X) bis zum Index i als richtig angenommen wird, so liefert jedes der in Rede stehenden Glieder von Z_i zum gesuchten numerischen Koeffizienten von G einen angebbaren Beitrag. Die Summierung dieser Einzelbeiträge ergibt aber gerade, unter Benützung der Gewichtsrelation (IX), die für den Index $i+1$ gebildete, rechte Seite von (X). Daß das Gesetz (X) für die niedrigsten Werte des Index i gilt, ist leicht zu bestätigen. Damit ist die allgemeine Giltigkeit von (X) dargetan.

Die Formel (X) läßt sich sich noch übersichtlicher schreiben, wenn man — außer den Binominalkoeffizienten $\binom{\mu}{i-\varepsilon_0}, \binom{\nu}{i-\eta_0}, \ldots$ — die den Zerlegungen (IX) von $i-\varepsilon_0, i-\eta_0, \ldots$ in die Summanden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$; $\ldots$ entsprechenden Polynomialkoeffizienten $\binom{i-\varepsilon_0}{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n}, \binom{i-\eta_0}{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p}, \ldots$ einführt. Dann entsteht die rechte Seite (X) einfach dadurch, daß man das Produkt aller jener Binomial- und Polynomialkoeffizienten bildet, und noch den Faktor $i!$ hinzugefügt; letzterer hebt sich übrigens bei Einsetzen in die Reihe (IV) wieder heraus.

Eine weitere Vereinfachung läßt sich noch dadurch herbeiführen, daß man die Formeln (I), (1), (VI), (VIII), (X) bezüglich der Koeffizientenreihen der $a, b, c, \ldots$ nichthomogen schreibt, d. h. $a_0 = b_0 = c_0 = \ldots = 1$ setzt.

Dann fällt D_i mit Z_i zusammen, in (X) sind die Differenzen $i-\varepsilon_0, i-\eta_0, \ldots$ resp. durch die Summen, $\sum_1^n \varepsilon_r, \sum_1^p \eta_s, \ldots$ zu ersetzen, und die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_p; \ldots$ haben lediglich der Gewichtsrelation (IX) $\sum_{r=1}^n r\,\varepsilon_r + \sum_{s=1}^p s\,\eta_s + \cdots = i$ zu genügen.

Durch Integration geht aus (IV) die eingangs verlangte Entwickelung hervor:

$$\text{(XI)}\quad \int^x f_n^\mu(x)\, g_p^\nu(x)\, h_q^\varkappa(x) \ldots dx$$

$$= C + \frac{x}{1!} D_0 + \frac{x^2}{2!} \quad D_1 + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \quad D_i + \cdots$$

$$= C + \frac{x}{1!} D_0 + \frac{x^2}{2!} \nabla D_0 + \cdots + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \nabla^i D_0 + \cdots,$$

wo C die Integrationskonstante bezeichnet und ∇^i den durch i-malige Ausübung von ∇(II) entstehenden Prozeß. Der Konvergenzbereich der Reihe (XI) läßt sich bei vorgelegten Exponenten $\mu, \nu, \varkappa \ldots$ jederzeit nach bekannten Regeln bestimmen.

Neben das Rekursionsgesetz (V) resp. (VII) tritt noch ein zweites, das zugleich als Kontrolle dient.

Versteht man unter ∇_2 den Prozeß:

$$\text{(XII)}\qquad \nabla_2 = \sum_{i=1}^n (n-i)\, a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^p (p-k)\, b_{k-1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \cdots,$$

so genügt, wie die Invariantentheorie nachweist, eine Kovariante $K(x_1, x_2)$ der Urformen $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$, $h(x_1, x_2), \ldots$ auch noch der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(XIII)}\qquad \nabla_2 K(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Besitzt $K(x_1, x_2)$ eine endliche Dimension d_x bez. x_1, x_2, so läßt sich mittels des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen $K(x_1, x_2)$, die Gleichung (XIII) in die nichthomogene Gestalt setzen:

$$\text{(XIV)}\qquad \nabla_2 K(x) = x d_x K(x) - x^2 K'(x).$$

Wendet man dies auf die Kovariante $F(x)$ (I) an, und berücksichtigt, daß die Dimension d_x von F angegeben wird durch:

$$(2)\qquad d_x = n\mu + p\nu + q\pi + \cdots,$$

so gewinnt (XIV) für die Form $F(x)$ die Gestalt:

$$(\mathrm{XV})\qquad \nabla_2 F(x) \equiv (n\mu + p\nu + q\pi + \cdots)\, xF - x^2 F'(x).$$

Bei Übertragung der Gleichung (XV) auf die Reihe (IV) für $F(x)$ erweist sich (XV) als gleichwertig mit der Rekursionsformel:

$$(\mathrm{XVI})\qquad \nabla_2 D_{i+1} = (i+1)(n\mu + p\nu + q\pi + \cdots - i)\, a_0 b_0 c_0 \ldots D_i,$$

wo D_i, D_{i+1} auch durch Z_i, Z_{i+1} ersetzbar sind.

In dem besonderen Falle, daß die Dimension d_x von $F(x)$ den Wert -2 besitzt, wird das Integral J von $F(x)$ selbst eine Kovariante der Urformen $f, g, h, \ldots$, von der Dimension 0; das Integral genügt dann ebenfalls den beiden Differentialgleichungen (III) und (XV)[1]), woraus sich einige spezifische Eigenschaften des Integrals ergeben.

Um einige Anwendungen von (XI) anzugeben, sei zunächst darauf hingewiesen, daß sich das Integral einer rationalen Funktion $F(x)$ ohne weiteres in eine Reihe entwickeln läßt, ohne daß man eine Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren zu kennen braucht.

Für ein elliptisches Integral erster Gattung $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ ist $n = 4$, $\mu = -\frac{1}{2}$, die Formel (VI) spezialisiert sich zu $D_i = a_0^{\frac{2i+1}{2}} Z_i$, wo gemäß (VIII), (IX), (X):

$$(3)\qquad Z_i = \sum A^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_3} a_4^{\varepsilon_4},$$

$$(4)\qquad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = i,\ 1.\varepsilon_1 + 2.\varepsilon_2 + 3.\varepsilon_3 + 4.\varepsilon_4 = i,$$

$$(5)\qquad A^{(i)}_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} = \frac{(-1)^{i-\varepsilon_0}}{2^{i-\varepsilon_0}}\ \frac{1.3.5.\cdots\{2(i-\varepsilon_0)-1\}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\,\varepsilon_3!\,\varepsilon_4!}\, i!$$

Die zugehörige Reihentwickelung (XI) des Integrals konvergiert in der ganzen Ebene.

Im Anschluß hieran seien noch die beiden speziellen Entwickelungen für die Legendre-Jacobische und für die Weierstraßsche Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung angegeben.

Bei der ersteren Normalform:

$$(6)\qquad J(x,k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ist die Durchführung der Rechnung nicht leicht.

---

1) Da J die Dimension Null in x hat, reduziert sich (XV) auf $\nabla_2 J(x) = -x^2 J'(x) = -x^2 F(x)$.

In dem Aggregate Z_i treten die sukzessiven Potenzen von $1+k^2$ auf, jeweils mit einer gewissen Potenz von k^2 multipliziert. Entwickelt man die ersteren nach dem binomischen Satze, und ordnet sodann wieder nach Potenzen von k^2, so bedarf man noch einer Erweiterung des binomischen Satzes auf Faktorielle d. i. Ausdrücke von der Form $x(x+a)(x+2a)\dots(x+na)$. Schließlich ergibt sich die einfache Entwickelung:

$$J(x,k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l} \frac{x^{2l+1}k^{2s}}{2l+1} w(s)\, w(l-s), \tag{7}$$

wo unter $w(t)$ die zahlentheoretische Funktion:

$$w(t) = \frac{1.3.5\dots(2t-1)}{2.4.6\dots 2t} \quad [w(0) = 1] \tag{8}$$

zu verstehen ist.

Die Reihe (7) erscheint als direkte Ausdehnung der elementarbekannten von $arc \sin x = J(x,0)$. In der Tat kann man auch umgekehrt von der letzteren Reihe ohne weiteres zu (7) gelangen, indem man die beiden binomischen Reihen für $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ multipliziert, und die so entstehende Reihe integriert.

Man vergleiche mit (7) die wesentlich verwickeltere Reihen-Entwickelung von $J(x,k)$ in der Schwarz-Weierstraßschen Formelsammlung, p. 53 f.

Für das Weierstraßsche Normalintegral:

$$J(x;g_2,g_3) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \tag{9}$$

erhält man die Entwickelung:

$$J(x;g_2,g_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E(\frac{i}{3})} \frac{x^{i+1}}{i+1}(-g_3)^{\frac{2i+1}{2}} \frac{(-1)^{3\varepsilon}\,2^{4\varepsilon-i}}{\varepsilon!\,(i-3\varepsilon)!}\, 1.3.5\dots\{2(i-2\varepsilon)-1\}\, g_2^{2\varepsilon} g_3^{i-3\varepsilon}, \tag{10}$$

oder, etwas übersichtlicher:

$$\frac{1}{\sqrt{-g_3}} J(x;g_2,g_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=E(\frac{i}{3})} \frac{x^{i+1}}{i+1} \frac{(-1)^{i-\varepsilon}}{2^{2(i-3\varepsilon)}} \binom{2(i-2\varepsilon)}{\varepsilon,\, i-2\varepsilon,\, i-3\varepsilon} g_3^{i+3\varepsilon} g_2^{i-3\varepsilon}. \tag{11}$$

Ist hier g_3 reell und positiv, so werden $\sqrt{-g_3}$ und J zugleich rein imaginär, sodaß beide Seiten der Darstellung (11) reell bleiben.

Das den obigen Entwickelungen zugrunde gelegte Prinzip, ein

Potenzprodukt von binären Urformen als eine Kovariante der letzteren aufzufassen, läßt sich nach verschiedenen Richtungen weiter ausdehnen. Einmal kann man zu ternären etc. Urformen aufsteigen, und dementsprechend zu mehrfachen Integralen; andererseits statt der Potenzen von Urformen andere Funktionen, z. B. Logarithmen [1]), wählen, und endlich statt endlicher Urformen unendliche d. h. Potenzreihen zu Grunde legen.

1) Entwickelt man z. B. nach dem Verfahren des Textes $lf(x)$, so gelangt man zu den Waringschen Potenzsummenformeln: auch diese erscheinen also als direkter Ausfluß der Tatsache, daß $lf(x)$ eine Kovariante von $f(x)$ ist.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 11. Januar 1908.

R. Pietschmann legt vor:
  Bericht des Professors Dr. Ludwig Borchardt in Kairo über Ausgrabungen.
  Sir Clements Markham's Uebersetzung der Geschichte des Inkareichs von Pedro Sarmiento.

E. Schwartz legt vor: Walter Kolbe (Rostock), Die attischen Archonten von 293/2–31/0 v. Chr. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 25. Januar 1908.

F. Kielhorn legt vor H. Jacobi, Ueber Begriff und Wesen der poetischen Figur in der indischen Poetik. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

F. Leo legt den Bericht der Kommission für den Thesaurus linguae latinae vor.

H. Wagner legt vor: Kohlschütter, Karte des Ukingagebietes.

